Exemplos - Mudança de Base

Exemplo 1: *Considere as bases* $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1),(0,1)\}$ *para* $\mathbb{R}^2$. *Vamos encontrar a matriz de mudança da base* B *para a base* C.

Vamos escrever os elementos da base C como combinação linear dos elementos da base B. Temos que:

$$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \qquad \text{e} \qquad (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$$

Assim, a matriz de mudança da base B para a base C é dada por:

$$[M]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: *Considere as bases* $B = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $C = \{(1,1),(0,1)\}$ *para* $\mathbb{R}^2$. *Vamos encontrar a matriz de mudança da base* C *para a base* B.

Vamos escrever os elementos da base B como combinação linear dos elementos da base C, isto é:

$$(1,0) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{array} \right.$$

e

$$(0,1) = \beta_1(1,1) + \beta_2(0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta_1 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \end{array} \right.$$

Assim, temos que a matriz de mudança da base C para a base B é:

$$[M]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: *Considere a matriz de mudança da base* C *para a base* B *de* $\mathbb{R}^3$:

$$[M]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se o elemento $v \in \mathbb{R}^3$ *tem matriz de coordenadas com relação a base* B *dada por:*

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz de coordenadas de v *com relação a base* C.

Temos que:

$$[v]_C = [M]_C^B [v]_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [v]_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [v]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

que é a matriz de coordenadas de v com relação a base C.

Exemplo 4: *Considere as bases ordenadas* $B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ *e* $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *para* $\mathbb{R}^3$. *O elemento* $v = (6,3,9) \in \mathbb{R}^3$ *tem a seguinte matriz de coordenadas com relação a base* C*:*

$$[v]_C = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Determine as coordenadas de v *com relação a base* B.

Vamos primeiro determinar a matriz de mudança da base B para a base C, escrevendo os elementos da base C como combinação linear dos elementos da base B:

$$(1,0,0) = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(-1,1,0) + a_{31}(1,0,-1)$$

$$(0,1,0) = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(-1,1,0) + a_{32}(1,0,-1)$$

$$(0,0,1) = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(-1,1,0) + a_{33}(1,0,-1)$$

Obtemos três sistemas lineares, que resolvendo obtemos:

$$[M]_B^C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

que é a matriz de mudança da base B para a base C. Assim, temos:

$$[v]_B = [M]_B^C [v]_C \Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

que é a matriz de coordenadas de v com relação a base B.

Exemplo 5: *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$. *A matriz de mudança da base* $B = \{(-1,1), (1,1)\}$ *para a base* $C = \{(-3,-1), (-1,3)\}$ *é dada por:*

$$[M]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar a matriz de mudança da base B para a base C escrevemos cada elemento da base C como combinação linear dos elementos da base B:

$$(-3,-1) = a_{11}(-1,1) + a_{21}(1,1) \Rightarrow \begin{cases} -a_{11} + a_{21} = -3 \\ a_{11} + a_{21} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -2 \end{cases}$$

$$(-1,3) = a_{12}(-1,1) + a_{22}(1,1) \Rightarrow \begin{cases} -a_{12} + a_{22} = -1 \\ a_{12} + a_{22} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 2 \\ a_{22} = 1 \end{cases}$$

Assim, obtemos dois sistemas lineares cujas soluções são as coordenadas dos elementos de C com relação a base B, escrevendo essas coordenadas como colunas de uma matriz, temos:

$$[M]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

que é a matriz de mudança da base B para a base C.

Exemplo 6: *Considere as bases $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $C = \{w_1, w_2, w_3\}$, relacionadas da seguinte forma:*

$$\begin{cases} w_1 = u_1 + u_3 \\ w_2 = u_1 - u_2 \\ w_3 = u_2 - u_3 \end{cases}$$

Determine a matriz de mudança da base B para a base C.

A relação entre as bases nos dá as coordenadas de cada elemento da base C escritos como combinação linear dos elementos da base B. Dessa forma, basta tomar as coordenadas de cada elemento w_i como a i-ésima coluna da matriz, obtendo:

$$[M]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A inversa dessa matriz é a matriz de mudança da base C para a base B.

Exemplo 7: *Considere as bases $B = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ e $C = \{u_1, u_2\}$. A matriz de mudança da base B para a base C é dada por:*

$$[M]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine a base C.

Como $[M]_B^C$ é a matriz de mudança da base B para a base C, suas colunas são as coordenadas dos elementos de C como combinação linear dos elementos da base B, ou seja, a i-ésima coluna de $[M]_B^C$ são as coordenadas do elemento u_i da base C com relação a base B:

$$u_1 = 1(-1, 1) + 3(1, 1) = (2, 4)$$

$$u_2 = 2(-1, 1) - 2(1, 1) = (-4, 0)$$

Assim, temos que $C = \{(2, 4), (-4, 0)\}$.

Exemplo 8: *Considere as bases $B = \{(1, 1), (2, 0)\}$ e $C = \{u_1, u_2\}$. A matriz de mudança da base C para a base B é dada por:*

$$[M]_C^B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine a base C.

Neste caso, conhecemos a matriz de mudança da base C para a base B, cuja i-ésima coluna são as coordenadas do elemento u_i da base B com relação a base C, ou seja, escrevendo cada elemento da base B como combinação linear dos elementos da base C obtemos:

$$(1, 1) = -1u_1 + 1u_2$$

$$(2,0) = 1u_1 - 2u_2$$

Chamando $u_1 = (a_1, b_1)$ e $u_2 = (a_2, b_2)$ obtemos os seguintes sistemas lineares:

$$(1,1) = -(a_1,b_1) + (a_2,b_2) \Rightarrow \begin{cases} -a_1 + a_2 = 1 \\ -b_1 + b_2 = 1 \end{cases}$$

$$(2,0) = (a_1,b_1) - 2(a_2,b_2) \Rightarrow \begin{cases} a_1 - 2a_2 = 2 \\ b_1 - 2b_2 = 0 \end{cases}$$

Obtemos dois sistemas lineares com duas equações e duas variáveis cada, um deles nas variáveis a_1 e a_2 e o outro nas variáveis b_1 e b_2, que resolvendo temos:

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 - 2a_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a_1 + a_2 = 1 \\ -a_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b_1 + b_2 = 1 \\ b_1 - 2b_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -b_1 + b_2 = 1 \\ -b_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_1 = -2 \\ b_2 = -1 \end{cases}$$

Assim, temos: $C = \{(-4,-2), (-3,-1)\}$.

Exemplo 9: *Determine a matriz de mudança da base $B = \{2, x\}$ para a base $C = \{1, 1+x\}$ de $P_1(\mathbb{R})$.*

Para determinar a matriz de mudança da base B para a base C, escrevemos cada elemento da base C como combinação linear dos elementos da base B:

$$1 = a_{11}2 + a_{21}x \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{2} \\ a_{21} = 0 \end{cases}$$

$$1 + x = a_{12}2 + a_{22}x \Rightarrow \begin{cases} 2a_{12} = 1 \\ a_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = \frac{1}{2} \\ a_{22} = 1 \end{cases}$$

Logo, a matriz de mudança da base B para a base C é dada por:

$$[M]_B^C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 10: *A matriz de mudança da base C para uma base B do $\mathbb{R}^2$ é dada por:*

$$[M]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Se um elemento $v \in \mathbb{R}^2$ tem matriz de coordenadas com relação a base C dada por: $[v]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ determine as coordenadas de v com relação a base B.

Temos a relação:

$$[v]_C = [M]_C^B [v]_B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Assim, temos a matriz de coordenadas do vetor v com relação a base B:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

.