VETORES

1. SINOPSE HISTÓRICA

A história da Matemática raramente apresenta eventos bombásticos. As formulações inicialmente tênues e difusas percorrem um espinhoso trajeto até atingir a magnitude de seu desenvolvimento.

O conceito de vetor surgiu na Mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin - o "Arquimedes holandês". Em 1586 apresentou, em sua **Estática e Hidrostática**, o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, a conhecemos hoje como regra do paralelogramo.

Os vetores aparecem considerados como "linhas dirigidas" na obra **Ensaio sobre a Representação da Direção**, publicada em 1797 por Gaspar Wessel, matemático dinamarquês.

A sistematização da teoria vetorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês William Hamilton (notavelmente precoce: aos 5 anos lia grego, latim e hebraico), do alemão Hermann Grassmann e do físico norte-americano Josiah Gibbs.

2. GRANDEZAS ESCALARES E VETORIAIS

Certas grandezas ficam determinadas apenas por um número real, acompanhado pela unidade correspondente. Por exemplo: 5 kg de massa, 10 m^2 de área, 12 cm de largura. Tais grandezas são chamadas de **escalares**. Outras grandezas necessitam além do número real, também de uma direção e de um sentido. Exemplificando: a velocidade, a aceleração, o momento, o peso, o campo magnético, etc. São as grandezas vetoriais.

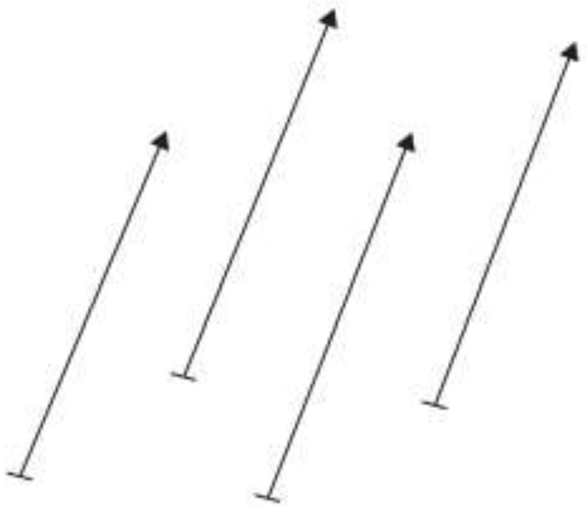
3. DEFINIÇÕES, ETIMOLOGIA E NOTAÇÕES

VETOR

DEF. 1: Vetor é uma tripla constituída de uma direção, um sentido e um número não negativo.

DEF. 2: Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e de mesmo comprimento.

Imagem geométrica ou representante de um vetor



Na figura ao lado tem-se um conjunto de segmentos orientados de um único vetor. O segmento orientado é um conjunto de pontos, ao passo que vetor é um conjunto de segmentos orientados. Cada segmento orientado é, a rigor, a **imagem geométrica** ou o **representante** de um vetor.

A figura apresenta quatro segmentos orientados ou então quatro imagens geométricas de um mesmo vetor.

Como abuso de linguagem, emprega-se a palavra **vetor** em vez de **imagem geométrica do vetor**. De acordo com a locução *latina abusus non tollit usum* (o abuso não tolhe o uso) também nós vamos escrever ou verbalizar a palavra vetor como imagem geométrica do vetor.

Etimologia da palavra vetor

Provém do verbo latino *vehere*: transportar, levar. **Vetor** é o particípio passado de *vehere*, significando **transportado**, **levado**. Apesar de primitiva e até bizarra, a palavra vetor é pertinente: o ponto A é "transportado" até B.

Notações de vetor

I) Uma letra latina minúscula encimada por uma seta.

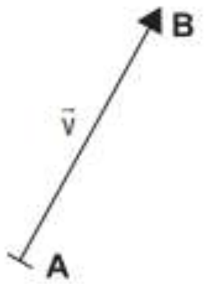
Exemplos:
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ … $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ...

II) Uma letra latina minúscula sobrelinhada.

Exemplos:
$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ … $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ ... (notação em desuso)

III) Dois pontos que são a origem e a extremidade de um representante do vetor.

Exemplo:
A soma do ponto A com o vetor $\vec{v}$ é o ponto B.



$A + \vec{v} = B$

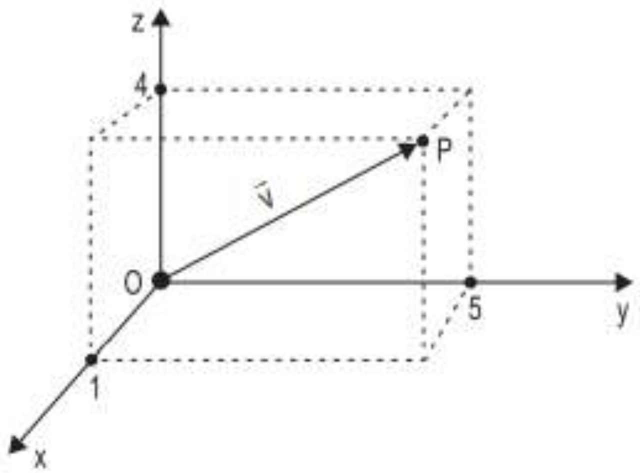
ou

$\boxed{\vec{v} = B - A}$

onde A é a **origem** e B é a **extremidade** do vetor.

Esta notação é assaz vantajosa pelas aplicações das operações algébricas e é devida ao matemático alemão H. Grassmann (1809-1877). Também bastante usual a notação $\vec{v} = \overline{AB}$

IV) Uma terna ordenada de números reais : $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$



Exemplo:

$\vec{v} = (1, 5, 4)$

Na figura $\vec{v} = (P - O)$

Como abuso de notação tem-se ainda

$\vec{v} = (P - O) = P$

OBSERVAÇÃO

Usualmente, quando já estiver fixado o sistema de coordenadas, o representante do vetor é aquele cuja origem coincida com a origem do sistema.

Módulo ($|\vec{v}|$)

É o número não negativo que indica o comprimento do vetor.

Exemplo:

Então $|\vec{v}| = 4$

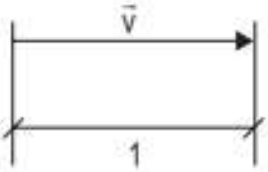
Vetor nulo ($\vec{o}$)

É o vetor de direção e sentido arbitrários, e módulo igual a **zero**. O vetor nulo tem coordenadas (0, 0, 0) e sua representação gráfica é a origem do sistema de coordenadas.

Vetor unitário

É o vetor de módulo igual a 1.

Exemplo:



Então: $|\vec{v}| = 1$

Versor

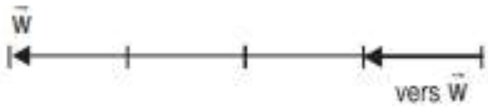
O versor de um vetor $\vec{v}$ não nulo, é o vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$.

$$\boxed{\text{vers } \vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Exemplos:

1. 

então vers $\vec{v} = \frac{\vec{v}}{3}$

2. 

então vers $\vec{w} = \frac{\vec{w}}{4}$

O vetor unitário coincide com o seu próprio versor.

Vetor oposto

Dado um vetor $\overline{AB}$ o seu oposto é o vetor $\overline{BA}$ e se indica por $-\overline{AB}$. O vetor oposto de um vetor $\vec{v}$ é representado por $-\vec{v}$.

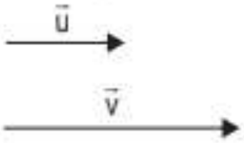
Exemplo:

4. PARALELISMO DE VETORES

DEFINIÇÃO

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma direção são ditos paralelos. *Ipso facto*, suas imagens geométricas podem ser representadas sobre uma mesma reta.

Exemplo:



Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e podem ser representados colinearmente:

OBSERVAÇÃO

Face o exposto até aqui, podemos associar ao conceito de vetor a ideia de translação. Tal ideia, como é sabido, não se transfere para retas paralelas, uma vez que estas possuem posições fixas e determinadas.

Exemplo:

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos ou colineares.

No entanto, as retas r e s são paralelas e jamais colineares.

VETORES EQUIVERSOS E CONTRAVERSOS

Dois vetores paralelos são **equiversos** se de mesmo sentido. Se de sentidos contrários, são **contraversos**.

Exemplo:

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são equiversos

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são contraversos

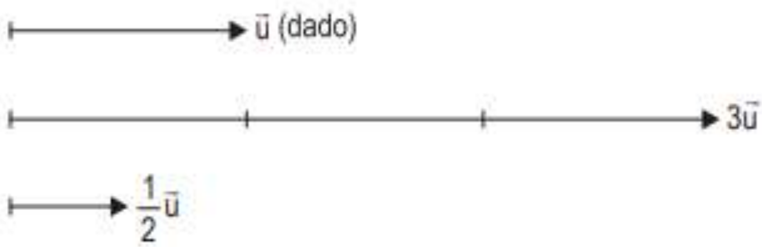
5. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR

DEFINIÇÃO

Seja k um escalar e $\vec{v}$ um vetor. O produto do vetor $\vec{v}$ pelo número real k é representado por $k\vec{v}$. Então, se:

I) $k > 0$

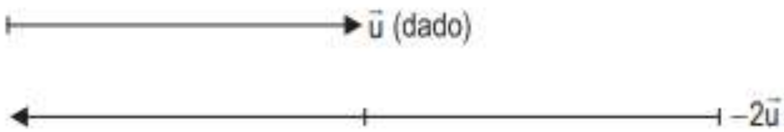
Os vetores $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são equiversos.
Exemplos:



II) $k < 0$

Os vetores $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são contraversos.

