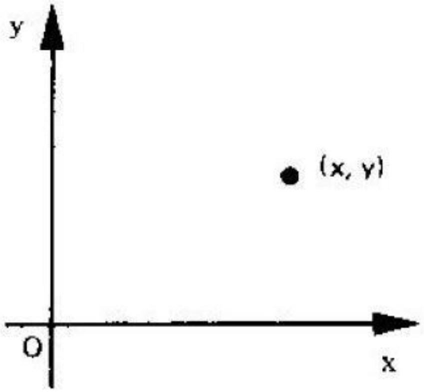
Espaços vetoriais

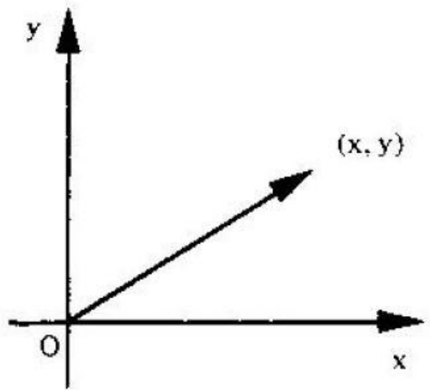
Álgebra Linear e Geometria Analítica – Prof. Aline Paliga

INTRODUÇÃO

Sabe-se que o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como o plano cartesiano.

O par ordenado (x,y) pode ser um ponto ou um vetor .





Esta ideia se estende ao espaço tridimensional que é a interpretação geométrica do conjunto $\mathbb{R}^3$. Embora se perca a visão geométrica, é possível estender essa ideia a espaços $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5 ... \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^4 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$\mathbb{R}^5 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$$

A maneira de trabalhar nesses espaços é idêntica àquela vista no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Por exemplo se:

$\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são vetores no $\mathbb{R}^n$

e α um escalar, define-se:

a)igualdade de vetores $\vec{u} = \vec{v} \rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$

b)adição de vetores $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

c)multiplicação de escalar $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

d)produto escalar $\vec{u}.\vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

e)módulo $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$ notação matricial

9.1 Espaço vetorial

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$$\forall u, v \in V \ , u + v \in V$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u \in V, \ \alpha \mathrm{u} \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado de espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:

A1) $u+(v+w)=(u+v)+w,\ \forall u,v,w\in V$

A2) $u+v=v+u,\ \forall u,v\in V$

A3) $\exists 0\in V, \forall u\in V, u+0=u$

A4) $\forall u\in V, \exists(-u)\in V, u+(-u)=0$

B) Em relação à multiplicação por escalar:

M1) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$

M2) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

M3) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

M4) $1(u)=u$

para $\forall u,v\in V\ e\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

OBSERVAÇÕES:

1)Os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, o fato de se chamar de vetores os *polinômios*, (quando V for constituído de polinômios), as *matrizes* (quando V for constituído de matrizes), os *números* (quando V for constituído for um conjunto numérico), e assim por diante. Podemos fazer isso, pois esses elementos de natureza tão distinta se comportam de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

$$P_n = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n ; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M(m, n)$$

2) Se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, V seria um *espaço vetorial complexo*.

9.2 Subespaço vetorial

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. O subconjunto S é um *subespaço vetorial* de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por um escalar definidas em V.

Para mostrar que um subconjunto S é um subespaço vetorial de V, deveríamos testar os 8 axiomas de espaço vetorial relativos à adição e multiplicação, mas como S é parte de V, não há necessidade.

Um subconjunto S então é um subespaço vetorial se estiverem satisfeitas as condições:

$I)\forall u, v \in S, u+v \in S$

$II)\forall u \in S \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u \in S$

Observação:

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaço: o conjunto {0}, chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial V, que são chamados de *subespaços triviais* de V. Os demais são chamados de *subespaços próprios* de V.

