NOTA DE AULA: COMBINAÇÃO LINEAR

Rebello - 2015

Vimos na definição de subespaço vetorial, que este, é munido de duas operações fundamentais:

Adição de vetores $\{ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \}$;

Multiplicação de escalar por vetor $\{ a\,\vec{v} \}$.

Pela associação dessas duas ferramentas, podemos criar outros vetores dentro do mesmo subespaço.

Ex.: Sejam os vetores $\vec{v}_1 = [\,-1\,, 3\,]\ \ e\ \ \vec{v}_2 = [\,5\,, 2\,]$

Podemos associa-los para construir $\vec{w}$:

$$\vec{w} = 2\,\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{w} = [\,-7\,,\ 4\,]$$

A essa associação chamamos de Combinação Linear.

Formalizando o exposto acima:

Seja V o espaço vetorial formado por $\vec{v}_1\,,\ \vec{v}_2\,,\ \vec{v}_3\,,\ \cdots\,,\ \vec{v}_n$ e os números reais $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \cdots\,,\ a_n$.

Combinação linear é o nome dado à expressão:

$$\vec{v} = a_1\,\vec{v}_1 + \ a_2\,\vec{v}_2 + \ a_3\,\vec{v}_3 + \cdots + \ a_n\,\vec{v}_n$$

Isso nos dá garantia que $\vec{v}$ pertence a V $\{ \vec{v} \in V \}$.

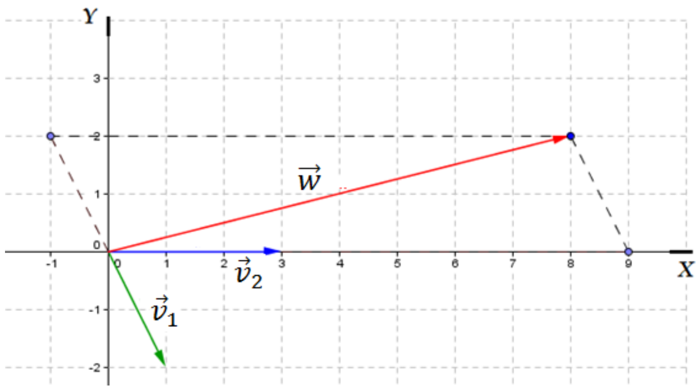
Assim, podemos criar subespaços de V usando este conceito.

Exemplos:

a) Dados os vetores $\vec{v}_1 = [\,1\,,-2\,]$ e $\vec{v}_2 = [\,3\,,\ 0\,]$, determine o vetor $\vec{w}$ composto pela combinação linear $\vec{w} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$

$$\vec{w} = -[\,1\,,-2\,] + 3\,[\,3\,,\ 0\,] \quad = \quad [\ 8\,,\ 2\ ]$$

Veja a representação gráfica:



b) Dados os vetores $\vec{v}_1 = [\,1\,,-2\,,0]$ e $\vec{v}_2 = [\,3\,,\ 1\,,-1\,]$, determine a combinação linear destes para formar o vetor $\vec{w} = [\,5\,,\ 4\,,-2\,]$.

Considerando $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{w}$

$$a_1[\,1\,,-2\,,0] + a_2[\,3\,,\ 1\,,-1\,] = [\,5\,,\ 4\,,-2\,]$$

Gerando o sistema: $\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 5 \\ -2\,a_1 + a_2 = 4 \\ -\,a_2 = -2 \end{cases}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix}$

Então: $a_2 = 2$

$$-2\,a_1 + (2) = 4 \quad \rightarrow \quad a_1 = -1$$

$$(-1) + 3(2) = 5 \ \rightarrow \quad \text{Ok}$$

Portanto, temos a combinação linear : $\vec{w} = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

Obs.: Note que neste exemplo, temos 3 equações e somente 2 incógnitas, portanto, a solução deve satisfazer necessariamente todas as equações.

c) Escreva o vetor $\vec{w} = [\,7, 1, 0\,]$ como combinação linear dos vetores:

$\vec{v}_1 = [\,1, 0, 3\,]\,, \vec{v}_2 = [\,0, 2, 0\,]$ e $\vec{v}_3 = [\,2, 1, -1\,]$

$$a_1\,\vec{v}_1 + a_2\,\vec{v}_2 \;+\; a_3\,\vec{v}_3 \;=\; \vec{w}$$

$$a_1\,[\,1, 0, 3\,] + a_2[\,0, 2, 0\,] \;+\; a_3[\,2, 1, -1\,] \;=\; [\,7, 1, 0\,]$$

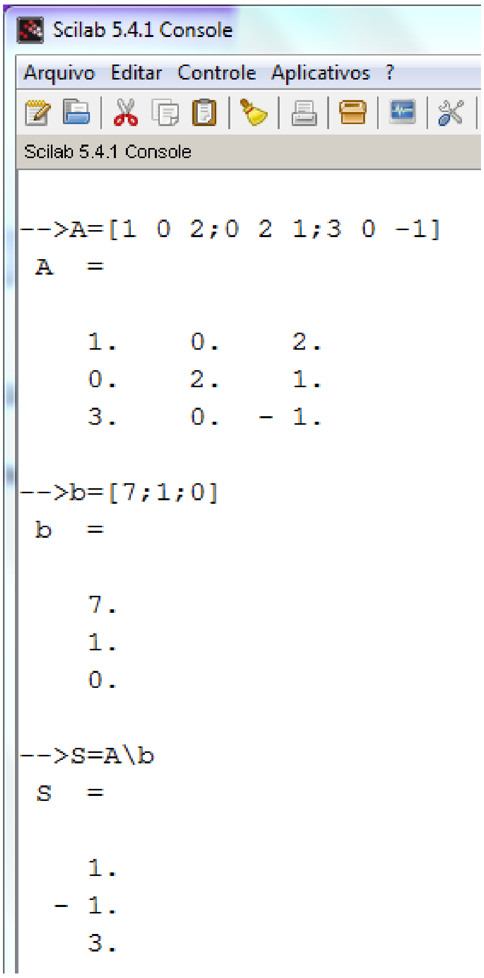
$$[\,a_1 + 2a_3\;,\;\; 2a_2 + a_3\;,\; 3a_1 \;-\; a_3\,] = \;[\,7, 1, 0\,]$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 7 \\ 2a_2 + a_3 = 1 \\ 3a_1 \;-\; a_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solução no software Scilab (gratuito)

$a_1 = 1 \qquad a_2 = -1 \qquad a_3 = 3$

Portanto: $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$



Obs.: Para o cálculo de S ao lado (Scilab)

Poderia ser usado

S = inv(A)*b

Ou seja: inversa de A vezes b