Exemplos - Subespaço Gerado

Exemplo 1: *O conjunto* $S = \{(1,2)\} \in \mathbb{R}^2$ *gera o subespaço* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$.

De fato, tomando um elemento $u = (x,y) \in U$, temos que $y = 2x$, logo podemos escrever:

$$u = (x,y) = (x,2x) = x(1,2), \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}$$

Dessa forma, mostramos que qualquer elemento de U pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S, assim, S é um conjunto de geradores para U.

Geometricamente, o elemento de S é o vetor $u = (1,2)$ e o subespaço U é a reta $y = 2x$, e de fato, essa reta é gerada pelo vetor $u = (1,2)$.

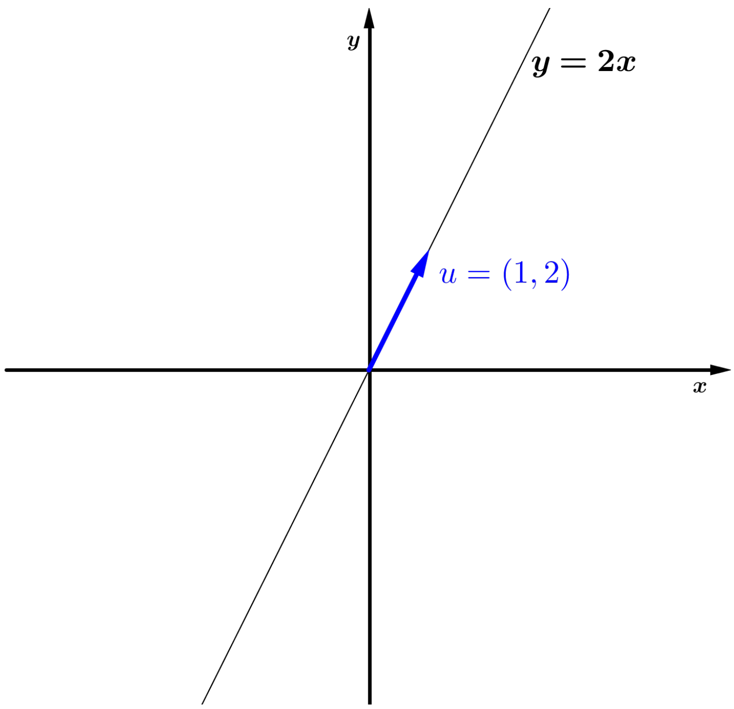

Figura 1: O vetor $(1,2)$ gera a reta $y = 2x$.

Exemplo 2: *O conjunto* $S = \{(1,0),(1,1)\}$ *gera o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$.

Para mostrar que S gera o $\mathbb{R}^2$, temos que mostrar que qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S. Tome $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$v = (a,b) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = a & \Longrightarrow \alpha_1 = a - b \\ \alpha_2 = b & \end{cases}$$

Assim, todo elemento $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(a-b)(1,0) + b(1,1)$. Logo, o conjunto S é um conjunto de geradores para o $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3: *O conjunto* $S = \{(1,2,1),(2,0,-1)\}$ *é um conjunto de geradores para o subespaço* $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$.

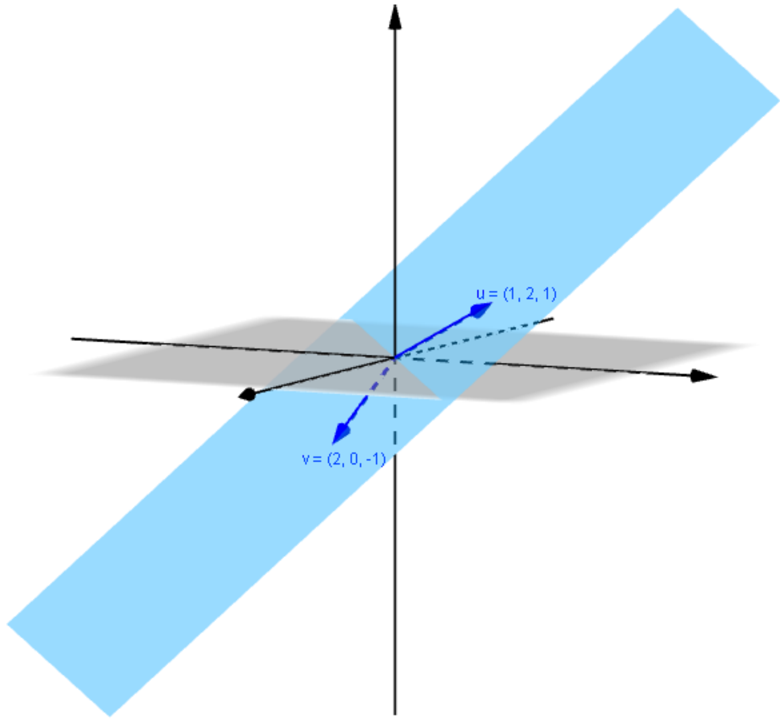

Figura 2: Os vetores $u = (1, 2, 1)$ e $v = (2, 0, -1)$ geram o plano $\pi : 2x - 3y + 4z - 0$.