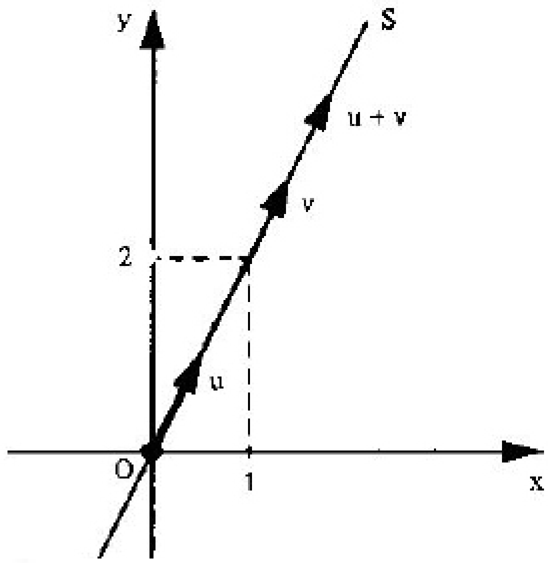
Por exemplo, os subespaços triviais do $V=\mathbb{R}^3$ são {0,0,0} e o próprio $\mathbb{R}^3$. Os subespaços próprios do $\mathbb{R}^3$ são retas e planos que passam pela origem.

Para o $V=\mathbb{R}^{2,}$ os subespaços triviais são {0,0} e $\mathbb{R}^2$. Os subespaços próprios do $\mathbb{R}^2$ são retas que passam pela origem.

Exemplos:

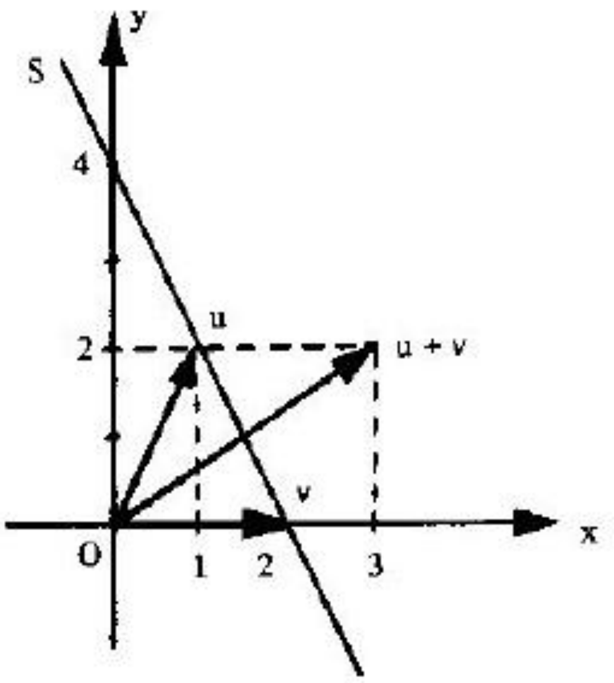
1) $V=\mathbb{R}^2$

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=2x\}$



2) $V=\mathbb{R}^2$

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=4-2x\}$



9.3 Combinação linear

Sejam os vetores v_1, v_2, ..., v_n do espaço vetorial V e os escalares a_1, a_2, ..., a_n. Qualquer vetor $v \in V$ da forma:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2,...,v_n.

Exemplo:

No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o vetor v=(-7,-15,22) é uma combinação linear dos vetores v_1=(2,-3,4) e v_2=(5,1,-2) porque:

$v = 4v_1 - 3v_2$ pois:

$$\begin{aligned}(-7,-15,22) &= 4(2,-3,4) - 3(5,1,-2) \\ &= (8,-12,16) + (-15,-3,6) \\ &= (-7,-15,22)\end{aligned}$$

9.4 Subespaço vetorial gerado

Sejam V um espaço vetorial e A={v_1, v_2, ..., v_n} $\subset$ V, A$\neq\phi$.

geradores

O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

$$\underbrace{\left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right]}_{\text{subespaço gerado}} = \underbrace{\left\{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n\right\}}_{\text{subespaço gerado}}$$