Exemplo:



CASOS PARTICULARES:

$0(\vec{v}) = \vec{0}$.
$k\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
$(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ onde $-\vec{v}$ é o oposto de $\vec{v}$.

Propriedades

Nas expressões abaixo, m e n são escalares quaisquer e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores arbitrários:

I) Propriedade associativa em relação aos escalares.

$$m(n\vec{v}) = n(m\vec{v}) = (mn)\,\vec{v}$$

II) Propriedade distributiva em relação à adição de escalares.

$$(m + n)\,\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$$

III) Propriedade distributiva em relação à adição de vetores.

$$m(\vec{v} + \vec{w}\,) = m\vec{v} + m\vec{w}$$

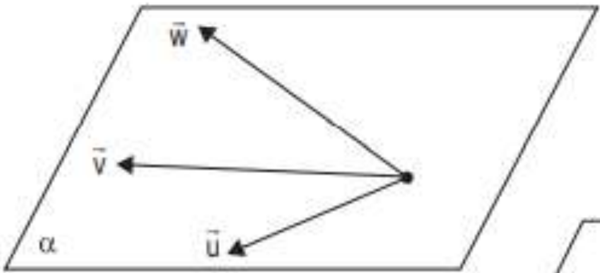
IV) Se $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, então:

$$m\vec{v} = m(x_1, y_1, z_1) = (mx_1, my_1, mz_1)$$

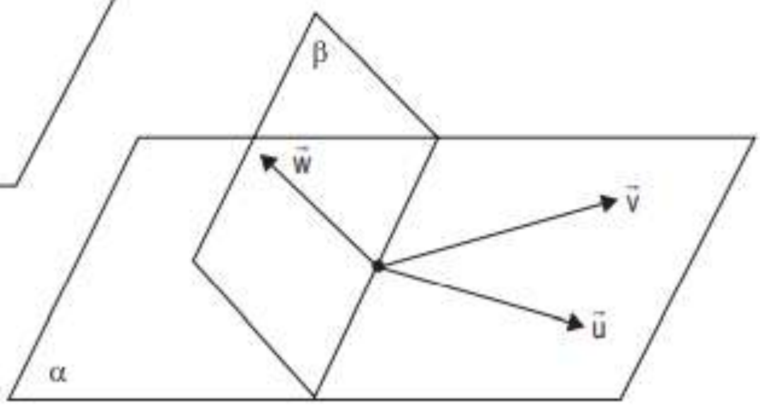
6. COPLANARIDADE DE VETORES

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se tiverem imagens geométricas paralelas ao mesmo plano. Cumpre enfatizar: dois vetores são sempre coplanares, enquanto que três vetores podem ou não ser coplanares.

Exemplos:



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares



$\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares

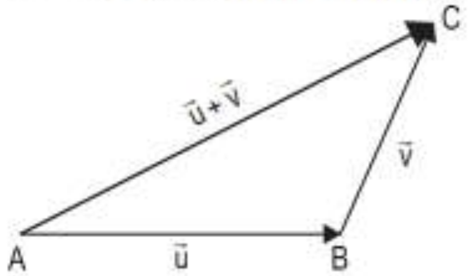
Convenção:

O vetor nulo é paralelo a qualquer vetor; é coplanar a qualquer conjunto de vetores coplanares.

7. ADIÇÃO DE VETORES

Definição

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, para se obter a soma $\vec{u} + \vec{v}$, fixamos um ponto qualquer A do plano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e consideramos os pontos $B = A + \vec{u}$ e $C = B + \vec{v}$, conforme a figura; nessas condições, $\vec{u} + \vec{v} = (C - A)$.



Denotando por diferença de pontos:

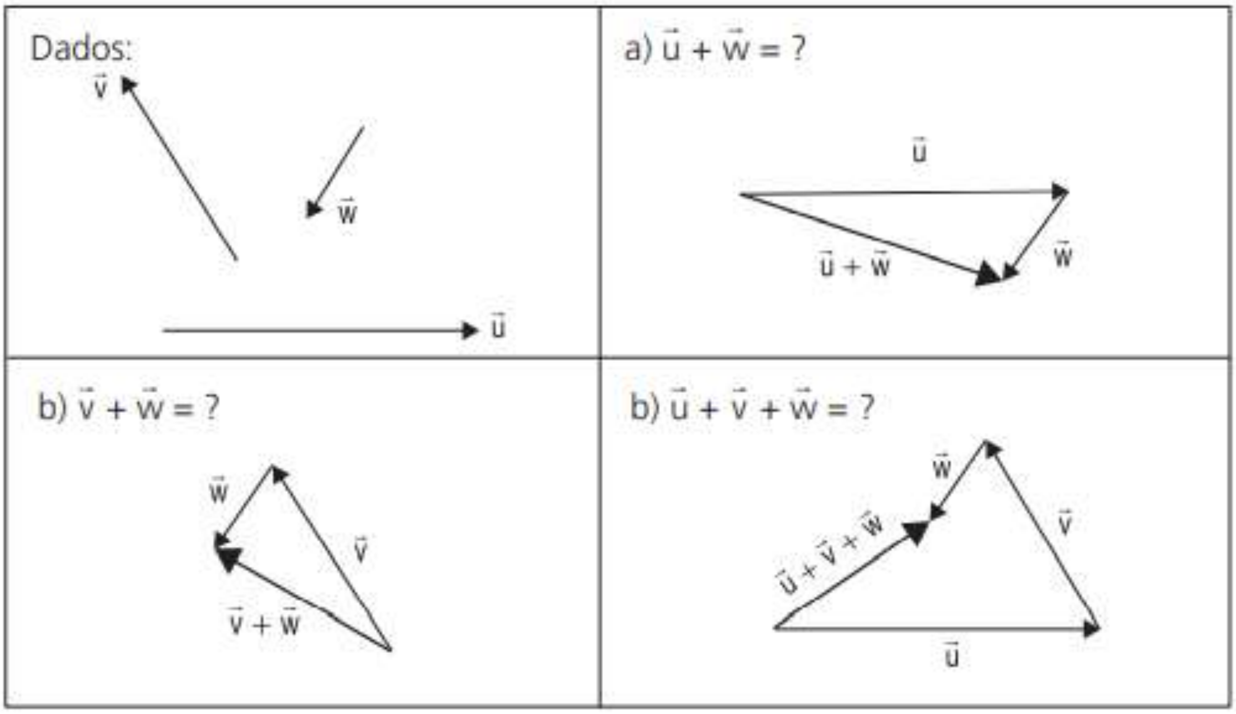
$\vec{u} + \vec{v} = (B - A) + (C - B) = (C - A)$

Donde $\overrightarrow{AC}$ é o vetor resultante, obtido da adição de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.

Geometricamente, a soma de n vetores (sendo n um número inteiro positivo qualquer) é feita considerando imagens geométricas dos vetores, de modo que a extremidade de cada vetor coincida com a origem do vetor seguinte; o vetor soma é o vetor que fecha a poligonal.

Exemplos:

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, obter graficamente a soma:



Graficamente, o vetor soma é o segmento orientado que fecha a poligonal, tendo por origem, a origem do primeiro vetor e por extremidade, a extremidade do último vetor.

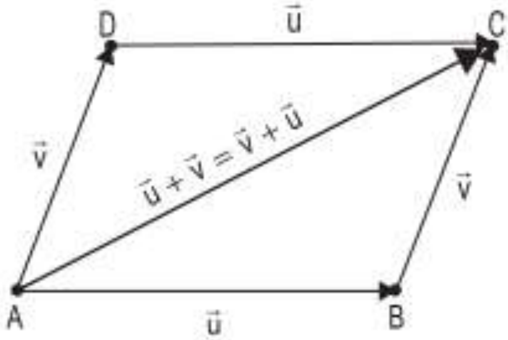
Sob a forma de triplas:

Dados os vetores

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, então $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Propriedades

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



Demonstração: Considere as imagens geométricas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados na figura.

1º membro:

$\vec{u} + \vec{v} = (B - A) + (C - B) = (C - A)$

2º membro:

$\vec{v} + \vec{u} = (D - A) + (C - D) = (C - A)$

donde $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (cqd)

Consequência

Regra do paralelogramo: A diagonal do paralelogramo construído sobre as imagens geométricas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representa a soma $\vec{u} + \vec{v}$.

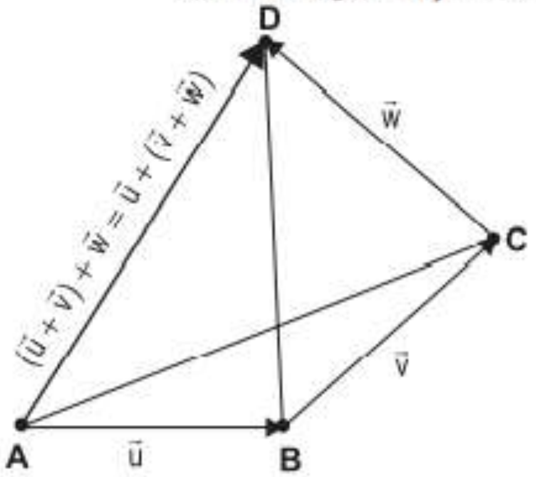
OBSERVAÇÃO

Sabe-se que o paralelogramo apresenta duas diagonais distintas. Para a "regra do paralelogramo" construído sobre as imagens geométricas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma origem A, adota-se a diagonal que contém o ponto A.

