Dependência linear e bases

Sadao Massago

2014

Sumário

Neste texto, introduziremos o que é uma base do plano ou do espaço.

1 Dependência linear

Dado uma sequencia de vetores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, a soma dos múltiplos $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ é denominado de combinação linear. O conjunto de vetores gerados pela combinação linear dos elementos de S será denotados por $[S]$.

Exemplo 1.1. O conjunto gerado por $\{(1,0),(1,1)\}$ é todo plano. De fato, queremos que todo vetor (x,y) é escrito na forma $(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$. Então temos $\begin{cases} x &= \alpha + \beta \\ y &= \beta \end{cases}$ de modo que basta escolher $\beta = y$ e $\alpha = x - \beta = x - y$.

Definição 1.2. Dado uma sequência de vetores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, é dito linearmente independente (abreviadamente l.i.), se $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$ implica em $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Isto é, se a combinação linear for nula, seus coeficientes devem ser nulos.

Como o vetor nulo pode ser obtido como a combinação linear com coeficientes nulos, ser l.i. significa que só tem uma forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores dados. Esta unicidade da representação como combinação linear pode ser generalizado como segue.

Proposição 1.3. *Um conjunto $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ é l.i., se, e somente se, a combinação linear é única, isto é, l.i. se, e somente se, $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n$ implica $\alpha_i = \beta_i$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que é l.i. Então $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n$ implica que $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + \cdots (\alpha_n - \beta_n)\vec{v}_n = \vec{0}$ e consequentemente, $\alpha_i - \beta_i = 0$ para todo i. Logo, $\alpha_i = \beta_i$.

($\Longleftarrow$) Seja $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$ então $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots \alpha_n\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_n$ implica $\alpha_i = 0$. □

Definição 1.4. O conjunto que não é linearmente independentes é dito linearmente dependentes (abreviadamente, l.d.).

Exemplo 1.5. $\{(1,2,1),(-1,1,2),(0,3,3)\}$ é l.d., pois $\alpha_1(1,2,1)+\alpha_2(-1,1,2)+\alpha_3(0,3,3) = (0,0,0)$ implica que $\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2 & =0\\ 2\alpha_1+\alpha_3+3\alpha_3 & =0\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 & =0\end{cases}$ na qual a matriz do sistema é $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ cuja determinante é nulo. Então o sistema tem infinitas soluções ou não tem solução. Como ele tem pelo menos uma solução que é a solução nula, terá infinitas soluções e tem solução não nula. Assim, ele será l.d. (nem todos α_i's são nulas).

Observando que no sistema acima, o número de variáveis é igual ao número de vetores dados e o número de equações é igual ao número de coordenadas, podemos concluir que

Proposição 1.6. *$\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ com n maior que o número de coordenadas do vetor é l.d.*

Por exemplo, $\{(1,1),(-1,2),(3,1)\}$ é l.d.

Proposição 1.7. *No caso de $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ com n igual ao número de coordenadas, é l.i. se, e somente se, determinante da matriz formado pelos vetores forem não nulas.*

Por exemplo, $\{(1,1),(-1,2)\}$ é l.i. por ter determinante igual a 3.

Teorema 1.8. *O conjunto $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ é l.d. se, e somente se, algum dos vetores é combinação linear dos restantes.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha $\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ de modo que $\alpha_i\neq 0$ para algum i. Então temos $\alpha_i\vec{v}_i=-\alpha_1\vec{v}_1-\cdots-\widehat{\alpha_i\vec{v}_i}-\cdots-\alpha_n\vec{v}_n$ onde $\widehat{\alpha_i\vec{v}_i}$ significa que é para omitir $\alpha_i\vec{v}_i$ nesta soma. Como $\alpha_i\neq 0$, podemos dividir por ele e obter $\vec{v}_i=-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\vec{v}_1-\cdots-\widehat{\frac{\alpha_i}{\alpha_i}\vec{v}_i}-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\vec{v}_n$ o que conclui que $\vec{v}_i$ é uma combinação linear dos restantes.