O subespaço S se diz gerado pelos vetores v_1, v_2, ..., v_n:
$S = \left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right]$
ou gerado pelo conjunto A: S=G(A)

Exemplos:

1) Os vetores $e_1=(1,0)$ e $e_2=(0,1)$ geram o espaço vetorial $V=\mathbb{R}^2$, pois qualquer par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de e_1 e e_2:

$$(x,y) = a_1e_1 + a_2e_2 = a_1(1,0) + a_2(0,1) = (a_1,0)+(0,a_2)$$

$$=(a_1,a_2)$$

$$(x,y) = xe_1 + ye_2$$

$$[e_1,e_2] = \mathbb{R}^2$$

2) Os vetores $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ e $e_3=(0,0,1)$ geram o espaço vetorial $V=\mathbb{R}^3$, pois qualquer vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de e_1, e_2 e e_3

$$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 =$$

$$=x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) =$$

$$=(x,y,z)$$

$$[e_1,e_2,e_3] = \mathbb{R}^3$$

De fato:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \quad e$$

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$$

são dois vetores quaisquer de S, pode-se escrever:

$$I) u + v = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \ldots + (a_n + b_n) v_n$$

$$II) \alpha u = (\alpha a_1) v_1 + (\alpha a_2) v_2 + \ldots + (\alpha a_n) v_n$$

isto é, $u+v \in S$ e $\alpha u \in S$ por serem combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, conclui-se que S é um subespaço vetorial de V.

Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são chamados de *geradores* de S e A de *conjunto gerador* de S.

Se o conjunto A é finito, podemos chamar S de subespaço *finitamente gerado*.

Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer que $G(A)=V$, caso em que A é o conjunto gerador de V.

9.5 Dependência e independência linear

Sejam V um espaço vetorial e A={v_1, v_2, ..., v_n} $\subset$ V, consideremos a equação:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0 \quad (1)$$

Sabemos que essa equação admite pelo menos uma solução:

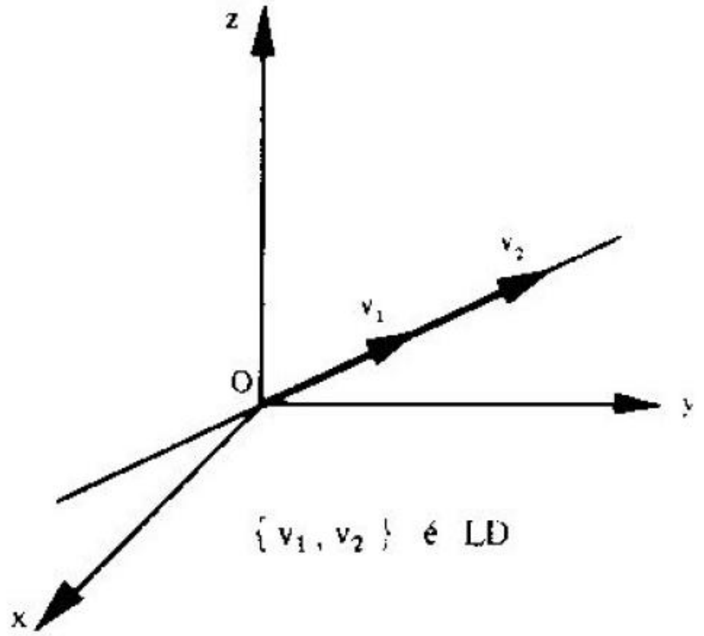
$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \ldots, a_n = 0$$

chamada solução trivial.

