Espaços vetoriais

3
AULA

META

- Introduzir os conceito de espaço vetorial e de depenência (independência) linear.

OBJETIVOS

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar a definição de espaço vetorial;
- determinar se um subconjunto de um espaço vetorial é, ou não é, um subespaço;
- distinguir entre subconjuntos linearmente dependentes e linearmente independentes de um espaço vetorial;
- interpretar um sistema lineares em termos de combinação linear de vetores;
- determinar se um subespaço de um espaço vetorial é uma soma de dois subespaços dados;
- determinar se um subespaço de um espaço vetorial é uma soma direta de dois subespaços dados.

PRÉ-REQUISITOS

- Sistemas de equações lineares.
- Vetores no plano e no espaço.

3.1 Introdução

O *espaço vetorial* é um dos objetos mais importantes na Álgebra Linear. O próprio nome revela as raizes geométricas do conceito. Os *vetores no plano* formam um espaço vetorial. Na Álgebra Linear estamos interessados mais nos aspectos algébricos, do que nos geométricos. Portanto, os elementos de um espaço vetorial não serão necessariamente "grandezas caracterizadas por módulo, direção e sentido". Mais importantes saõ as operações algébricas com os vetores.

3.2 Espaço vetorial

3.2.1 Vetores no plano e no espaço

Duas operações com os vetores no plano (ou no epaço) são:

- adição de vetores;
- multiplicação de um vetor por um número real.

Uma descrição destas operações pode ser dada em termos geométricos. A adição, por exemplo, pode ser definida pela regra do paralelogramo. Na generalização do conceito de *espaço vetorial* são mantidas as duas operações (com as suas propriedades algébricas) e não um ou outro procedimento particular. Deste modo definimos um objeto matemático denominado *espaço vetorial* ou *espaço vetorial abstrato.* As propriedades algébricas das duas operaões com vetores, já conhecidas da Geometria, reconhecemos na definição a seguir.

3.2.2 Espaço vetorial

Definição 3.10. Seja $\mathbb{K}$ um corpo cujos elementos serão chamados de **escalares**. Um **espaço vetorial sobre** $\mathbb{K}$ é um conjunto $\mathcal{V}$, cujos elementos são chamados de **vetores**, onde temos definidas duas operações:

- **adição de vetores**: a cada par de vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ assocoiamos um vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ chamado de **soma** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
- **multiplicação de um vetor por um escalar**: a cada par α, $\mathbf{v}$ onde α é um escalar e $\mathbf{v}$ é um vetor, associamos um vetor $\alpha\mathbf{v}$ chamado de **múltiplo** de $\mathbf{v}$ por α).

Exigimos as seguintes propriedades das operações.

1. A adição é **associativa**, isto é,
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$
para qualquer terna de vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.
2. A adição é **comutativa**: quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$, vale
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$
3. Existe um vetor 0 em $\mathcal{V}$, chamado de **vetor nulo** tal que
$$\mathbf{v} + 0 = \mathbf{v}$$
para todo vetor $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$.
4. Para cada vetor $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$ existe um **elemento simétrico aditivo** $-\mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$ tal que
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = 0.$$

5. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo vetor $\mathbf{v}$.

6. $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$ para todo α, β de $\mathbb{K}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathcal{V}$.

7. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$, quaisquer que sejam α e β em $\mathbb{K}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$.

8. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ para todo α em $\mathbb{K}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$.

Tradicionalmente, o símbolo 0 do escalar nulo é usado também para denotar o vetor nulo. Isto pode causar dificuldades no início. Por causa disso, nessas aulas vamos usar, geralmente, o símbolo $0_{\mathcal{V}}$ para indicar o vetor nulo no espaço vetorial $\mathcal{V}$. Mas se isso não for feito (como nas duas proposições a seguir), temos que determinar do contexto o significado do símbolo 0. As demonstracões de duas proposições úteis servem como illustração do uso do símbolo "0".

Proposição 3.4. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ elementos de um espaço vetorial tais que $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Então, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Demonstração. A seta "$\Rightarrow$" substitui as palavras "somente se".

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w}) \\
&\quad \Rightarrow \mathbf{u} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})] = \mathbf{u} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})] \\
&\quad \Rightarrow \mathbf{u} + 0 = \mathbf{v} + 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.5. Sejam $\mathbf{v}$ um vetor e α um escalar. Então

(a) $0\mathbf{v} = 0$;

(b) $(-\alpha)\mathbf{v} = \alpha(-\mathbf{v}) = -\alpha\mathbf{v}$;

(c) $\alpha 0 = 0$.