Exemplo 4: *Determine um conjunto de geradores para o subespaço U do $\mathbb{R}^2$, dado:*

$$U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + t = 0 \quad e \quad -x + 3y + z - 2t = 0\right\}$$

Das condições para que um elemento de $\mathbb{R}^4$ pertença a U obtemos o sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + z + t = 0 \\ -x + 3y + z - 2t = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x - y + z + t = 0 \\ 2y + 2z - t = 0 \end{array}\right.$$

De onde temos: $y = \frac{t-2z}{2}$ e $x = \frac{-t-4z}{2}$, com $z, t \in \mathbb{R}$ livres.

Assim, podemos escrever qualquer elemento $u \in U$ da forma $u = (x, y, z, t) = \left(\frac{-t-4z}{2}, \frac{t-2z}{2}, z, t\right) = z\left(\frac{-4}{2}, -1, 1, 0\right) + t\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, com $z, t \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \left\{\left(\frac{-4}{2}, -1, 1, 0\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)\right\}$ é um conjunto de geradores para U.

Exemplo 5: *O subespaço $W = \left\{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\right\}$, das matrizes simétricas, é um subespaço gerado por:*

$$S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Primeiro, precisamos encontrar uma expressão para um elemento qualquer de W. Como as matrizes A que pertencem a W são simétricas, temos $A = A^t$, e como a transposição altera somente os elementos que não estão na diagonal principal, podemos escrever:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

Desse forma, tomamos A genérica e, de fato simétrica.

Vamos encontrar constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de modo que:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_3 = c \\ \alpha_2 = b \end{cases}$$

Assim, como as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ foram determinadas de maneira única, temos que $A \in W$ é combinação linear dos elementos de S. Logo, W é subespaço gerado por S.

Exemplo 6: *O espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 3, $P^3(\mathbb{R})$, é gerado pelo conjunto $S = \{1, x, x^2, x^3\}$.*

De fato, tomando um elemento qualquer de $P^3(\mathbb{R})$, ou seja, $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, vemos que:

$$p(x) = a1 + bx + cx^2 + dx^3$$

Ou seja, existem os escalares $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que qualquer elemento de $P^3(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear de $\{1, x, x^2, x^3\}$. Assim, S é um conjunto de geradores para $P^3(\mathbb{R})$.

Exemplo 7: *Qual o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado por $S = \{(2,1,0), (0,3,4)\}$?*

Vamos considerar um elemento qualquer $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, para que v pertença a $[S]$ é preciso que ele possa ser escrito como combinação linear dos elementos de S, ou seja:

$$v = (a, b, c) = \alpha_1(2,1,0) + \alpha_2(0,3,4) \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = a \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = b \\ 4\alpha_2 = c \end{cases}$$

Podemos isolar α_1 e α_2 de qualquer uma das equações, obtendo diferentes resultados. Por exemplo, podemos isolar α_1 da primeira equação: $\alpha_1 = \frac{a}{2}$ e isolar α_2 da última equação: $\alpha_2 = \frac{c}{4}$, também teremos uma condição sobre $b = \frac{a}{2} + \frac{c}{4}$, com $a, c \in \mathbb{R}$.

Assim, $v = (a, b, c) = \frac{a}{2}(2,1,0) + \frac{c}{4}(0,3,4)$. Logo, o conjunto S gera o subespaço dado por:

$$U = \left\{ v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) = \frac{a}{2}(2,1,0) + \frac{c}{4}(0,3,4), \text{ com } b = \frac{a}{2} + \frac{c}{4} \text{ e } a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 8: *Verifique se o elemento $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertence ao subespaço W de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, dado por:*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & a + 2b \\ 0 & a - b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Vamos encontrar um conjunto de geradores para W, temos que um elemento de W é da forma:

$$\begin{pmatrix} 2a & a + 2b \\ 0 & a - b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Assim, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ é um conjunto de geradores para W. Agora, para verificar se A pertence a W, basta verificar se A pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S, ou seja, verificar se exitem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = & 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = & -2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = & 1 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos um única solução $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = -1$. Logo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Assim, concluímos que A pode ser escrito como combinação linear dos elementos que geram W, logo $A \in W$.