($\Longleftarrow$) Se $\vec{v}_i=\beta_1\vec{v}_1+\cdots+\widehat{\beta_i\vec{v}_i}+\cdots+\beta_n\vec{v}_n$, podemos escrever $\beta_1\vec{v}_1+\cdots+(-1)\vec{v}_i+\cdots+\beta_n\vec{v}_n=\vec{0}$ que é uma combinação linear na qual coeficiente de $\vec{v}_i$ não é nula. □

Corolário 1.9. *Dois vetores não nulos é l.d. se, e somente se, um for múltiplo do outro.*

Exercício 1.10. Mostre que $\{(1,2,-1),(2,1,3)\}$ é l.i.

Exercício 1.11. Mostre que $\{(2,4,-2),(3,6,-3)\}$ é l.d.

Exercício 1.12. Mostre que $\{\vec{0},\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ é l.d.

Quando o vetor esta escrito em coordenadas, a forma rápida de descobrir se é l.i. ou l.d. é através do escalonamento. Pelo Teorema 1.8, um conjunto de vetores é l.d. se tiver pelo algum vetor escrito como combinação linear dos restantes. Se montar uma matriz cuja linhas são vetores dados, isto significa que alguma linha é combinação linear das outras linhas. Assim, se efetuar escalonamento nestas matrizes, aparecerá a linha nula. Isto ajuda na determinação da dependência linear com vetores de mais de 3 coordenadas (que não será estudado na geometria analítica) ou determinar qual vetores "está sobrando" no conjunto para ser conjunto l.i.

Exercício 1.13. Através do processo de escalonamento, verifique que $\{(2,1,-1),(3,0,-1),(1,-1,0)\}$ é l.d.

Exemplo 1.14. Determine um subconjunto l.i. de $\{(2,1,-1),(3,2,1),(1,1,2),(-1,0,2)\}$ com maior número de vetores. Como tem mais vetores que número de coordenadas, é l.d., mas precisamos saber quais vetores estão "sobrando", ou seja, quem vai anular pelo escalonamento. Colocando os vetores nas linhas e montando a matriz, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Escalonando

A matriz do sistema é

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{3a.} \\ \text{4a.} \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 2L_2: & 6 & 4 & 2 & \\ 3L_1: & 6 & 3 & -3 & (-) \\ \hline & 0 & 1 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} 2L_3: & 2 & 2 & 4 & \\ L_1: & 2 & 1 & -1 & (-) \\ \hline & 0 & 1 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} 2L_4: & -2 & 0 & 4 & \\ L_1: & 2 & 1 & -1 & (+) \\ \hline & 0 & 1 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{3a.} \\ \text{4a.} \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{3a.} \\ \text{4a.} \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{array}{l} \text{1a.} \\ \text{2a.} \\ \text{4a.} \\ \text{3a.} \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A linha que anulou corresponde ao terceiro vetor. Logo, 3o. vetor que está sobrando. Então o gerador l.i. é $\{(2,1,-1),(3,2,1),(-1,0,2)\}$ que é o maior subconjunto l.i.

2 Bases e coordenadas

Um conjunto l.i. de vetores que gera todo plano ou espaço é chamado de base do plano ou do espaço.

Proposição 2.1. *Dois vetores l.i. gera o plano*

Demonstração. Considere os vetores$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Sejam $\vec{v}_1 = (a_1, b_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2)$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, queremos que $(x, y) = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \alpha(a_1, b_1) + \beta(a_2, b_2)$ para algum a, b. Isto significa que queremos que o sistema $\begin{cases} a_1\alpha + a_2\beta & = x \\ b_1\alpha + b_2\beta & = y \end{cases}$ tenha pelo menos uma solução. Como o conjunto é l.i., o matriz do sistema tem determinante não nula e consequentemente, tem uma única solução (logo, tem solução). $\square$

Teorema 2.2. *$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ no $\mathbb{R}^n$ for l.i., então é uma base.*

Demonstração. Considere o vetor $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Queremos que $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ para algum α_i. Isto significa que o sistema $[[v_1] \cdots [\vec{v}_n]] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [\vec{v}]$ tenha uma solução. Como o conjunto é l.i., o matriz do sistema que é matriz formado pelos vetores tem o determinante diferente de zero. Logo, tem pelo menos uma solução (logo, tem solução). □

Proposição 2.3. *Um único vetor não gera o plano.*

Demonstração. Seja dado um vetor $\vec{v} = (a, b)$ e $(x, y) = \lambda(a, b)$. Então $\begin{cases} x &= \lambda a \\ y &= \lambda b \end{cases}$ implica que $ay = bx$. Como existem pontos do plano que não satisfaz a equação $ay = bx$ que é equação da reta. Os pontos que são soluções da equação $ay = bx + 1$ não é gerado pelo vetor $\vec{v}$. Assim, um único vetor não deve gerar o plano todo □

Assim, a base do plano é composta exatamente de 2 vetores l.i. Isto acontece para n coordenadas.