A "regra do paralelogramo" é muito usual na composição de forças em Mecânica.

II) Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

Demonstração: Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dados.



1.º membro:

$(\vec{u}+\vec{v})=(B-A)+(C-B)=(C-A)$

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=(C-A)+(D-C)=(D-A)$

2.º membro:

$(\vec{v}+\vec{w})=(C-B)+(D-C)=(D-B)$

$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(B-A)+(D-B)=(D-A)$

Então:

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (qed)

III) Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

IV) Elemento oposto: Dado um vetor $\vec{u}$, existe um único vetor indicado por $-\vec{u}$, tal que:

$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

O vetor $(-\vec{u})$ é o vetor oposto de $\vec{u}$.

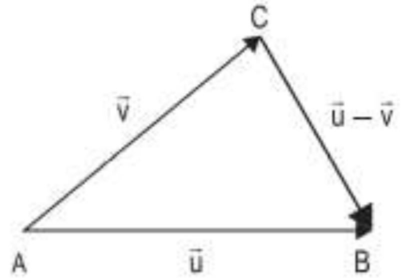
V) Lei do cacelamento: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w} \Rightarrow \vec{v}=\vec{w}$

8. SUBTRAÇÃO DE VETORES

Definição

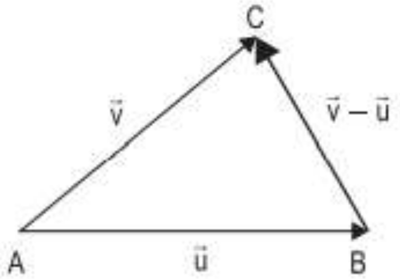
Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos a diferença $\vec{u}-\vec{v}$ por: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Denotando por diferença de pontos:



1.º caso:

$\vec{u}-\vec{v}=(B-A)-(C-A)=(B-C)$

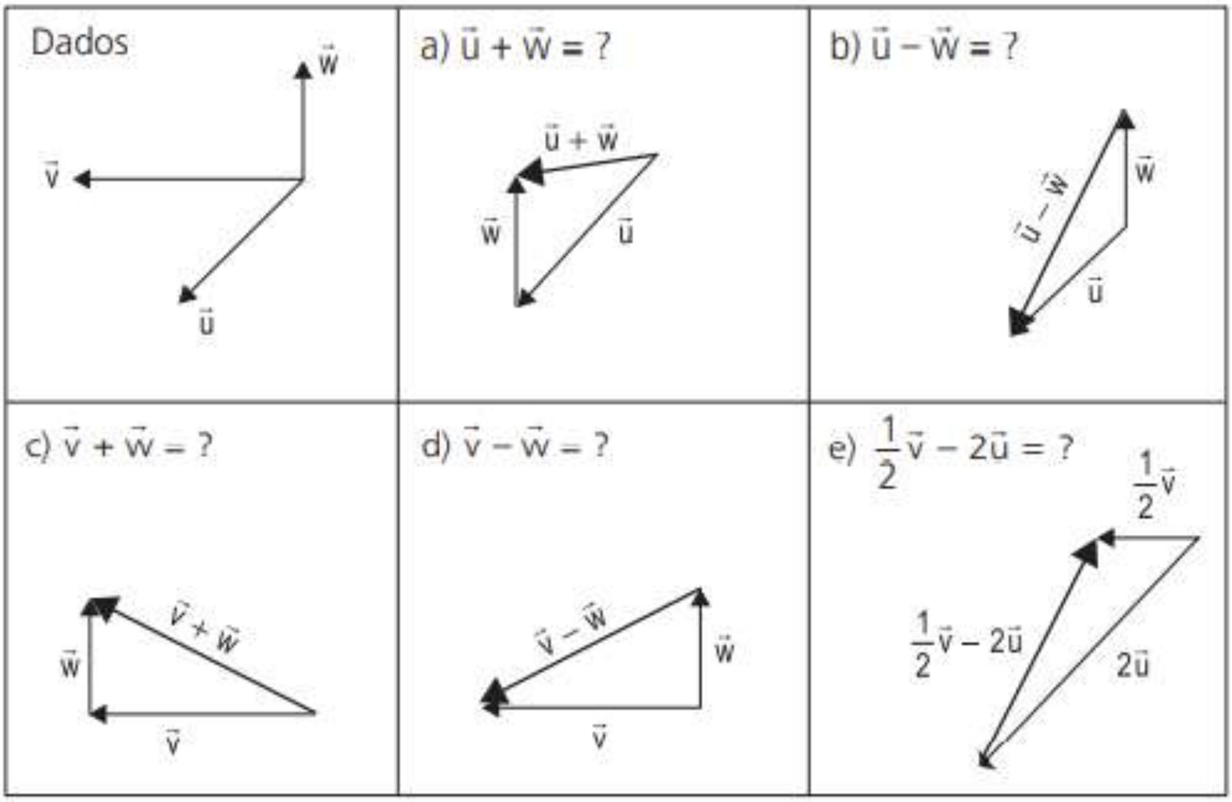


2.º caso:

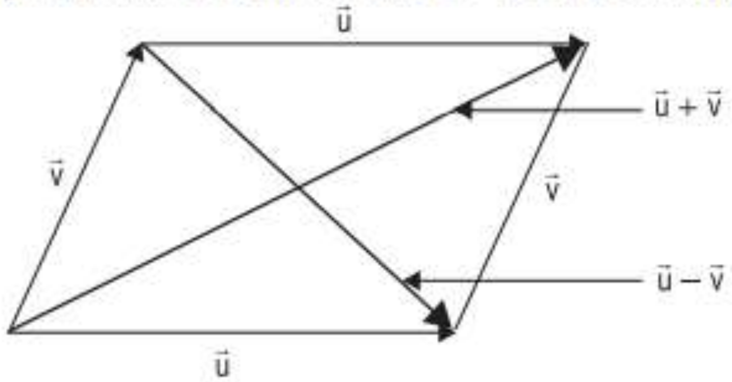
$\vec{v}-\vec{u}=(C-A)-(B-A)=(C-B)$

Exemplos

1) Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ obter graficamente:



2) Num paralelogramo construído sobre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, as diagonais são as imagens geométricas do vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ e do vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$.

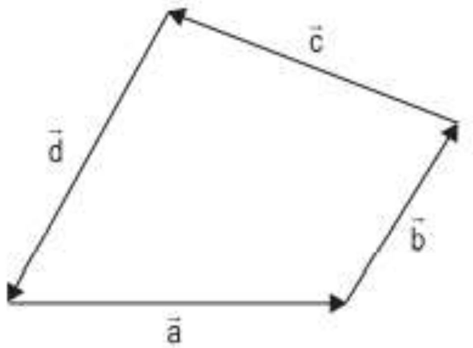


Exercícios

01. Determinar a origem A do segmento que representa o vetor $\vec{u} = (2, 3, -1)$, sendo sua extremidade o ponto $B = (0, 4, 2)$.

Resp.: $A = (-2, 1, 3)$

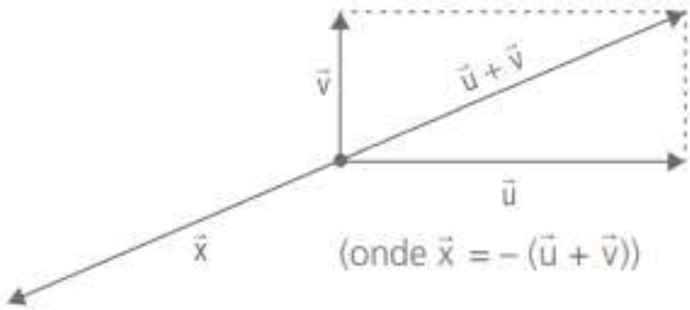
02. Na figura abaixo o vetor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ é igual a:



Resp.: $\vec{s} = \vec{o}$

03. Representados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na figura, achar graficamente o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$.

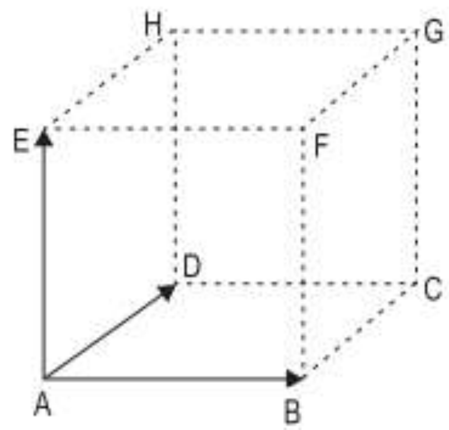
Resp.:



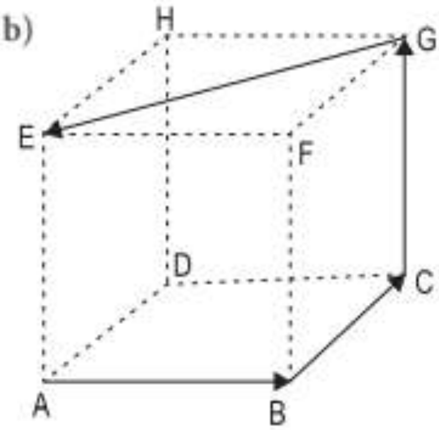
(onde $\vec{x} = -(\vec{u} + \vec{v})$)

04. Nos cubos abaixo, representar a soma dos vetores indicados com linha cheia.

a)