Demonstração. (a) $0\mathbf{v}+0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0v = 0+0\mathbf{v}$. Então, pela Proposição 1.1, $0v = 0$.

(b) $\alpha v + (-\alpha)v = [\alpha + (-\alpha)]v = 0\mathbf{v} = 0 \Rightarrow (-\alpha)\mathbf{v} = -\alpha\mathbf{v}$;

$\alpha\mathbf{v} + \alpha(-\mathbf{v}) = \alpha[\mathbf{v} + (-\mathbf{v})] = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha(-\mathbf{v}) = -\alpha\mathbf{v}$;

(c) Seja $\mathbf{v}$ um vetor. Então

$$\alpha 0 = \alpha[\mathbf{v} + (-\mathbf{v})] = \alpha\mathbf{v} + \alpha(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v} + (-\alpha\mathbf{v}) = 0.$$

$\square$

A **diferença** de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de um espaço vetorial definimos por

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

Unicidade do vetor nulo

Proposição 3.6. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Então o vetor nulo em $\mathcal{V}$ é único.

Demonstração. Seja $0_{\mathcal{V}}$ o vetor nulo em $\mathcal{V}$ (ele existe por definição). Suponhamos que $0'_{\mathcal{V}}$ é um elemento de $\mathcal{V}$ tal que

$$\mathbf{v} + 0'_{\mathcal{V}} = \mathbf{v} \tag{3.39}$$

para todo $\mathbf{v}$ em $\mathcal{V}$. Pondo $v = 0_{\mathcal{V}}$ na eq. (3.39), obtemos

$$0_{\mathcal{V}} + 0'_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}. \tag{3.40}$$

Por outro lado, sendo $0_{\mathcal{V}}$ um elemento néutro, vale

$$0'_{\mathcal{V}} + 0_{\mathcal{V}} = 0'_{\mathcal{V}}. \tag{3.41}$$

Levando em conta a propriedade comutativa da adição de vetores, as equações (3.40) e (3.41) implicam $0_{\mathcal{V}} = 0'_{\mathcal{V}}$. Logo, o elemento néutro em $\mathcal{V}$ é único. $\square$

3.2.3 Exemplos de espaços vetoriais

Vetores no plano

Exemplo 3.16. O conjunto dos *vetores no plano*, definidos como classes de equipolência de segmentos orientados e com as regras usuais de adição de vetores e da multiplicação de vetores por números reais, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

O espaço $\mathbb{K}^n$

Dado um corpo $\mathbb{K}$, uma classe de espaços vetoriais pode é construida na base da seguinte definição.

Definição 3.11. Dado um n natural, o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbb{K}$ é o conjunto

$$\underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n}$$

com as seguintes operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares:

(i) a soma de dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{C}^n$ é dada por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n);$$

(ii) o múltiplo de um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ por um escalar α de $\mathbb{K}$ é dado por

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Exemplo 3.17. Pondo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ na Definição 3.11 obtemos os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2 \ldots$).

ATIV. 3.12. Mostre que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial.

Exemplo 3.18. Pondo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ na Definição 3.11 obtemos os espaços vetoriais $\mathbb{C}^n$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

Espaços de funções

Vários conjuntos de funções com valores reais, complexos, vetorias, etc., são, de um modo natural, espaçoes vetoriais. Apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 3.19. O conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os *polinômios* de uma variável real com coeficientes reais munido com as operações usuais de adição de polinômios e de multiplicação de polinômios por números reais é um espaço vetorial.

ATIV. 3.13. Mostre que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Exemplo 3.20. Consideremos o conjunto $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ de todos os polinômios de uma variável real com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n, onde n é um número natural fixo. Munido com as operações usuais de adição de polinômios e de multiplicação de polinômios por números reais este conjunto é um espaço vetorial.

ATIV. 3.14. Mostre que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Exemplo 3.21. O conjunto de todas as funções com valores reais definidas no intervalo $[0, 1]$ com as operações usuais de adição de funções e de multiplicação de funções por números reais é um espaço vetorial.

Estrutura linear

Dizemos que num conjunto $\mathcal{V}$ temos definida uma **estrutura linear** se, e somente se, $\mathcal{V}$ for um espaço vetorial. A expressão é util, em particular, quando temos definidas outras "estruturas" em $\mathcal{V}$, além da estrutura linear. Por exemplo, para os vetores no plano (ou no espaço) Euclideano temos definido módulo, ângulo entre dois vetores não-nulos, etc. Trata se, obviamente, de uma outra estrutura, "coexistente" com a estrutura linear. Ésta última, por seu lado, é determinada apenas pela existência de duas operaçôes (adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares) com as propriedades descritas na Definição 3.10.