Teorema 2.4. *Se um conjunto $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ gera $\mathbb{R}^m$, então qualquer conjunto com mais de n vetores é l.d.*

Demonstração. Considere $S' = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$ com $p > n$ e queremos mostrar que S' é l.d., isto é, se $\alpha_1\vec{w}_1 + \alpha_p\vec{w}_p = \vec{0}$ tendo algum α_i diferente de zero. Como S gera R^m, podemos escrever

$$\begin{cases} \vec{w}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vdots & \vdots \\ \vec{w}_p &= a_{1p}\vec{v}_1 + \cdots + a_{np}\vec{v}_n \end{cases}$$

Assim, $\alpha_1 (a_{11}\vec{v}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{v}_n) + \cdots + \alpha_p (a_{1p}\vec{v}_1 + \cdots + a_{np}\vec{v}_n) = \vec{0}$ de onde $(\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_p a_{1p})\vec{v}_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{n1} + \cdots + \alpha_p a_{np})\vec{v}_n = \vec{0}$. Para isso, basta que $\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_p a_{1p} &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \cdots + \alpha_p a_{np} &= 0 \end{cases}$ na qual tem pelo menos uma solução (solução nula). Como $p > n$, tem mais equações do que incógnitas e consequentemente tem infinitas soluções. Consequentemente, tem a solução não nula para α_i e portanto S' é l.d. □

Com isso, temos que

Corolário 2.5. *A base de $\mathbb{R}^n$ tem exatamente n vetores l.i.*

Em particular, a base de espaço é composta de exatamente três vetores l.i.

Em virtude da Proposição 1.3, os vetores é escrito unicamente como combinação linear dos elementos da base.

Definição 2.6. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, uma base. Se $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_n\vec{v}_n$ então $(\vec{v})_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)$ é denominado de coordenada do vetor $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$ e escrevemos $\vec{v} = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}}$.

O vetor em coordenadas também pode ser denotado como sendo matriz coluna. $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

ou $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$. Quando a base estiver evidente, podemos abreviar o $\mathcal{B}$ e escrever simplesmente como sendo $\vec{v} = (a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.7. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$. Escreva o vetor $(2,3)$ em coordenadas da base $\mathcal{B}$. Queremos que $(2,3) = a(1,1) + b(1,-1)$ então $\begin{cases} 2 & = a+b \\ 3 & = a-b \end{cases}$. Assim, $5 = 2a \implies a = \frac{5}{2}$. Daí, $b = 2 - a = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$. Portanto, $\vec{v} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$ e sua forma matricial é $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$.

3 Matriz mudança de base

Para calcular as coordenadas de um vetor, costumamos usar a matriz mudança de base.

Considere a base $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$, bases de $\mathbb{R}^n$. Então podemos escrever os vetores de $\mathcal{B}$ como sendo combinação linear dos elementos de $\mathcal{A}$.

$$\begin{cases} w_1 & = a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n \\ \vdots & \vdots \\ w_n & = a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n \end{cases}$$

Dado um vetor $\vec{v} = (b_1, \dots, b_n)_{\mathcal{B}}$, temos que $\vec{v} = b_1w_1 + \cdots + b_nw_n = b_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n) + \cdots + b_n(a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n)$. Fatorando em v_i's, temos que $\vec{v} = (b_1a_{11} + \cdots + b_na_{1n})v_1 + \cdots + (b_na_{n1} + \cdots + b_na_{nn})v_n$ e as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\mathcal{A}$ será $[\vec{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} b_1a_{11} + \cdots + b_na_{1n} \\ \vdots \\ b_na_{1n} + \cdots + b_na_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ onde $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [[\vec{w}_1]_{\mathcal{A}} \cdots [\vec{w}_n]_{\mathcal{A}}]$ é chamado de matriz mudança de base de base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$, pois a multiplicação deste matriz nas coordenadas escrito na base $\mathcal{B}$ fornece as coordenadas escrito na base $\mathcal{A}$. Note que existem autores que invertem esta nomenclatura, denominando $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ de matriz mudança de base de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, o que requer cuidados. No entanto, independente do nome dado, $[\vec{v}]_{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$.

