AUTOVALORES E AUTOVETORES

Definição

Seja $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$, é dito **autovetor**, vetor próprio ou vetor característico do operador *T*, se existir $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que $T(v) = \lambda \cdot v$.

O escalar λ é denominado **autovalor**, valor próprio ou valor característico do operador linear *T* associado ao autovetor *v*.

Exemplos:

1) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$(x, y) \mapsto (3x, 8x - y)$

$(1,2)$ é autovetor de *T* associado ao autovalor $\lambda = 3$, pois $T(1,2) = (3,6) = 3 \cdot (1,2)$.

2) $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

$(1,1,2)$ é autovetor de *T* associado ao autovalor $\lambda = 4$, pois $T(1,1,2) = (4,4,8) = 4 \cdot (1,1,2)$ e $(1,-1,1)$ é autovetor de *T* associado ao autovalor $\lambda = 1$, pois $T(1,-1,1) = (1,-1,1) = 1 \cdot (1,-1,1)$.

Seja *v* é um autovetor do operador linear *T* associado ao autovalor λ então $kv \in V$ também é um autovetor de *T* associado ao autovalor λ, para todo $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$.

Exemplo: Seja o operador linear $T(x, y) = (3x, 8x - y)$.

O vetor $v = (1,2)$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Como $T(2 \cdot (1,2)) = T(2,4) = (6,12) = 3 \cdot (2,4)$, o vetor $(2,4)$ é também autovetor de *T* associado a $\lambda = 3$.

Seja λ é um autovalor do operador linear *T*. O conjunto $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ de todos os autovetores associados a λ juntamente com o vetor nulo $\mathbf{0}_V$, é denominado **autoespaço** correspondente ao autovalor λ.

Exemplo: Considere o operador $T(x, y) = (3x, 8x - y)$.

O autoespaço $V_3 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid T(x, y) = 3(x, y)\right\} = \left\{(x, 2x), x \in \mathbf{R}\right\}$ corresponde ao autovalor $\lambda = 3$.

Cálculo de Autovalores, Autovetores e Autoespaços

Seja o operador linear $T:V \to V$ tal que $\dim V = n$.

Por definição, $T(v) = \lambda \cdot v$, com $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$.

Considere o operador identidade $I_V : V \to V$ tal que $I_V(v) = v$.

Assim, $T(v) = \lambda I_V(v)$.

Então, $T(v) - \lambda I_V(v) = \mathbf{0}_V$.

Pela definição de multiplicação por escalar em transformações lineares, $T(v) - (\lambda I_V)(v) = \mathbf{0}_V$.

Pela definição de adição de transformações, $(T - \lambda I_V)(v) = \mathbf{0}_V$.

Então, o vetor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$, deve pertencer ao núcleo do operador $(T - \lambda I_V)$, isto é, $v \in Ker(T - \lambda I_V)$, com $v \neq \mathbf{0}_V$.

Portanto, o operador linear $(T - \lambda I_V)$ não é injetivo, consequentemente, não é bijetivo, nem invertível.

O fato do operador linear não ser invertível é equivalente ao do determinante de sua matriz associada, dada uma certa base, ser zero.

A equação $\det([T]_A - \lambda I_n) = 0$, onde I_n é a matriz identidade de ordem *n*, é denominada de **equação característica**.

O polinômio $\det([T]_A - \lambda I_n)$ é denominado **polinômio característico** de *T*, e suas raízes em **R** são os autovalores do operador linear *T*.

Exemplo: Seja $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y) = (3x, 8x - y)$ e considere a base canônica do $\mathbf{R}^2$.

Assim, $[T] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ e $\lambda I_2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Então, $[T] - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det([T] - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$\det([T] - \lambda I_2) = 0 \therefore (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Logo, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores do operador linear *T*.

Tendo encontrado os autovalores λ_i, com $1 \leq i \leq \dim V$.

Os autovetores são os vetores $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ tais que $(T - \lambda I_V)(v) = \mathbf{0}_V$.

Considere uma base A para o espaço vetorial V e a equação matricial $([T]_A - \lambda I_n) \cdot [v]_A = \mathbf{0}_{n\times 1}$, onde $\mathbf{0}_{n\times 1}$ é a matriz nula de ordem $n \times 1$.