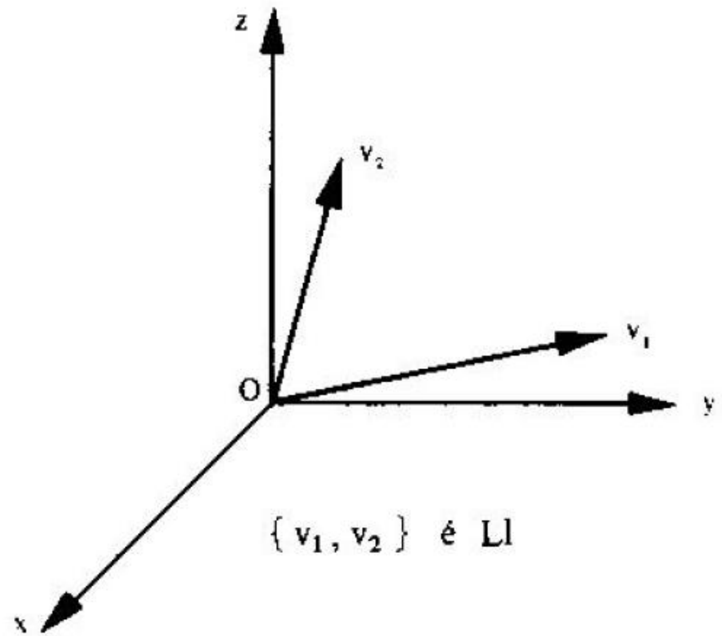
O conjunto A diz-se *linearmente independente* (LI), ou os vetores v_1, v_2, ..., v_n são LI , caso a equação (1) admita *apenas a solução trivial*.

Se existirem soluções $a_i \neq 0$, diz-se que o conjunto A é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores v_1,...,v_n são LD.

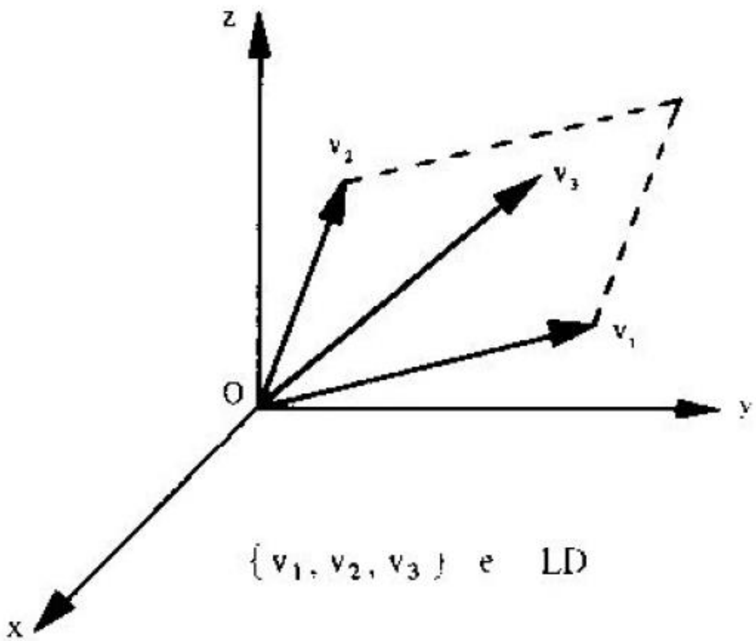
Representação geométrica da dependência linear de dois vetores:



(v_1 e v_2 estão representados na mesma reta que passa pela origem)

