Exemplos - Subespaços Vetoriais

Exemplo 1: *O subconjunto* $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$*. Geometricamente,* S *é o eixo das abscissas.*

Vamos verificar que S satisfaz as condições (i), (ii), e (iii):

(i) O elemento neutro $e = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ está em S, pois sua segunda coordenada é nula;

(ii) Tome $u = (x_1, 0), v = (x_2, 0) \in S$, temos $u + v = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$. Assim, $u + v \in S$, pois sua segunda coordenada é nula;

(iii) tome $u = (x, 0) \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha u = \alpha(x, 0) = (\alpha x, \alpha 0) = (\alpha x, 0)$. Assim, $\alpha u \in S$, pois sua segunda coordenada é sempre nula.

Logo, S é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

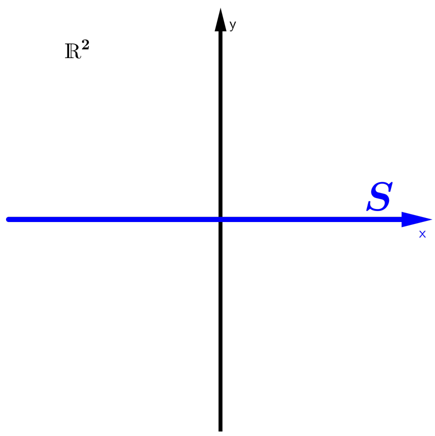

Figura 1: S é um subespaço vetorial do espaço $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2: $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u = \alpha(1, 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^2$*. Ou seja, qualquer reta passando pela origem é um subespaço de* $\mathbb{R}^2$*.*

Vamos verificar que valem as condições:

(i) O elemento neutro do $\mathbb{R}^2$ é a origem $(0, 0)$. Para $\alpha = 0$, $\alpha(1, 1) = 0(1, 1) = (0, 0)$, logo, o elemento neutro pertence a U;
(ii) Tome $u, v \in U$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Temos, $u + v = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, 1) = (\alpha_1 + \alpha_2)(1, 1)$. Assim, $u + v \in U$, uma vez que $\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{R}$;
(iii) Tome $u \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos $\beta u = \beta(\alpha(1, 1)) = \beta\alpha(1, 1)$. Assim, $\beta u \in U$, uma vez que $\beta\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3: *Qualquer reta que não passe pela origem NÃO é subespaço de* $\mathbb{R}^2$*.*

De fato, se a reta não passa pela origem, ela não contem o elemento neutro $(0, 0)$ do $\mathbb{R}^2$. Logo não pode ser subespaço vetorial.

A figura a seguir ilustra os exemplos 2 e 3:

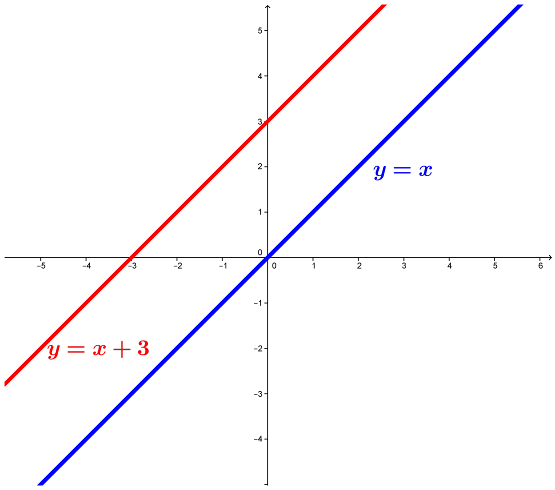

Figura 2: A reta $y = x$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, enquanto que a reta $y = x+3$ não é subespaço vetorial.

Exemplo 4: $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ *NÃO é um subespaço vetorial do* $\mathbb{R}^2$*. Geometricamente,* S *é o primeiro quadrante dos eixos coordenados.*

De fato, não vale a propriedade (iii) para U, pois basta tomar α um número negativo. Assim, as coordenadas de αu não serão positivas, para um $u \in U$.

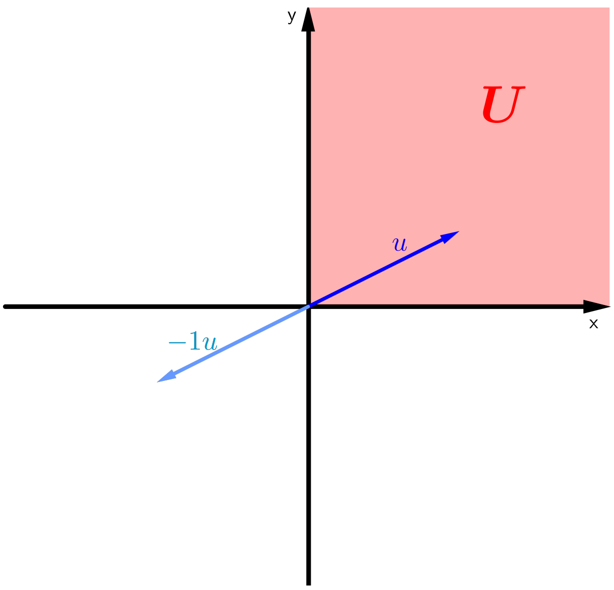

Figura 3: U não é subespaço do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5: *O conjunto* $U = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$*, o conjunto das matrizes simétricas, é um subespaço vetorial do espaço das matrizes* $n \times n$*.*

Vamos verificar que valem as propriedades de subespaço para U:

(i) A matriz nula é simétrica, logo o elemento neutro está em U;
(ii) Tome duas matrizes A e B de U, ou seja, $A^t = A$ e $B^t = B$. Temos $A + B = A^t + B^t = (A + B)^t$, por propriedade da matriz transposta. Assim, $A + B \in U$;
(iii) Tome $A \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos $\alpha A = \alpha A^t = (\alpha A)^t$, por propriedades da transposta. Assim, $\alpha A \in U$.