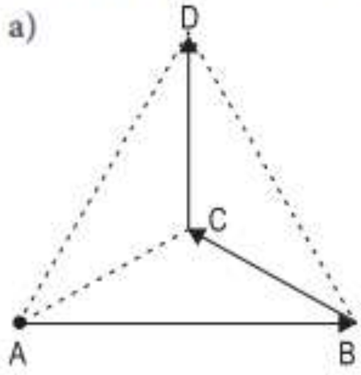
b)



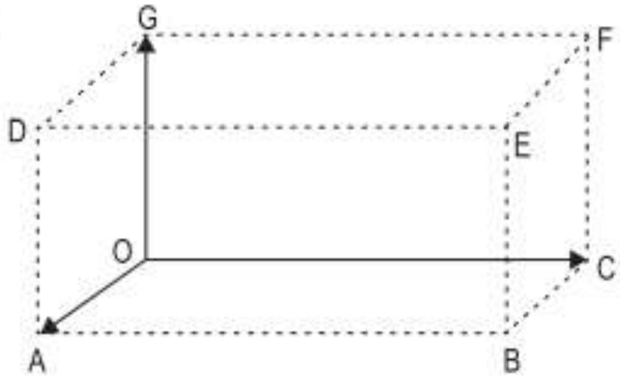
Resp.: a) (G – A) b) (E – A)

05. No tetraedro e no paralelepípedo retângulo, achar a soma dos vetores representados por suas imagens geométricas.

a)

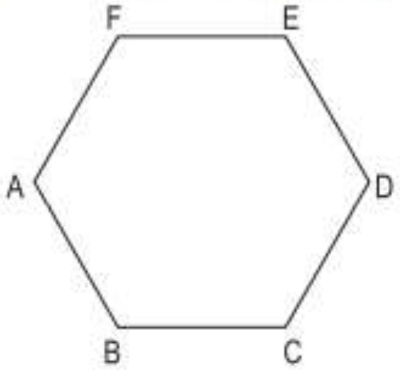


b)



Resp.: a) (D – A) b) (E – O)

06. No hexágono regular, obter:



a) (B – A) + (E – F) + (F – A)

b) (D – A) – (E – A) + (E – B)

Resp.: a) (D – A)

b) (D – B)

01. Dados $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e $\vec{w} = (0, 2, 3)$, achar:

a) $2\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w}$

b) $3(\vec{u} + \vec{v}) - 2(2\vec{v} - \vec{w})$

Resp.: a) (0, 11, 13)

b) (1, 9, 7)

01. Conhecidos $A = (1, 3, 0)$, $B = (5, 5, 2)$ e $\vec{v} = (1, 3, -2)$ calcular:

a) $A + \vec{v}$

b) $2A - 3B - \vec{v}$

Resp.: a) (2, 6, −2)

b) (−14, −12, −4)

09. Sendo $A = (2, 0, 1)$, $B = (0, 3, -2)$, $C = (1, 2, 0)$, determinar $D = (x, y, z)$, tal que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Resp.: $D = (-3, 7, -7)$

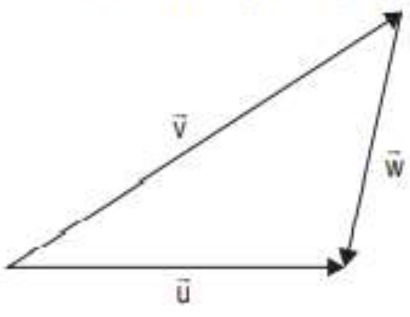
10. Calcular o vetor oposto de $\overrightarrow{AB}$ sendo $A = (1, 3, 2)$ e $B = (0, -2, 3)$.

Resp.: $\overrightarrow{BA} = (1, 5, -1)$

11. Conhecendo-se $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, 3, 1)$ calcular os escalares m, n e p em $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = (0, 0, 14)$.

Resp.: $m = -1$, $n = 5$, $p = -1$

12. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um triângulo, conforme a figura.
Sendo $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (3, 0, 3)$, então $\vec{w}$ é igual a:



Resp.: (−2, 2, −3)

13. Determinar o vetor $\vec{x}$, tal que $5\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (-1, 4, -15)$ e $\vec{v} = (-3, 2, 5)$.

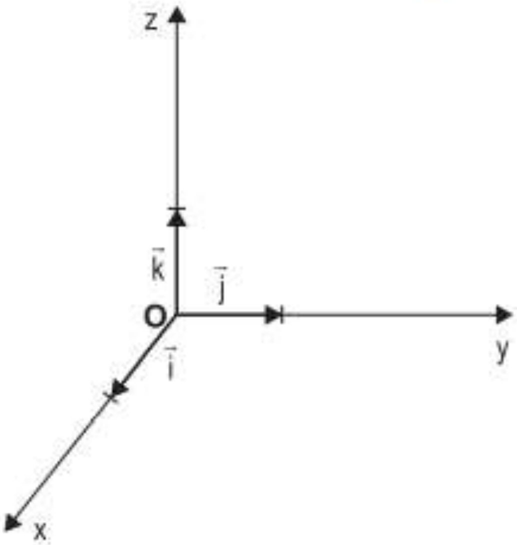
Resp.: $\vec{x} = (1, 0, -5)$

9. COMBINAÇÃO LINEAR DE VETORES

Considere os vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots \vec{u}_n$ e os escalares $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$. Diz-se que $\vec{v}$ é **combinação linear** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \ldots u_n$ quando escritos sob a forma de:

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + \ldots k_n\vec{u}_n$$

10. EXPRESSÃO CARTESIANA DE UM VETOR



a) Seja x, y e z um sistema cartesiano ortogonal. Convencionou-se representar por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, nesta ordem, os versores dos eixos cartesianos ortogonais x, y e z.

Então:

$\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$

$\vec{k} = (0, 0, 1)$

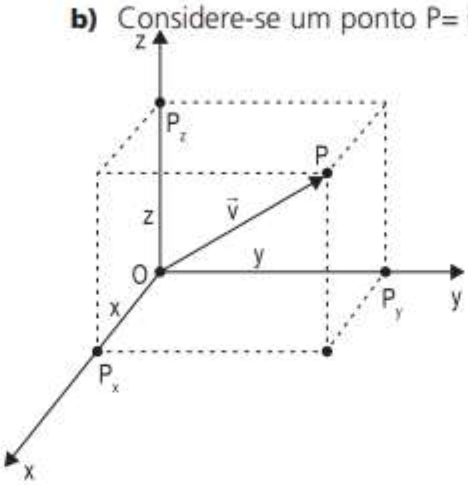
E pela definição de versor, que possui módulo unitário, tem-se:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

OBSERVAÇÃO

Os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ constituem uma base ortonormal de E^3 por ser formada de vetores unitários e mutuamente ortogonais.

b) Considere-se um ponto P= (x, y, z) do espaço tridimensional e $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ os versores dos eixos cartesianos ortogonais x, y e z. O vetor $\vec{v}$ =(P – O) tem origem em O e extremidade em P e pode ser expresso como combinação linear de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Do paralelepípedo representado na figura ao lado obtém-se:



$(P - O) = (P_x - O) + (P_y - O) + (P_z - O)$

como $(P_x - O) = x\,\vec{i}$

$(P_y - O) = y\,\vec{j}$

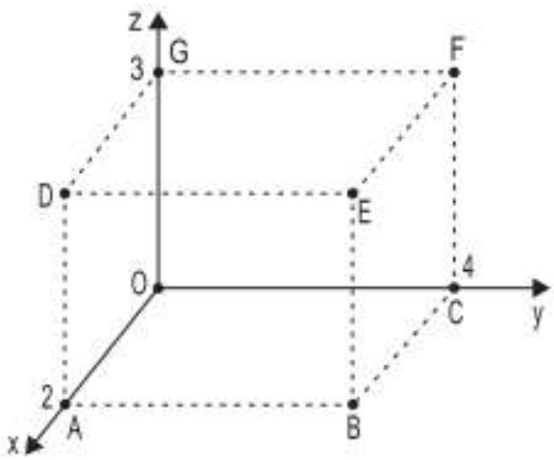
$(P_z - O) = z\,\vec{k}$ tem-se

$$\boxed{(P - O) = \vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}}$$

denominada **expressão cartesiana** do vetor (P – O), onde x, y e z são as **coordenadas** e $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ as componentes do citado vetor. O vetor $\vec{v}$ representa a diagonal do paralelepípedo reto, cujas arestas são os vetores coordenadas $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$.

OBSERVAÇÃO

Em particular o vetor (P – O) pode ter imagem geométrica num dos planos cartesianos. Por exemplo, se (P – O) estiver no plano xy, a 3ª coordenada é nula: $(P - O) = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Exemplos:

Do paralelepípedo retângulo obtém-se:

$(A - O) = 2\vec{i}$

$(C - O) = 4\vec{j}$

$(G - O) = 3\vec{k}$

$(B - O) = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

$(D - O) = 2\vec{i} + 3\vec{k}$

$(F - O) = 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$(E - O) = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

11. CONDIÇÃO DE PARALELISMO DE DOIS VETORES

Teorema

Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existir um escalar k tal que:

$$\boxed{\vec{v} = k\vec{u}}$$

Podemos afirmar que $\vec{v}$ é expresso linearmente em função de $\vec{u}$.
Demonstração:

1) Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos, os seus versores só podem diferir quanto ao sentido:

vers $\vec{v} = \pm$ vers $\vec{u}$ ou

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \pm\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \text{ ou } \vec{v} = \pm\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

Como $\pm\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ é um número real, chamemo-lo de k.