Observação 3.1. A matriz mudança de base é inversível (exercício) e como $[\vec{v}]_{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ implica que $\left(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}[\vec{v}]_{\mathcal{A}} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ de modo que $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \left(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$. Também temos que, se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases, então $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

Caso particular da mudança de base quando uma das bases é base canônica tem interesse especial. Dado uma base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, então $M_\beta = [[\vec{v}_1]...[\vec{v}_n]]$ é a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para canônica, tendo a propriedade de $[v] = M_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$. Pela observação anterior, também temos que $[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{-1}[v]$, o que permite obter rapidamente as coordenadas do vetor na base dada. Também podemos obter a mudança de base $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ por $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{B}}^{-1}M_{\mathcal{A}}$.

Exemplo 3.2. Obtenha a matriz mudança de base de $\mathcal{A} = \{(1,1),(1,-1)\}$ para $\mathcal{B} = \{(-1,-1),(1,-1)\}$. Colocando os vetores da base nas colunas, temos que $M_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Como $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{B}}^{-1}M_{\mathcal{A}}$, calculemos o $M_{\mathcal{B}}^{-1}$. $M_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$

$\frac{1}{\det M_{\mathcal{B}}}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Logo, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{B}}^{-1}M_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Dado uma base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$,dizemos que ele é uma base ortonormal se $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ para $i \neq j$ (vetores da base são ortogonais entre si) e $||\vec{v}_i|| = 1$ (todos são versores). Uma base no plano é de orientação positiva se a rotação do primeiro vetor para o segundo for no sentido anti-horário (para esquerda) e no espaço, uma base é positiva quando satisfaz a regra da mão direita. Para $\mathbb{R}^n$, considera-se que a base canônica tem a orientação positiva e $\mathcal{B}$ é positiva se $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}} > 0$.

Apesar da fórmula da soma e do produto por escalar em coordenadas funcionar em qualquer base, a fórmula de cálculo das normas ($||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$) e do produto escalar ($||(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n)|| = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$) requer que as coordenadas estejam na base ortonormal e a fórmula do cálculo do produto vetorial como determinante requer que a base seja ortonormal positiva. Quando está escrito na base qualquer, podemos obter a coordenada na base canônica através da mudança de base e efetuar cálculos.

Exemplo 3.3. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ uma base. Obtenha $(1,2)_{\mathcal{B}} \cdot (2,1)_{\mathcal{B}}$. Temos que $(1,2)_{\mathcal{B}} = (1,1) + 2(1,-1) = (3,-1)$ e $(2,1)_{\mathcal{B}} = 2(1,1) + (1,-1) = (3,1)$. Logo, $(1,2)_{\mathcal{B}} \cdot (2,1)_{\mathcal{B}} = (3,-1) \cdot (3,1) = 9 - 1 = 8$.

Exercício 3.4. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,1,-1), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$ uma base. Obtenha $(1,2,1)_{\mathcal{B}} \times (0,2,1)_{\mathcal{B}}$ escrito como coordenadas na base $\mathcal{B}$.

Referências

[1] Boldrini, José L. et al., "Álgebra Linear", Editora Harbra Ldta, 1986.

[2] Santos, Reginaldo J., "Matrizes, Vetores e Geometria Analítica", Imprensa Universitária da UFMG, 2010.

[3] Boulos, Paulo e Camargo, Ivan de, "Geometria Analítica, um tratamento vetorial", McGraw-Hill, 1987.

[4] Baldin, Yuriko Y. e Furuya, Yolanda, “Geometria Analítica para Todos e Atividades com Octave e GeoGebra”, EdUFSCar, 2011.