3.2.4 Subespaço

Definição 3.12. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ é um **subespaço** de $\mathcal{V}$ se ele é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ em relação às operações de adição e multiplicação por escalares definidas em $\mathcal{V}$.

O seguinte teorema estabelece um criterio útil para determinar se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço.

Teorema 3.1. Um subconjunto $\mathcal{W}$ de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$ se as seguintes condições são satisfeitas.

(i) Pra todo par $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de elementos de $\mathcal{W}$ a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um elemento de $\mathcal{W}$.

(ii) Se $\mathbf{v}$ é um elemento de $\mathcal{W}$ e α um escalar, então $\alpha\mathbf{v}$ é um elemento de $\mathcal{W}$.

(iii) O vetor nulo do espaço $\mathcal{V}$ pertence ao conjunto $\mathcal{W}$.

Demonstração. (a) É fácil mostrar que $\mathcal{W}$ é um subespaço *somente se* as condições (i)-(iii) são satisfeitas. Com efeito, se $\mathcal{W}$ é um subespaço, ele é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{K}$) em relação das operações em $\mathcal{V}$, logo as propriedades (i)-(ii) são garantidas. Seja $\mathbf{w}$ um vetor qualquer de $\mathcal{W}$. Sendo $\mathcal{W}$ um subespaço de $\mathcal{V}$, o vetor $0\mathbf{w} = 0_{\mathcal{V}}$ está em $\mathcal{W}$.

(b) Suponhamos que $\mathcal{W}$ é um subconjunto de $\mathcal{V}$ com as propriedades (i)-(iii). As condições (i) e (ii) garantem que W e fechado em relação das operações em $\mathcal{V}$: aplicadas as operações a vetores de $\mathcal{W}$, os resultados são vetores de $\mathcal{W}$. Por serem as mesmas operações em $\mathcal{V}$, as operações em $\mathcal{W}$ têm as propriedades 1, 2, 5, 6, 7 e 8 da Definição 3.10. A propriedade 3 é garantida pelo item (iii) na hipótese do teorema. A propriedade 4 da Definição 3.10 também se verifica porque, para todo $\mathbf{v}$ em $\mathcal{W}$,

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$$

e, como $\mathcal{W}$ é um espaço vetorial, concluimos que $-\mathbf{v}$ está em $\mathcal{W}$.

$\square$

Apresentaremos alguns exemplos de subespaços.

Exemplo 3.22. Dado um espaço vetorial $\mathcal{V}$, o subconjunto de $\mathcal{V}$ contendo um único elemento, o vetor nulo $0_{\mathcal{V}}$, é um subespaço.

Exemplo 3.23. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Então $\mathcal{V}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Apresentaremos agora exemplos menos triviais de subespaços.

Exemplo 3.24. Uma matriz quadrada $n \times n$ A se diz **matriz diagonal** se

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j; \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

As matrizes diagonais $n \times n$ formam um subespaço vetorial no espaço das matrizes quadradas $n \times n$.

Exemplo 3.25. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de uma única variável real e com coeficientes reais. Seja n um inteiro não negativo. O subconjunto $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{P}$ cujos elementos são os polinômios de grau menor ou igual a n é um subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Um método de geração de subespaços é dado no teorema a seguir.

Teorema 3.2. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Então toda interseção de subespaços de $\mathcal{V}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subespaços de $\mathcal{V}$ e seja $\mathcal{W}$ a interseção de todos os subespaços da coleção $\mathcal{C}$. Todo subespaço de $\mathcal{V}$ contem o elemento nulo de $\mathcal{V}$, portanto o elemento nulo $0_{\mathcal{V}}$ está em $\mathcal{W}$. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores de $\mathcal{W}$ e α um escalar. Os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pertencem a todos os subespaços da coleção $\mathcal{C}$, portanto a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e o múltiplo $\alpha\mathbf{v}$ pertencem a todos os espaços da coleção e, conseqüentemente, pertencem ao espaço vetorial $\mathcal{W}$. Usando o Teorema 3.1 concluimos que $\mathcal{W}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$. $\square$

No entanto, a *união* de subespaços de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ não sempre é um subespaço!