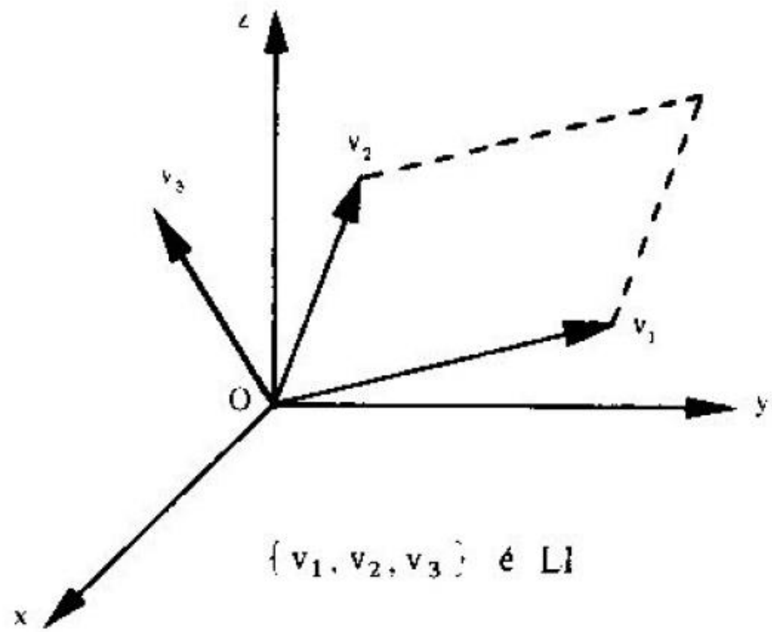


Representação geométrica da dependência linear de três vetores:



$\{v_1, v_2, v_3\}$ e LD

(v1, v2 e v3 estão representados no mesmo plano que passa pela origem)



$\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI

9.6 Base de um espaço vetorial

Um conjunto $B=\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

I) B é LI;

II) B gera V

Exemplos:

1) $B=\{(1,0), (0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$, denominada **base canônica**. De fato:

I) B é LI (exercício feito em aula)

II) B gera $\mathbb{R}^2$ (exemplo1, item 9.4)

2) $B=\{(1,2), (3,5)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$. De fato:

I) B é LI

$$a_1(1,2)+a_2(3,5)=(0,0)$$
$$(a_1,2a_1)+(3a_2,5a_2)=(0,0)$$
$$(a_1+3a_2,2a_1+5a_2)=(0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+3a_2=0 \\ 2a_1+5a_2=0 \end{cases}$$

sistema homogêneo que admite somente a solução trivial $a_1 = a_2 = 0$, o que confirma B ser LI.

II) B gera $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) = a_1(1,2) + a_2(3,5)$$
$$(x, y) = (a_1, 2a_1) + (3a_2, 5a_2)$$
$$(x, y) = (a_1 + 3a_2, 2a_1 + 5a_2)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 3a_2 = x \\ 2a_1 + 5a_2 = y \end{cases}$$

que resolvido em função de x e y, fornece:

$$a_1 = -5x + 3y \quad \text{e} \quad a_2 = 2x - y$$

isto é G(B)= $\mathbb{R}^2$

3) B={$e_{1=}$(1,0,0), e_2=(0,1,0) e e_3=(0,0,1) } é uma base do $\mathbb{R}^3$, denominada **base canônica**. De fato:

I) B é LI (exercício feito em aula)

II) B gera $\mathbb{R}^3$ (exemplo2, item 9.4)

4) B={v_1=(1,1,1), v_2=(1,1,0) e v_3=(1,0,0) } é uma base do $\mathbb{R}^3$. De fato:

I) B é LI

$$a_1(1,1,1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)=0$$

$$a_1(1,1,1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)=(0,0,0)$$

$$(a_1,a_1,a_1)+(a_2,a_2,0)+(a_3,0,0)=(0,0,0)$$

$$(a_1+a_2+a_3,a_1+a_2,a_1)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+a_2=0 \\ a_1=0 \end{cases}$$

sistema homogêneo que admite somente a solução trivial

$a_1=a_2=a_3=0$, o que confirma B ser LI.