Donde $\vec{v} = k\vec{u}$ (cqd)

2) Reciprocamente, se $\vec{v} = k\vec{u}$, então $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u}$, pela definição de produto de vetor por escalar.

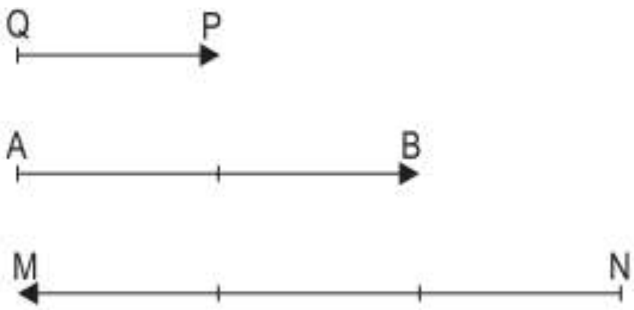
Vetores representados por pontos

A igualdade persiste se os vetores forem representados por pontos. Seja $\vec{u} = (B - A)$ e $\vec{v} = (C - D)$, então:

$$\boxed{(C - D) = k(B - A)}$$

Exemplos:

Enfatizando o paralelismo dos vetores representados por suas imagens geométricas, podemos afirmar que:



$$(B - A) = 2(P - Q)$$
$$(P - Q) = \frac{1}{2}(B - A)$$
$$(M - N) = -3(P - Q)$$
$$(B - A) = -\frac{2}{3}(M - N)$$

VETORES REPRESENTADOS POR TRIPLAS

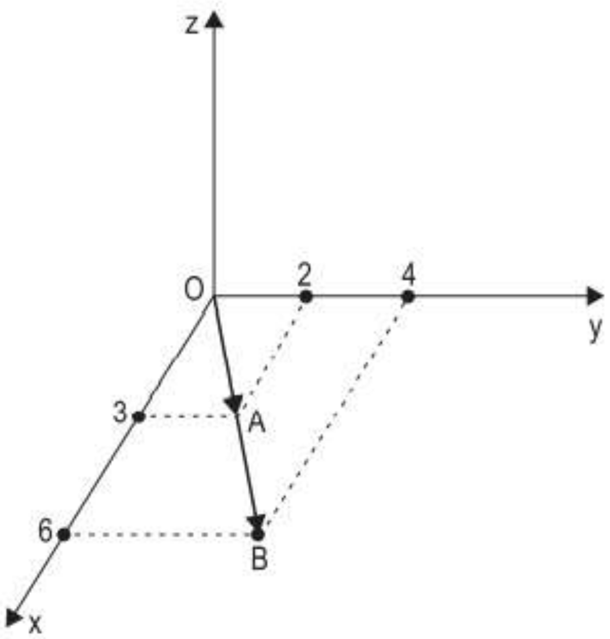
Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Pelo teorema, $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$ se, e somente se, existir um número real k tal que $\vec{v} = k\vec{u}$; ou ainda, $(x_2, y_2, z_2) = k(x_1, y_1, z_1)$. Explicitando o k, obtém-se a condição de paralelismo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} (= k)$$

Convenção:

A nulidade de um dos denominadores implica na nulidade do correspondente numerador.

Exemplo:



São paralelos os vetores

$\vec{u} = (3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (6, 4, 0)$.

Na figura ao lado, $\vec{u} = (A - O)$ e $\vec{v} = (B - O)$. Observe que $\vec{v} = 2\vec{u}$, e que em particular os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm imagens geométricas no plano xy.

Exercícios

01. Determinar x, sabendo-se paralelos os vetores:

a) $\vec{u} = (1, 3, 10)$ e $\vec{v} = (-2, x, -20)$

b) $\vec{v} = (0, 2, x)$ e $\vec{w} = (0, 3, 6)$

c) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = x\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$

Resp.: a) $x = -6$ b) $x = 4$ c) $x = 6$

01. Sendo A, B, C, D vértices consecutivos de um paralelogramo, calcular as coordenadas do vértice D.

Dados: $A = (1, 3)$, $B = (5, 11)$ e $C = (6, 15)$

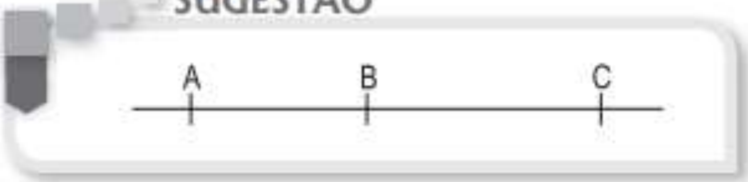
Resp.: $D = (2, 7)$

02. Seja ABDC um paralelogramo de vértices consecutivos na ordem escrita. Achar o vértice A, sabendo-se que $B = (0, 1, 3)$, $C = (2, 3, 5)$ e $D = (-1, 0, 2)$.

Resp.: **A=(3, 4, 6)**

03. Provar que os pontos $A = (3, 1, 5)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (4, 2, 9)$ são colineares.

SUGESTÃO

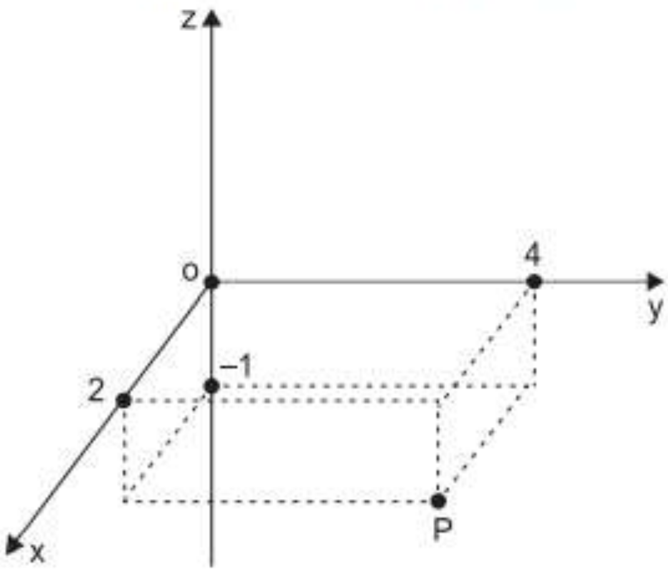


Por exemplo: os vetores $(C - A)$ e $(B - A)$ devem ser paralelos.

04. Calcular x e y sabendo que os pontos $A = (1, -1, 3)$, $B = (x, y, 5)$ e $C = (5, -13, 11)$ são colineares.

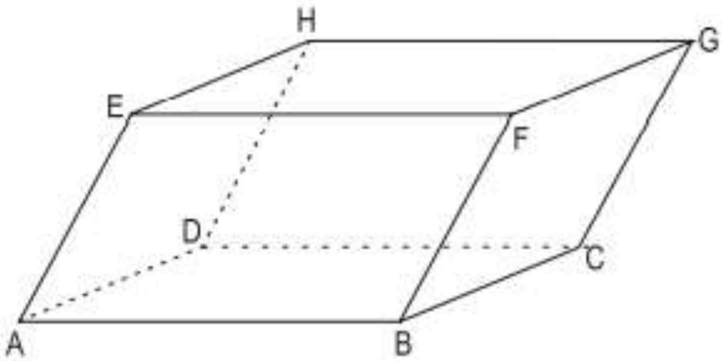
Resp.: $x = 2$ e $y = -4$

05. Na figura abaixo, obter a expressão cartesiana do vetor (P – O).



Resp.: $(P - O) = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

06. Seja o paralelepípedo representado na figura. Conhecendo-se os vértices B = (1, 2, 3), D = (2, 4, 3), E = (5, 4, 1) e F = (5, 5, 3), pedem-se os vértices A e G.



Resp.: A = (1, 1, 1)

G = (6, 8, 5)

12. CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE VETORES

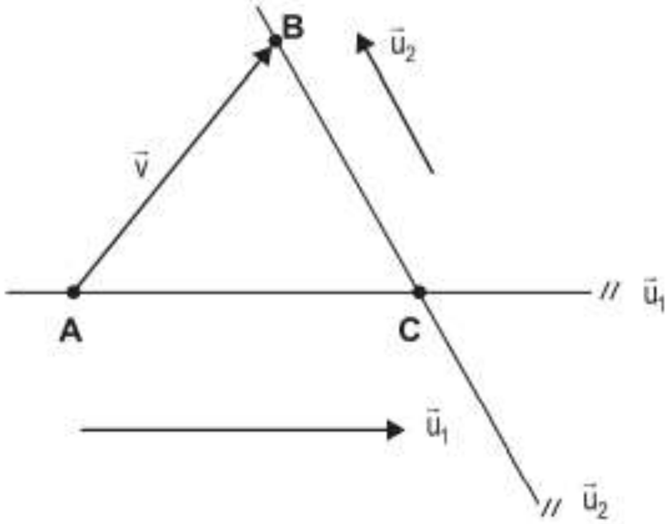
TEOREMA

O vetor $\vec{v}$ é coplanar aos vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ (não nulos e não paralelos entre si) se, e somente se:

$$\boxed{\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2}$$

Ou seja, se e somente se, $\vec{v}$ for **combinação linear** de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, sendo k_1 e k_2 escalares.