3.2.5 Combinação linear

Definição 3.13. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um conjunto não-vazio de vetores de $\mathcal{V}$. Dizemos que um elemento $\mathbf{v}$ de $\mathcal{V}$ é representado por uma **combinação linear** de vetores de S se existirem um conjunto finito $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m$ de vetores de S e um conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{u}_m.$$

Teorema 3.3. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um conjunto não-vazio de vetores de $\mathcal{V}$. Então o conjunto $\mathcal{W}$ de todos vetores de $\mathcal{V}$ representadas por combinações lineares de vetores de S é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Demonstração. Sendo S não-vazio, existe pelo menos um elemento $\mathbf{x}$ de S. Sendo $0\mathbf{x}$ uma combinação linear de vetores de S, o vetor $0\mathbf{x} = 0_{\mathcal{V}}$ é um elemento de $\mathcal{W}$.
Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vetores $\mathcal{W}$ e α um elemento de $\mathbb{K}$. Então, existem dois subconjuntos de S, $\{\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m\}$ e $\{\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k\}$, bem como dois conjuntos de escalares, $\{\alpha_1 \dots \alpha_m\}$ e $\{\beta_1 \dots \beta_k\}$ tais que

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{u}_m, \qquad \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m\mathbf{v}_m.$$

Logo, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ é uma combinação linear de vetores se S,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{u}_m + \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m\mathbf{v}_m,$$

portanto, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está em $\mathcal{W}$. Outrossim, o múltiplo $\alpha\mathbf{x}$ é uma combinação linear de vetores de S,

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{u}_m) = (\alpha\alpha_1)\,\mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_m)\,\mathbf{u}_m,$$

portanto, está em $\mathcal{W}$. Usando o Teorema 3.1 concluimos que $\mathcal{W}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$. $\square$

Definição 3.14. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um conjunto não-vazio de vetores de $\mathcal{V}$. O conjunnto de todas as combinações lineares de S é chamado de **subespaço gerado por** S. Dizemos que o conjunto S **gera** o espaço $\mathcal{W}$.

Exemplo 3.26. Os conjunto $S = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ de vetores de $\mathbb{R}^3$ gera $\mathbb{R}^3$. Com efeito, um vetor (x,y,z) está no subespaço W gerado por S se, e somente se, existem três escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tais que

$$(x, y, z) = \alpha_1(0, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(1, 1, 0),$$

isto é,

$$\begin{cases} \quad\quad \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 \quad\quad + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 \quad\quad = z \end{cases} \tag{3.42}$$

Qualquer que sejam os valores das constantes x, y e z, o sistema linear (3.42) tem solução. Logo, todo vetor (x, y, z) de $\mathbb{R}$ é uma combinação linear dos vetores de S. Usando a definição Definição 3.14 concluimos que S gera $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.27. Uma matriz quadrada A de ordem n se diz **simétrica** se $[A]_{ij} = [A]_{ji}$ para todos $i, j = 1, \ldots n$. As matrizes simétricas $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$ formam um subespaço no espaço vetorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas de ordem n.
As matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

geram o subespaço das matrizes simétricas no espaço vetorial das matrizes quadradas 2×2.

3.3 Dependência linear e independência linear

3.3.1 Definições e exemplos

Definição 3.15. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto S de $\mathcal{V}$ é **linearmente dependente sobre** $\mathbb{K}$ se existir um subconjunto finito e não-vazio $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_m\}$ de S bem como escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ em $\mathbb{K}$ *não todos iguais a zero* tais que

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots \alpha_m \mathbf{u}_m = 0_{\mathcal{V}}.$$

Definição 3.16. Dizemos que um subconjunto S de um espaço vetorial $\mathbf{v}$ é **linearmente independente** quando ele não é linearmente dependente.

Exemplo 3.28. O conjunto $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ de vetores de $\mathbb{R}^2$, onde

$$\mathbf{x} = (1, 1), \qquad \mathbf{y} = (1, 2),$$

é linearmente independente. Com efeito, a equação

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} = 0_{\mathbb{R}^2}$$

é equuivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \alpha & +\beta & = 0 \\ \alpha & +2\beta & = 0 \end{cases}$$

cuja única solução é $\alpha = \beta = 0$. Logo, a única combinação linear dos vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ que representa o vetor $0_{\mathbb{R}^2}$ é a combinação linear com coeficientes nulos.