Logo, U é subespaço vetorial do espaço das matrizes $n \times n$.

Exemplo 6: *O conjunto* $W = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$*, o conjunto das matrizes antissimétricas, é um subespaço vetorial das matrizes* $n \times n$*.*

Vamos verificar que valem as propriedades de subespaço para W:

(i) A matriz nula é antissimétrica, logo o elemento neutro de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ está em W;
(ii) Tome duas matrizes $A, B \in W$, ou seja, $A^t = -A$ e $B^t = -B$. Temos: $(A+B)^t = A^t + B^t = -A + (-B) = -(A+B)$, por propriedade da matriz transposta. Assim, $A + B \in W$;
(iii) Tome $A \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos: $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -\alpha A$, por propriedades da matriz transposta.

Logo, W é um subespaço vetorial do espaço das matrizes $n \times n$.

Exemplo 7: *O conjunto das soluções do seguinte sistema linear homogêneo é um subespaço vetorial do* $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Vamos obter a solução do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases}$$

De onde obtemos $y = z$ e $x = z$, com $z \in \mathbb{R}$ livre.
Assim, podemos escrever o conjunto solução do sistema da seguinte forma:

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = \alpha(1, 1, 1), \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$$

Vamos verificar que valem as condições de subespaço para S:

(i) Tome $\alpha = 0$, assim, $\alpha(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \in S$, logo o elemento neutro do $\mathbb{R}^3$ está em S;
(ii) Tome $X_1, X_2 \in S$. Temos que $X_1 = \alpha_1(1, 1, 1)$ e $X_2 = \alpha_2(1, 1, 1)$. Assim, $X_1 + X_2 = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 1, 1) = (\alpha_1 + \alpha_2)(1, 1, 1)$, logo $X_1 + X_2 \in S$;
(iii) Tome $X \in S$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Temos: $\beta X = \beta(\alpha(1, 1, 1)) = \beta\alpha(1, 1, 1)$, logo $\beta X \in S$.

Assim, S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 8: *O conjunto* $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0_{\mathbb{R}^m}\}$*, conjunto de todas as soluções do sistema linear homogêneo* $AX = 0_{\mathbb{R}^m}$*, com* A *uma matriz* $m \times n$ *e* $0_{\mathbb{R}^m}$ *o elemento neutro do* $\mathbb{R}^m$*, é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$*.*

Vamos verificar que valem as propriedades de subespaço vetorial para S.

(i) O elemento neutro é a solução trivial do sistema homogêneo, que sempre será solução;
(ii) Tome X_1 e $X_2 \in S$, teremos $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$. Assim, $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$, onde foi utilizado a propriedade distributiva da multiplicação de matrizes. Portanto, $X_1 + X_2 \in S$;
(iii) Tome $X \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos que: $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha 0 = 0$, pois $AX = 0$ e α é número real. Assim, $\alpha X \in S$;

Logo, S, o conjunto de todas as soluções de um sistema linear homogêneo $AX = 0$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$, sendo a matriz A com dimensão $m \times n$.

Exemplo 9: *O conjunto de todas as soluções de um sistema linear $AX = B$, que não seja homogêneo, NÃO é um subespaço vetorial.*

Primeiramente o elemento neutro do $\mathbb{R}^m$ não está nesse conjunto, pois a solução toda nula só é solução para o sistema linear homogêneo.
Tome X_1, X_2 soluções, teremos $AX_1 = B$ e $AX_2 = B$, mas $A(X_1+X_2) = AX_1+AX_2 = B+B = 2B$, logo a Adição não é fechada. O mesmo vale para a multiplicação por escalar. Desse modo, esse conjunto não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 10: *O conjunto $S = \{f \mid f(x) = f(-x)\}$, o conjunto das funções pares, é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções.*

(i) A função neutra $f(x) = 0$ pertence a S, uma vez que vale sempre zero, logo tem o mesmo valor em x e $-x$;
(ii) Tome duas funções pares $f, g \in S$. Temos: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$, usando propriedades da soma de funções. Logo, $f + g \in S$;
(iii) Tome $f \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x)$, logo $\alpha f \in S$.

Assim, S é um subespaço vetorial do espaço vetorial real das funções.

Exemplo 11: *O conjunto $S = \{f \mid f(x) = -f(-x)\}$, conjunto das funções ímpares, é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais.*

Vamos verificar que valem as condições para S ser subespaço:

(i) A função neutra $f(x) = 0$ é ímpar, logo, pertence a S;
(ii) Tome duas funções f e g em S, ou seja, $f(x) = -f(-x)$ e $g(x) = -g(-x)$. Assim, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f(-x) + g(-x)) = -(f + g)(-x)$, portanto, $f + g \in S$;
(iii) Tome uma função $f \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha - f(-x) = -(\alpha f)(-x)$, portanto, $\alpha f \in S$.

Assim, mostramos que S é um subespaço vetorial do espaço vetorial real das funções reais.