Demonstração:



Sejam $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ vetores coplanares, (B – A) a imagem geométrica do vetor $\vec{v}$. Pela origem A conduzimos uma paralela ao vetor $\vec{u}1$, e pela extremidade B, uma paralela a $\vec{u}_2$. C é o ponto de intersecção de tais paralelas.

Então: $(C - A) = k_1\vec{u}_1$

$(B - C) = k_2\vec{u}_2$

Da figura: $(B - A) = (C - A) + (B - C)$

Substituindo: $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$ (qed)

Reciprocamente, é passível de demonstração:

se $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$

então os vetores $\vec{v}$, $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são coplanares.

Coplanaridade de vetores representados por triplas

Três vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ são coplanares se um deles for combinação linear dos outros dois. *Ipso facto*, o seu determinante deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo:

Os vetores $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (7, 6, 9)$ são coplanares.

Exercícios

01. Calcular **a** sabendo-se coplanares os vetores:

$\vec{u} = (1, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, 4)$ e $\vec{w} = (3, 4, a)$

$\vec{u} = a\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = a\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Resp.: a) 4, b) $\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

02. Provar que os pontos A = (4, 5, 1), B = (−4, 4, 4), C = (0, −1, −1) e D = (3, 9, 4) são coplanares.

SUGESTÃO

O determinante das coordenadas dos vetores (B − A), (C − A) e (D − A) é nulo.

03. Dados $\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$, exprimir $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $\vec{w} = -4\vec{u} + 6\vec{v}$

SUGESTÃO

$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$
então $(-2, 6, 6) = k_1\ (2, 0, 0) + k_2\ (1, 1, 1)$

04. Sendo $\vec{u}_1 = (0, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 3)$ e $\vec{v} = (0, 3, 0)$ exprimir $\vec{v}$ como combinação linear de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

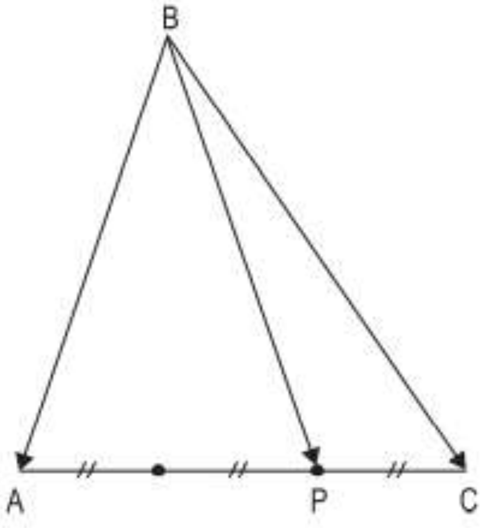
Resp.: $\vec{v} = \dfrac{3}{7}(3\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$

05. Exprimir $\vec{w} = (-2, 6, 2)$ como combinação linear de $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

Resp.: impossível

OBS.: De fato, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.

06. Considere a figura e expresse (P – B) como combinação linear de (A – B) e (C – B).

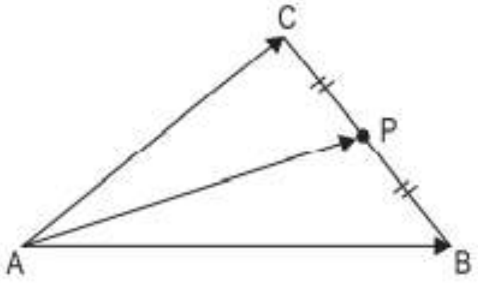


Resp.: $(P - B) = \dfrac{2}{3}(C - B) + \dfrac{1}{3}(A - B)$

SUGESTÃO

$(P - A) = 2(C - P)$, onde
$(P - A) = (P - B) - (A - B)$ e
$(C - P) = (C - B) - (P - B)$

07. Sendo P o ponto médio do lado BC do triângulo ABC, conforme a figura, exprimir (P – A) como combinação linear de (B – A) e (C – A).



Resp.: $(P - A) = \dfrac{1}{2}(B - A) + \dfrac{1}{2}(C - A)$

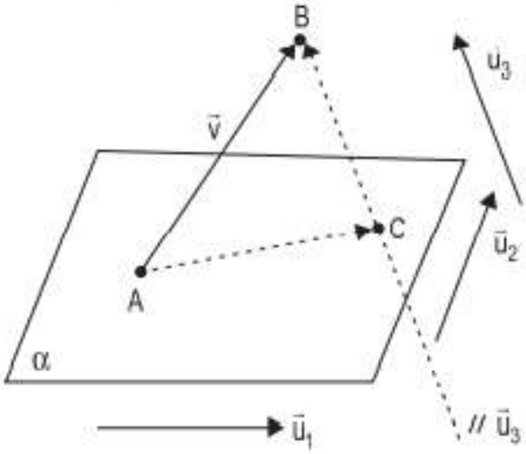
13. COMBINAÇÃO LINEAR DE 4 VETORES

TEOREMA

Sejam três vetores do espaço tridimensional $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$, não nulos e não coplanares, então qualquer vetor $\vec{v}$ pode ser expresso como combinação linear de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$:

$$\boxed{\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3}$$

Demonstração:



Fixemos no E^3 um ponto A e tracemos o plano α paralelamente a $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ e passante por A. A imagem geométrica do vetor $\vec{v}$ é (B – A). Por B conduzimos uma paralela ao vetor $\vec{u}_3$, interceptando α no ponto C.

Do triângulo ABC:

(B – A) = (C – A) + (B – C) ①

Como (C – A) é coplanar a $\vec{u}_1$ e a $\vec{u}_2$:

(C – A) = $k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$ ②

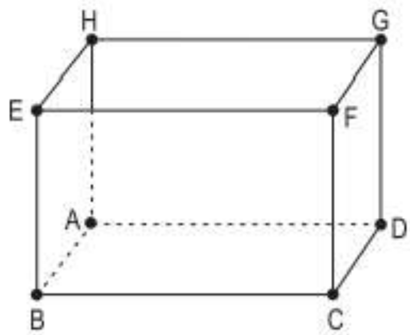
Como (B – C) é paralelo a $\vec{u}_3$:

(B – C) = $k_3\vec{u}_3$ ③

Substituindo ② e ③ em ①:

$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3$ (cqd)

01. No paralelepípedo, expressar (F – A) como combinação linear de (C – D), (D – A) e (E – B).



Resp.: (F – A) = (C – D) + (D – A) + (E – B)

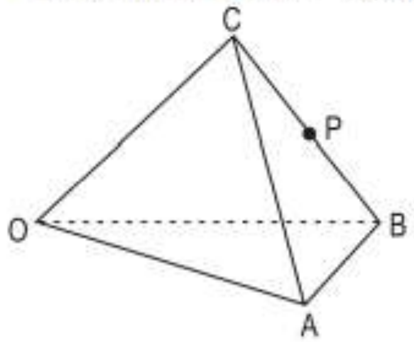
02. Sendo P o vértice de uma pirâmide cuja base é o paralelogramo ABCD, exprimir $(D - P)$ como combinação linear de $(A - P)$, $(B - P)$ e $(C - P)$.

Resp.: $(D - P) = (A - P) + (C - P) - (B - P)$

SUGESTÃO

Faça a figura, onde $(D - A) = (C - B)$
ou $(D - P) - (A - P) = (C - P) - (B - P)$

03. No tetraedro OABC, P é o ponto médio de $\overline{BC}$. Exprimir $(P - A)$ como combinação linear de $(A - O)$, $(B - O)$ e $(C - O)$.

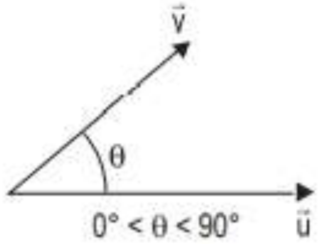


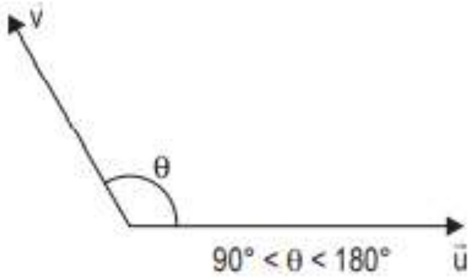
Resp.: $(P - A) = \frac{1}{2}(B - O) + \frac{1}{2}(C - O) - (A - O)$

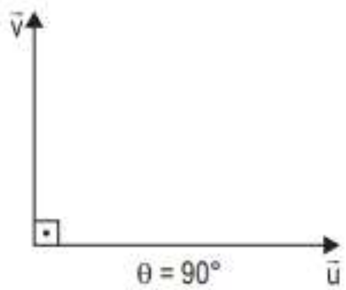
14. ÂNGULO DE DOIS VETORES

O ângulo $0° \leq \theta \leq 180°$ de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo formado entre suas direções, levando-se em consideração os sentidos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

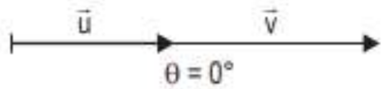
Exemplos:







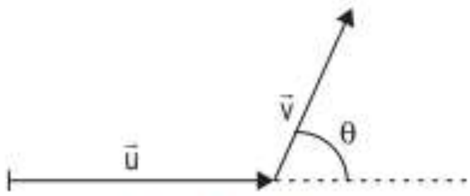
($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais)



($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são equiversos)

$\theta = 180°$

($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são contraversos)



$0° > \theta < 90°$

15. MULTIPLICAÇÃO INTERNA OU ESCALAR

Símbolo: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

A notação acima é devida ao físico norte-americano J. W. Gibbs (1839-1903).