Combinação linear trivial. Uma combinção linear

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m$$

se diz **trivial** se *todos* os escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ são iguais a zero. Uma combinação linear trivial representa sempre o vetor nulo, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_m$. Segue das Definições 3.15 e 3.16 que um conjunto de vetores em $\mathcal{V}$ é linearmente independente se, e somente se, a única combinação linear dos vetores do conjunto representando o vetor nulo é a combinação linear trivial.

Exemplo 3.29. O conjunto de vetores $\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ em $\mathbb{R}^3$ é linearmente independente.

Exemplo 3.30. O conjunto dos polinômios p_1 e p_2, definidos por

$$p_1(x) = x^2 - x + 1, \qquad p_2(x) = 3x^2 - 2x$$

é linearmente independente.

Exemplo 3.31. O conjunto das matrizes 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é linearmente dependente.

3.3.2 Propriedades

Duas propriedades quase evidentes

Proposição 3.7. O subconjunto vazio é linearmente independente.

Demonstração. Com efeito, todo conjunto linearmente dependente não é vazio por definição. □

Proposição 3.8. Um conjunto de um único vetor não-nulo $\{\mathbf{x}\}$ é linearmente independente.

ATIV. 3.15. Mostre a Proposição 3.8.

Dependência (independência) linear e inclusão

Teorema 3.4. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e S_1, S_2 dois subconjuntos de $\mathcal{V}$ tais que S_1 é um subconjunto de S_2. Se S_1 é linearmente dependente, então S_2 também é linearmente dependente.

Demonstração. Sendo S_1 linearmente dependente, existe uma combinação linear não-trivial de vetores de S_1 que representa o vetor nulo. Mas todo vetor de S_1 está em S_2. Portanto, a mesma combinação linear e uma combinação linear nula não-trivial de vetores de S_2. Logo, pela Definição 3.15, o conjunto S_2 é linearmente dependente. $\square$

Teorema 3.5. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e S_1, S_2 dois subconjuntos de $\mathbf{v}$ tais que S_1 é um subconjunto de S_2. Então, se S_2 é linearmente independente, S_1 também é linearmente independente.

Demonstração. Suponhamos que uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ do conjunto S_1 representa o vetor nulo,

$$\alpha_1 \mathbf{u} + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m = 0_{\mathcal{V}}. \tag{3.43}$$

Sendo S_1 um subconjunto de S_2, a combinação linear na eq. (3.43) e de vetores do conjunto S_2. Mas S_2 é linearmente independente por hipótese, logo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Concluimos que as única combinações lineares de vetores do conjunto S_1 que representam o vetor nulo são as combinações lineares triviais. Logo, S_1 é linearmente independente. $\square$

3.3.3 Sistemas lineares

Uma interpretação interessante dos sistemas lineares pode ser dada em termos de dependência/independência linear.

Sistemas homogeneos

Consideremos o sistema linear homogêneo de m equações com n incognitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =0 \\ \dots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =0 \end{cases}. \tag{3.44}$$

Definimos n matrizes-coluna cujos elementos são as entradas das colunas correspondentes da matriz do sistema (3.44)

$$V_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad V_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

O sistema (3.44) é, então, equvalente a seguinte equação vetorial (lembramos que o conjunto das matrizes $m \times 1$ com entradas em $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$):

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \dots + x_nV_n = 0. \tag{3.46}$$

Logo, $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma solução para o sistema (1.13) se, e somente se, a combinação linear no primeiro membro da eq. (3.46) representa o vetor nulo em $\mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. A solução trivial $x_1 = \dots = x_n = 0$ sempre existe, pois uma combinação linear trivial sempre representa o vetor nulo. No entanto, soluções não-triviais do sistema (3.44) (isto é, soluções do sistema nos quais pelo menos um x_i é diferente de zero) existem se, e somente se, o conjunto $\{V_1, \dots V_n\}$ é linearmente dependente.

Sistemas não-homogêneos

Dado um sistema linear não-homogêneo

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right., \tag{3.47}$$

associaremos matrizes $m \times 1$ às colunas da matriz aumentada do sistema (3.47), pondo

$$V_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad V_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

O sistema linear (1.11) podemos escrever na forma

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_nV_n = B. \tag{3.49}$$

Então, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma solução para o sistema (**??**) se, e somente se, a combinação linear dos vetores $x_1V_1 + \ldots x_nV_n$ representa o vetor B.

3.4 Soma e soma direta de subespaços

3.4.1 Soma de subespaços de um espaço vetorial

Definição 3.17. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ subespaços de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. O subconjunto de $\mathcal{V}$ formado por todas as somas $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ em que $\mathbf{u}$ é um vetor de $\mathcal{U}$ e $\mathbf{w}$ é um vetor de $\mathcal{W}$ é chamado de **soma** dos subespaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ e é indicado por $\mathcal{U} + \mathcal{W}$.