II) B gera $\mathbb{R}^3$. De fato, qualquer vetor v=(x,y,z) é combinação linear de v_1 , v_2 e v_3.

$$(x,y,z)=a_1(1,1,1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=x \\ a_1+a_2=y \\ a_1=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=z \\ a_2=y-z \\ a_3=x-y \end{cases}$$

$$(x,y,z)=z(1,1,1)+\big(y-z\big)(1,1,0)+\big(x-y\big)(1,0,0)$$

o que comprova ser qualquer vetor v=(x,y,z) combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

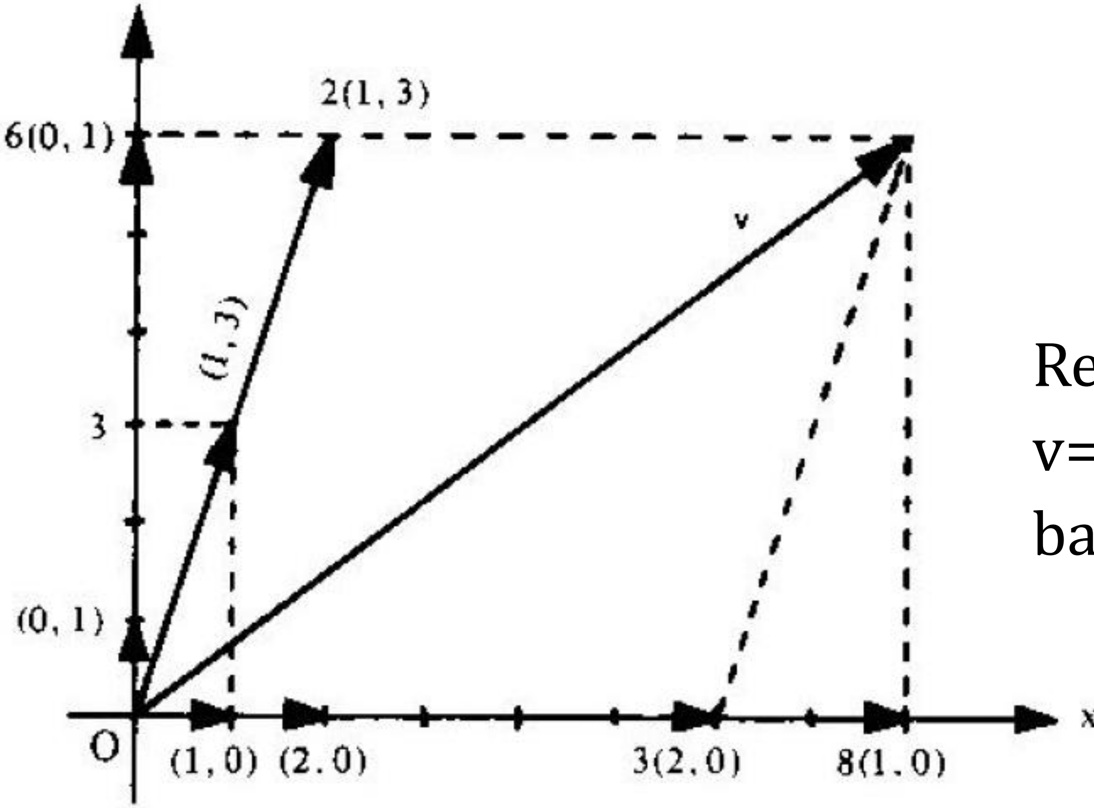
Logo: $[v_1, v_2, v_3]=\mathbb{R}^3$

Exemplo: No $\mathbb{R}^{2,}$ considere as bases:

$$A = \{(1,0),(0,1)\} \ e \ B = \{(2,0),(1,3)\}$$

$$(8,6) = 8(1,0) + 6(0,1)$$

$$(8,6) = 3(2,0) + 2(1,3)$$



Representação do vetor v=(8,6) em relação às bases A e B

9.7 DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Se V é um espaço vetorial e possui uma base com n vetores, V tem uma dimensão n. A dimensão de V indica por dim V=n

Exemplos:

1)dim $\mathbb{R}^2=2$

2)dim $\mathbb{R}^3=3$

3)dim $\mathbb{R}^n=n$

4)dim $M(2,2)=4$

5)dim $M(m,n)=mxn$

6)dim $P_n=n+1$