Definição

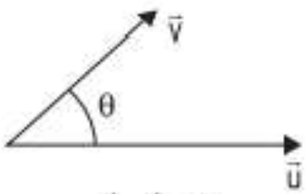
O produto interno ou escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número (escalar) tal que:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta}$$

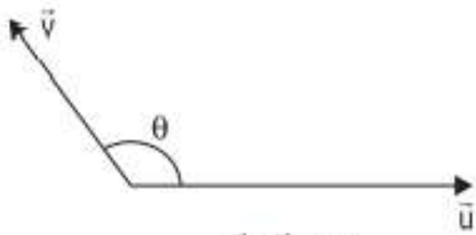
Onde $0° \leq \theta \leq 180°$ é a medida do ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Sinal do produto interno

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ indica que $\cos\theta > 0$, o que ocorre quando θ é ângulo agudo. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então θ é ângulo obtuso.



$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$



$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

Nulidade do produto escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, se:

I) um dos vetores for nulo;

II) os dois vetores forem ortogonais, pois $\cos 90° = 0$.

Módulo de um vetor

O módulo de um vetor $\vec{u}$ pode ser calculado através do produto interno, pois:

$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{u}| \cos 0°$

Donde:

$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$

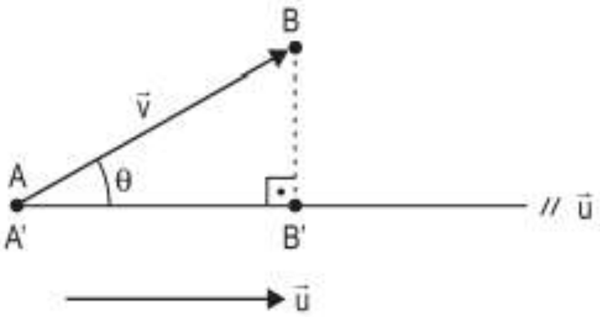
Ângulo de dois vetores

O cálculo do ângulo entre dois vetores se faz de forma trivial, isolando-se o $\cos\theta$ na fórmula do produto escalar:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$$

Interpretação geométrica do produto escalar

Na figura A'B' é a **medida algébrica** da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre a direção do vetor $\vec{u}$. Em símbolos:



$A'B' = proj_{\vec{u}}\vec{v}$

Do triângulo retângulo AB'B:

$A'B' = AB \cos\theta$

$= |\vec{v}| \cos\theta$

Seja $\vec{u}^*$ o versor do vetor $\vec{u}$. A última igualdade não se altera se a multiplicarmos por $|\vec{u}^*|$.

$A'B' = |\vec{u}^*|\,|\vec{v}|\cos\theta$

A igualdade persiste com $\vec{u}^* = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$:

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}}$$

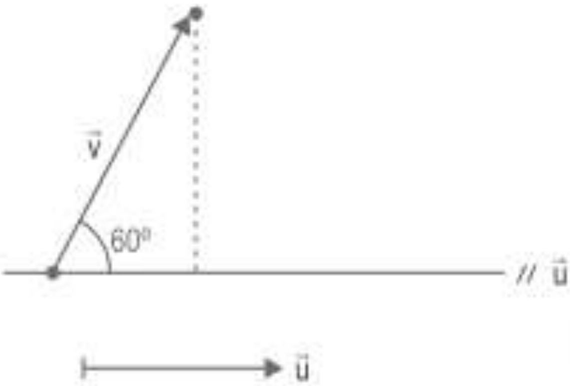
ou

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v}}$$

Se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ for agudo, a medida algébrica da projeção será positiva. Se obtuso, negativa.

Exemplo:

Dados $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 2$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 60°$, achar a **medida** da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Resolução:

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos 60°$

$= (3)\ (2)\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$

$\operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{3}{3} = 1$

Propriedades do produto escalar:

I) Comutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

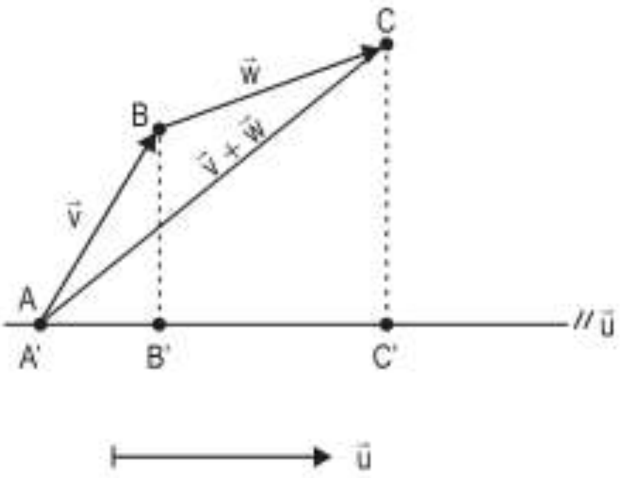
II) Associativa em relação à multiplicação por um escalar k:

$k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$

III) Distributiva em relação à adição de vetores:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Demonstração: Na figura $\vec{v} = (B - A)$ e $\vec{w} = (C - B)$ e por consequência $\vec{v} + \vec{w} = (C - A)$. Os pontos A', B' e C' são as projeções ortogonais de A, B e C sobre uma reta paralela ao vetor $\vec{u}$.



Pelo teorema de Carnot:

A' C' = A'B' + B'C'

ou

$proj_{\vec{u}}AC = proj_{\vec{u}}AB + proj_{\vec{u}}BC$

ou ainda:

$proj_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = proj_{\vec{u}}\vec{v} + proj_{\vec{u}}\vec{w}$

Multiplicando os dois membros por $|\vec{u}|$ tem-se:

$$|\vec{u}|proj_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|proj_{\vec{u}}\vec{v} + |\vec{u}|proj_{\vec{u}}\vec{w}$$

igualdade que pela interpretação geométrica do produto interno pode ser escrita:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{(qed)}$$

Exemplo:

Sendo $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 120°$, calcular:

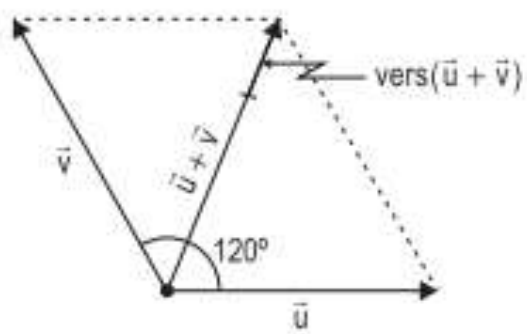
1. $|\vec{u} + \vec{v}|$

Resolução:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \\ &= (4)^2 + (5)^2 + 2(4)(5)\cos 120° = 21 \end{aligned}$$

Resp.: $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{21}$

2. vers $(\vec{u} + \vec{v})$



Resolução:

$$\text{vers}\ (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{|\vec{u} + \vec{v}|} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{21}}$$

Exercícios

01. Calcular $|\vec{u} + \vec{v}|$ e o versor de $(\vec{u} + \vec{v})$, sabendo-se que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 60°$.

$$Fazendo\ \left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v}\left|\vec{v}\right|^2$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos 60°$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 12,\ \ vol\tan do\ \ em\ \left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v}\left|\vec{v}\right|^2$$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = |4|^2 + 2(12) + |6|^2 = 76$$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = 2\sqrt{19},\quad o\ versor = \frac{\vec{u}+\vec{v}}{\left|\vec{u}+\vec{v}\right|}$$

02. Sendo $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 4$, $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = 90°$ e $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = 30°$, calcular:

OBS.: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

a) $|\vec{u} + \vec{v}|$

Resp.: $\sqrt{13}$

b) vers $(\vec{u} + \vec{v})$

Resp.: $\dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{\sqrt{13}}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

Resp.: -5

SUGESTÃO

$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

1) multiplique escalarmente por $\vec{u}$

2) multiplique escalarmente por $\vec{v}$

d) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

Resp.: $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$

e) o vetor $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Resp.: $\vec{w} = -\vec{u} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\vec{v}$

01. Determinar o ângulo $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$, sabendo-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 4$.

Resp.: $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \text{arc } \cos\frac{1}{4}$

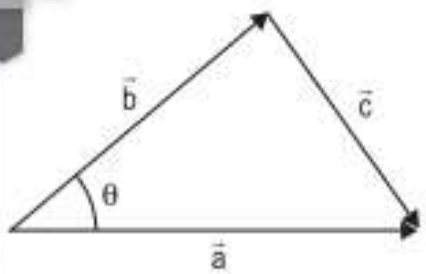
SUGESTÃO

$\vec{u} + \vec{v} = -\vec{w}$ ou

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (-\vec{w}) \cdot (-\vec{w})$

02. Provar a lei dos cossenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$

SUGESTÃO



$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{c} \,.\, \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$

03. Seja um paralelogramo construído sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Determinar o ângulo θ entre as diagonais do paralelogramo.

Dados $|\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 1$ e $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\pi}{6}$

Resp.: $\theta = \text{arc cos } \frac{2\sqrt{7}}{7}$

SUGESTÃO

As diagonais são $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

Então seu produto interno é $(\vec{u} + \vec{v}) \,.\, (\vec{u} - \vec{v}) = |(\vec{u} + \vec{v})|\,|(\vec{u} - \vec{v})| \cos\theta$

04. Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ e $-\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, sabendo-se que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ e que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são mutuamente ortogonais.