Exemplo 3.32. Denotaremos por $\mathcal{U}$ o subespaço de $\mathbb{K}^4$ gerado pelo conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ onde

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,0,0), \qquad \mathbf{u}_2 = (0,1,0,0), \qquad \mathbf{u}_3 = (0,0,1,0).$$

Seja $\mathcal{W}$ o subespaço de $\mathbb{K}^4$ gerado pelo conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ onde

$$\mathbf{w}_1 = (1,0,2,1), \qquad \mathbf{w}_2 = (-1,0,1,0), \qquad \mathbf{w}_3 = (0,1,1,2).$$

A soma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ é o conjunto formado por todas as somas $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ tais que

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3, \qquad \mathbf{w} = \beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2 + \beta_3\mathbf{w}_3,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ são escalares. Logo, $\mathbf{v}$ é um vetor de $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ se, e somente se, ele admite uma representação da forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} =& \alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,1,0,0) + \alpha_3(0,0,1,0) \\
&+ \beta_1(1,0,2,1) + \beta_2(-1,0,1,0) + \beta_3(0,1,1,2) \\
=& (\alpha_1 + \beta_1 - \beta_2, \alpha_2 + \beta_3, \alpha_3 + 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + 2\beta_3),
\end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \beta_3$ são escalares.

3.4.2 Propriedades da soma de subespaços

A soma de subespaços é um subespaço

Esta é a propriedade mais importante da soma de subespaços.

Teorema 3.6. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ subespaços de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Então, $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Demonstração. Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vetores de $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ e α um escalar.

Sendo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ elementos de $\mathcal{U}+\mathcal{W}$, existem $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ em $\mathcal{U}$ e $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ em $\mathcal{W}$, tais que

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2.$$

Portanto,

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2).$$

Logo, a soma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está contida no conjunto $\mathcal{U}+\mathcal{W}$.

Outrossim,

$$\alpha\mathbf{v}_1 = \alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) = \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{w}_1.$$

Como $\mathbf{u}$ é um elemento de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ é um espaço vetorial, o vetor $\alpha\mathbf{u}$ está contido em $\mathcal{U}$. De modo análogo, $\alpha\mathbf{w}$ está em $\mathcal{W}$. Portanto, $\alpha\mathbf{v}_1$ está em $\mathcal{U}+\mathcal{V}$. Concluimos que $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ é um espaço vetorial. $\square$

A soma de subespaços é comutativa

Esta é uma das propriedades da soma de subespaços "herdadas" da soma de vetores.

Proposição 3.9. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ subespaços de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Então $\mathcal{U}+\mathcal{W} = \mathcal{W}+\mathcal{U}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{v}$ um elemento de $\mathcal{U}+\mathcal{W}$. Então, existem vetores $\mathbf{u}$ em $\mathcal{U}$ e $\mathbf{w}$ em $\mathcal{W}$, tais que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. A soma de vetores e comutativa, portanto $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. Concluimos que $\mathbf{v}$ está em $\mathcal{W}+\mathcal{U}$. Se, por outro lado, $\mathbf{v}$ for um vetor de $\mathcal{W}+\mathcal{U}$, podemos mostrar, de modo análogo, que $\mathbf{v}$ está em $\mathcal{U}+\mathcal{W}$. Logo, $\mathcal{U}+\mathcal{W} = \mathcal{W}+\mathcal{U}$. $\square$

Propriedade associativa da soma

Proposição 3.10. Sejam $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ e $\mathcal{U}_3$ subespaços de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Então

$$(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) + \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 + (\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3).$$

ATIV. 3.16. Mostre a Proposição 3.9.

3.4.3 Soma direta de subespaços

Antes de mais nada, uma soma direta de subespaços de um dado e espaço vetorial é uma soma destes subespaços. No entanto, em alguns casos a soma de subespaços tam uma propriedade importante, o que justifica a introdução de um termo novo, "soma direta".

Definição 3.18. Dizemos que um espaço vetorial $\mathcal{V}$ e uma **soma direta** dos seus subespaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ e escrevemos $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ se para cada vetor $\mathbf{v}$ de $\mathcal{V}$ existe um único par de elemetos $\mathbf{u}$ de $\mathcal{U}$ e $\mathbf{w}$ de $\mathcal{W}$ tal que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

Exemplo 3.33. Seja $\mathcal{U}$ o subespaço de $\mathbb{K}^3$ gerado pelo conjunto $\{(1, -1, 2), (0, 1, 0)\}$. Denotaremos por $\mathcal{W}$ o subespaço de $\mathbb{K}^3$ gerado pelo vetor $(1, 0, 0)$. Todo vetor (x, y, z) em $\mathbb{K}^3$ admite uma representação da forma

$$(x, y, z) = [\alpha(1, -1, 2) + \beta(0, 1, 0)] + \gamma(1, 0, 0). \tag{3.50}$$

Com efeito, a eq. (3.50) é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \alpha & & +\gamma & = x \\ -\alpha & +\beta & & = y \\ 2\alpha & & & = z \end{cases} \tag{3.51}$$

e este último tem uma solução,

$$\alpha = \frac{1}{2}z, \qquad \beta = x + y - \frac{1}{2}z, \qquad \gamma = x - \frac{1}{2}z. \tag{3.52}$$

Logo, para todo vetor (x, y, z) de $\mathbb{K}^3$ existe um elemento de $\mathcal{U}$,

$$\frac{1}{2}z(1,-1,2) + (y + \frac{1}{2}z)(0,1,0) = (\frac{1}{2}z, y, z) \tag{3.53}$$

e um elemento de $\mathcal{W}$,

$$\frac{1}{2}z(1,0,0) = (\frac{1}{2}z, 0, 0), \tag{3.54}$$

tais que (x, y, z) é a soma destes elementos. Logo, $\mathbb{K}^3$ é a soma dos subespaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$. Mas, como a solução (3.52) do sistema (3.51) é única, são únicos também (para um dado (x, y, z)) os elementos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dados pelas equações (3.53) e (3.54). Portanto, $\mathbb{K}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

Exemplo 3.34. Seja $\mathcal{U}$ o subespaço de $\mathbb{K}^3$ definido no exemplo anterior e seja $\mathcal{W}'$ o subespaço de $\mathbb{K}^3$ gerado pelo conjunto $\{$(1,0,0), (0,0,1)$\}$. O espaço vetorial $\mathbb{K}^3$ é uma soma de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}'$ (verifique!). No entanto, $\mathbb{K}^3$ não é uma soma direta de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}'$. Com efeito, as equações

$$\begin{aligned} &(x, y, z) = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \\ &\mathbf{u} = \alpha(1,-1,2) + \beta(0,1,0), \\ &\mathbf{w} = \gamma(1,0,0) + \delta(0,0,1) \end{aligned} \tag{3.55}$$

são equivalentes ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha & & +\gamma & & = x \\ -\alpha & +\beta & & & = y \\ 2\alpha & & & +\delta & = z \end{array} \right. \tag{3.56}$$

O sistema (3.56), no entanto tem mais de uma solução pois

$$\alpha = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t, \quad \beta = y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t, \quad \gamma = x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t, \quad \delta = t \tag{3.57}$$

é uma solução do sistema (3.56) qualquer que seja o valor de t em $\mathbb{K}$. Substituindo a solução (3.57) nas equações (3.55) obtemos que a soma dos vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t\right)(1,-1,2) + \left(y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t\right)(0,1,0)\\ &= (\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t, y, z - t),\\ \mathbf{w} &= \left(x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t\right)(1,0,0) + t\delta(0,0,1) = (x - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t, 0, t)\end{aligned}$$

é igual a $\mathbf{v} = (x, y, z)$, qualquer que seja t em $\mathbb{K}$. Logo, existem *várias* (mais de uma) somas de um vetor em $\mathcal{U}$ e um vetor em $\mathcal{W}$ representando o vetor $\mathbf{v}$. Portanto, $\mathbb{K}^3$ *não é* uma soma direta de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}'$.

Um critério para determinar se uma soma de subespáços é, ou não é, soma direta é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 3.7. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ subespaços de um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Então a soma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ é uma soma direta se, e somente se, a interseção $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ contem apenas o vetor nulo $0_{\mathcal{V}}$.