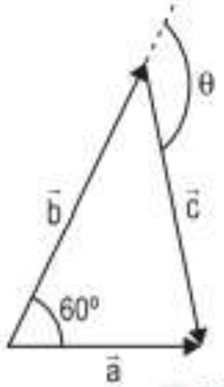
Resp.: $\frac{\pi}{3}$

05. Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ mutuamente ortogonais, demonstrar que:

a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$

06. Na figura, calcular o ângulo θ entre os vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$, sendo $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ e $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$

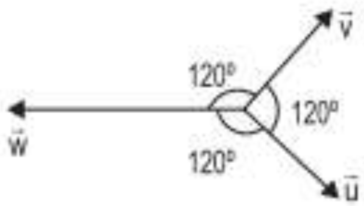


Resp.: $\frac{5\pi}{6}$

SUGESTÃO

Como $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ faça o produto escalar entre $\vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

07. Na figura estão representadas as imagens geométricas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Sendo $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ e $|\vec{w}| = 4$, escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Resp.: $w = -2(\vec{u} + \vec{v})$

08. Sabendo-se que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam dois a dois ângulos de 60° e tais que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e $|\vec{w}| = 1$.

Achar o módulo do vetor $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Resp.: $|\vec{s}| = \sqrt{35}$

SUGESTÃO

Desenvolva o produto interno:

$\vec{s} \cdot \vec{s} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

16. EXPRESSÃO CARTESIANA DO PRODUTO ESCALAR

De extraordinária importância é a expressão cartesiana de $\vec{u} \,.\, \vec{v}$. Num sistema cartesiano ortogonal são conhecidos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por suas expressões cartesianas:

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

Dedução:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= x_1x_2\vec{i} \cdot \vec{i} + x_1y_2\vec{j} \cdot \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \cdot \vec{k} + \\
&+ x_2y_1\vec{i} \cdot \vec{j} + y_1y_2\vec{j} \cdot \vec{j} + y_1z_2\vec{j} \cdot \vec{k} + \\
&+ x_2z_1\vec{i} \cdot \vec{k} + y_2z_1\vec{j} \cdot \vec{k} + z_1z_2\vec{k} \cdot \vec{k}
\end{aligned}$$

No entanto:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = |\,\vec{i}\,|^2 = |\,\vec{j}\,|^2 = |\,\vec{k}\,|^2 = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Donde:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

que é a **expressão cartesiana** do produto escalar. Desta também se infere a condição de **ortogonalidade** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0}$$

e também o **módulo** de um vetor:

$$\boxed{|\,\vec{u}\,|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Geometricamente, o módulo é a medida da diagonal de um paralelepípedo reto.

Exemplo:

Dados $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ e $v = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, obter:

1. $\vec{u} . \vec{v}$

$\vec{u} . \vec{v} = 3(2) + 1(2) + 0(-2) = 8$

2. $|\vec{u}|$

$|\vec{u}|^2 = (3)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 10$

$|\vec{u}| = \sqrt{10}$

3. $|\vec{v}|$

$|\vec{v}|^2 = (2)^2 + (2)^2 + (-2)^2 = 12$

$|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$

4. O ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$\vec{u} . \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$

substituindo os valores acima obtidos:

$8 = \sqrt{(10)}(2\sqrt{3}) \cos \theta$ ou

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{30}} \quad \text{ou}$$

$$\theta = \text{arc cos} \frac{4}{\sqrt{30}}, \text{ ou seja } \theta \cong 43°$$

Exercícios

01. Calcular os módulos e o produto escalar dos vetores

$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{7}\vec{k}$

Resp.: $|\vec{u}| = 5; |\vec{v}| = 3;$

$\vec{u} . \vec{v} = -1$

02. Indicar quais vetores são unitários:

$\vec{u} = (1, 1, 1)$

$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\vec{w} = (0, 0, 1)$

Resp.: $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são unitários.

03. Determinar m, sabendo-se ortogonais os vetores

$\vec{u} = 3\vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$

Resp.: $m = \sqrt{2}$

04. Sendo $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$, achar:

a) a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

Resp.: 150°

b) a medida da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$.

Resp.: $\dfrac{-\sqrt{6}}{2}$ u.c.

01. Sabendo-se que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares e $\vec{u} = 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 3\vec{j}$, exprimir $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $\vec{w} = \dfrac{9}{7}\vec{u} + \dfrac{3}{7}\vec{v}$

02. Achar o ângulo θ entre os vetores $\vec{u} = (10, -5, 0)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

Resp.: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

03. Provar que ABC é triângulo retângulo, sendo $A = (3, -2, 8)$, $B = (0, 0, 2)$ e $C = (-3, -5, 10)$.

04. Demonstrar vetorialmente a fórmula da distância entre os pontos

$P = (x_1, y_1, z_1)$ e $P = (x_2, y_2, z_2)$

Resp.: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

SUGESTÃO

$(P_1 - P_2) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

então $d = |(P_2 - P_1)|$

05. Dados $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, calcular o vers $(2\vec{u} + \vec{v})$.

Resp.: $\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

06. Os vetores $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ formam um ângulo de 45°. Achar os valores de a.

Resp.: 1 e 7

07. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Calcular o vetor $\vec{v}$, conhecendo-se $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

Resp.: $\vec{v} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

08. São ortogonais os vetores $\vec{u} = (2, 4, 1)$ e $\vec{v} = (1, 0, -2)$?

Resp.: Sim

09. Dado o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B, determinar a medida da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{AC}$.

Dados A = (0, 0, 2), B = (3, −2, 8) e C = (−3, −5, 10)

Resp.: $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

10. Seja o triângulo de vértices A = (0, 0, 0), B = (1, –2, 1) e C = (1, 1, –2). Pede-se o ângulo interno ao vértice A.

Resp.: 120°

11. Achar o(s) vetor(es) $\vec{v} = (x, y, z)$ tais que:

1) $|\vec{v}| = \sqrt{6}$

2) $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} = (3, -3, 0)$;

3) $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w} = (0, 2, -1)$.

Resp.: $(\pm 1, \pm 1, \pm 2)$

12. Pede-se o vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ sabendo-se que:

1) $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v} = (-1, 1, 2)$

2) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 15$, onde $\vec{w} = (2, 1, 3)$.

Resp.: (–3, 3, 6)

13. Sendo $\vec{u} = (2a, a, 2a)$, determinar **a** para que $\vec{u}$ seja um versor.

Resp.: $a = \pm\frac{1}{3}$

14. Determinar **a** para que seja de 45° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, a, 0)$ e $\vec{j}$.

Resp.: $a = \pm 1$

15. Calcular o valor de **m** para que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{w} - \vec{u}$, onde $\vec{u} = (2, 1, m)$, $\vec{v} = (m + 2, -5, 2)$ e $\vec{w} = (2m, 8, m)$.

Resp.: –6 e 3

Lista 01 de exercícios para entrega

1. Dados os pontos A(-5, 3, -2) e B(-1, -5, 4), a = 5 e b = - 3, determine:

a) O vetor $\vec{v}$ cuja origem é A e extremidade B, em forma de tripla ordenada.

b) O módulo de $\vec{v}$

c) $a\vec{v}$

d) $b\vec{v}$

e) $-a\vec{v} + b\vec{v}$

2. Dados os vetores $\vec{u}$ (3,-7,2) e $\vec{v}$ (-2,2,6), calcule:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $-2\vec{u} + \vec{v}$

d) $|\vec{u}| + |\vec{v}|$

e) $|\vec{u} + \vec{v}|$

f) $|\vec{u} - \vec{v}|$

g) $|\vec{u}| - |\vec{v}|$

h) $|\vec{u}|\,|\vec{v}|$

i) $\vec{u} \circ \vec{v}$

3. Calcule a medida do lado BC do triângulo formado pelos vértices (A, B ,C) dados pelas extremidades dos vetores $\vec{O}$=0, $\vec{u}$ (3,-7,2), $\vec{v}$ (-2,2,6), nessa ordem.

4. Determine o vetor de módulo 5 unidades na direção do vetor $\vec{v}$ (4,-6,8), porém, em sentido contrário ao de $\vec{v}$.

5. Dados $\vec{u}$ (2, -6, 4), $\vec{v}$ (- 4, -2,6), determine:

a) $\vec{u} \circ \vec{v}$

b) $|\vec{u}|\,|\vec{v}|$

c) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$

d) Os parâmetros diretores de $\vec{u}$
(pesquisar)

6. Determine o valor de c para que os vetores $\vec{u}$ =(-1, c, 4) e $\vec{v}$ = (c, 3 , -2), sejam perpendiculares entre si:

7. Um campo elétrico uniforme induz uma força constante dada pelo vetor $\vec{f}$ =(10, 2, -5) em uma partícula carregada eletricamente. Calcule o trabalho realizado quando a partícula se move na trajetória AB, BC e CA, onde os pontos são A(1, 1, 3), B(2, 3, 2) e C(2, 2, 1) e o trabalho da força é dado pelo produto interno da força pelo vetor de deslocamento.

8. Duas pessoas A e B fazem a seguinte aposta: elas vão jogar duas moedas simultaneamente e, se o resultado for duas caras, A ganha dez cruzeiros, se for duas coroas, A ganha sete cruzeiros, e se for uma cara e uma coroa, B ganha 9 cruzeiros. Querereremos saber se esta aposta é justa, isto é, se A não tem mais probabilidade de ganhar do que B, ou vice-versa. Obs: A esperança de um evento é dada pelo produto interno do vetor probabilidade pela vetor X (nesse caso, X=aposta).