Demonstração. (a) Suponhamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0_{\mathcal{V}}\}$. Mostraremos que a soma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ é uma soma direta. Seja $\mathbf{v}$ um elemento de $\mathcal{U} + \mathcal{W}$. Logo, existem $\mathbf{u}$ em $\mathcal{U}$ e $\mathbf{w}$ em $\mathcal{W}$ tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}. \tag{3.58}$$

Devemos mostrar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são únicos. Sejam $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{w}'$ elementos de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$, correspndentemente, tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'. \tag{3.59}$$

Subtraindo eq. (3.58) da eq. (3.59) obtemos

$$\mathbf{u}' + \mathbf{w}' - \mathbf{u} - \mathbf{w} = 0_{\mathcal{V}},$$

donde

$$\mathbf{u}' - \mathbf{u} = \mathbf{w}' - \mathbf{w}.$$

Mas $\mathbf{u}' - \mathbf{u}$ é um elemento de $\mathcal{U}$ enquanto $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ é um elemento de $\mathcal{W}$. Sendo estes elemntos iguais, obtemos que $\mathbf{u}' - \mathbf{u} = \mathbf{w}' - \mathbf{w}$ está na interseção de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$. Por hipótese, $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ contem um único elemento, o vetor $0_{\mathcal{V}}$. Logo, $\mathbf{u}' - \mathbf{u} = \mathbf{w}' - \mathbf{w} = 0_{\mathcal{V}}$, donde $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$ e $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$. Os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são únicos, portanto a soma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ é uma soma direta. □

3.5 Conclusão

Conjuntos de natureza mais variada são, de um modo natural, espaços vetoriais. Este fato determina a importância da estrutura linear, caracterizada pela existência de duas operações (adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares) com as propriedades descritas na Definição 3.10.

3.6 Resumo

A definição do espaço vetorial sobre um corpo é dada em termos de duas operações: adição de elementos do espaço vetorial (chamados de vetores) e multiplicação de vetores por elementos do corpo (chamados de escalares). Essas operações possuem as propriedades algébricas das operações com vetores no plano (adição de vetores e multiplicação de vetores por números). Vimos que vários conjuntos e, em particular, vários conjuntos de funções, são, de um modo natural, espaços vetorias. Um *subespaço* de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um subconjunto de $\mathcal{V}$, fechado em relação às operações de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares. Definimos o conceito de *combinação linear*. Vimos que todos os subconjuntos de um espaço vetorial são divididas em duas classes: conjuntos linearmente dependentes e conjuntos linearmente independentes. Estabelecemos uma correspondência entre sistemas lineares de m equações e as equações vetoriais. Definimos *soma de subespaçoes* e *soma direta de subespaços* de um espaço vetorial. Apresentamos as propriedades da soma e da soma direta de subespaços.

3.7 Glossário

adição de vetores uma das operações algébricas descritas na Definição 3.10.

combinação linear Definição 3.13.

dependência linear Definição 3.16.

elemento simétrico aditivo de um vetor v um vetor indicado por $-\mathbf{v}$ tal que a soma de $\mathbf{v}$ com $-\mathbf{v}$ é igual ao vetor nulo.

espaço vetorial Definição 3.10.

independência linear Definição 3.15.

multiplicação de um vetor por um escalar uma das operações algébricas descritas na Definição 3.10.

soma de subespaços Definição 3.17.

soma direta de subespaços Definição 3.18.

subespaço de um espaço vetorial Definição 3.12.

subespaço gerado por um conjunto de vetores Definição 3.14.

3.8 Atividades

ATIV. 3.17. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ os subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos conjuntos $S_1 = \{\mathbf{u}_1 = (1,2,0,1), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1,0)\}$, e $S_2 = \{\mathbf{v}_1 = (0,1,0,0), \mathbf{v}_2 = (1,2,1,0)\}$, correspondentemente. Mostre que

(a) $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{R}^4$;

(b) $\mathbb{R}^4 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

ATIV. 3.18. Determine se o conjunto de vetores em $\mathbb{R}^3$

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$

é linearmente dependente ou linearmente independente.

(a) $\mathbf{u}_1 = (0,1,1)$, $\quad\mathbf{u}_2 = (1,0,1)$, $\quad\mathbf{u}_1 = (0,1,1)$;

(a) $\mathbf{u}_1 = (0,1,-1)$, $\quad\mathbf{u}_2 = (-1,0,1)$, $\quad\mathbf{u}_1 = (1,-1,0)$.

3.9 Próxima aula

Na próxima aula você vai conhecer os conceitos de base e dimensão de um espaço vetorial.

3.10 Referências

FRIEDBERG, Stephen H., INSEL, Arnold J., SPENCE, Lawrence E. Linear Algebra. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

LANG, Serge. Álgebra Linear. São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

SHOKRANIAN, Salahoddin. Introdução à Álgebra Linear. Brasília: UnB, 2004.