Substituindo cada autovalor λ_i encontrado na equação matricial, obtém-se um sistema de equações lineares.

Resolvendo-se cada um destes sistemas, os autovetores associados a cada um do autovalores são obtidos, e, consequentemente, os autoespaços V_{λ_i}.

Exemplo: Seja $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (3x, 8x - y)$ com autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ e a base canônica do $\mathbf{R}^2$.

Para $\lambda_1 = 3$: $([T] - 3I_2) \cdot [v] = \mathbf{0}_{2\times 1}$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$8x - 4y = 0 \therefore y = 2x$$

$$V_3 = \{(x, 2x), x \in \mathbf{R}\}$$

Para $\lambda_2 = -1$: $([T] - (-1)I_2) \cdot [v] = \mathbf{0}_{2\times 1}$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{cases} 4x = 0 \\ 8x = 0 \end{cases} \therefore x = 0$$

$$V_{-1} = \{(0, y), y \in \mathbf{R}\}.$$

Multiplicidade de Autovalores

Sejam V um espaço vetorial, T um operador linear em V e $\lambda_i \in \mathbf{R}$, com $1 \le i \le \dim V$, um autovalor deste operador.

O número de vezes que $(\lambda - \lambda_i)$ aparece como um fator do polinômio característico de T é denominado de **multiplicidade algébrica** de λ_i, cuja notação é $m_a(\lambda_i)$.

A dimensão do autoespaço V_{λ_i} é denominada a **multiplicidade geométrica** de λ_i, cuja notação é $m_g(\lambda_i)$.

Exemplos: Considerando a base canônica do $\mathbf{R}^3$.

1) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (4x + 2y + 2z, 2x + 4y + 2z, 2x + 2y + 4z)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } [T] - (\lambda I_3) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det([T] - \lambda I_3) = 0 \therefore \lambda^3 - 12\lambda + 36\lambda - 32 = 0 \therefore (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

$\lambda_1 = 2$ e $V_2 = \{(-y - z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$

$\lambda_2 = 8$ e $V_8 = \{(z, z, z), z \in \mathbf{R}\}$

O autovalor 2 ocorre duas vezes como raiz do polinômio característico, $m_a(2) = 2$, e seu autoespaço possui dimensão igual a 2, $m_g(2) = 2$. Já o autovalor 8 ocorre única vez como raiz, $m_a(8) = 1$, e $\dim V_8 = 1 = m_g(8)$.

2) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (3x, 2y, y + 2z)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } [T] - (\lambda I_3) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det([T] - (\lambda \cdot I_3)) = 0 \therefore \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0 \therefore (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda_1 = 2$ e $V_2 = \{(0,0,z), z \in \mathbf{R}\}$

$\lambda_2 = 3$ e $V_3 = \{(x,0,0), x \in \mathbf{R}\}$

O autovalor 2 ocorre duas vezes como raiz do polinômio característico, $m_a(2) = 2$, e $\dim V_2 = 1 = m_g(2)$. O autovalor 3 ocorre única vez como raiz, $m_a(3) = 1$, e $\dim V_3 = 1 = m_g(3)$.

Diagonalização de Operadores Lineares

Dado um operador linear $T: V \to V$, existem representações matriciais de *T* relativas as bases de *V*. Dentre estas representações, a considerada mais simples é uma matriz diagonal.

Como a cada base corresponde uma matriz, a questão se resume na obtenção de uma certa base, cuja representação matricial do operador linear *T* em relação a esta base é uma matriz diagonal. Assim, esta base **diagonaliza** o operador linear *T*.

Seja *V* um espaço vetorial *n*-dimensional e $T: V \to V$ um operador linear.

O operador linear *T* é denominado um operador linear **diagonalizável** se existir um base *A* de *V* tal que $[T]_A$ é uma matriz diagonal. Esta base é composta pelos autovetores do operador linear *T*.

Seja *V* um espaço vetorial *n*-dimensional e $T: V \to V$ um operador linear. Se existem *n* autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ então o operador linear *T* é diagonalizável.

Exemplo: Seja o operador linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (4x + z, -2x + y, -2x + z)$ e a base canônica do $\mathbf{R}^3$, então $[T] = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 1$, $V_1 = \{(0, y, 0), y \in \mathbf{R}\}$ e $v_1 = (0,1,0)$

$\lambda_2 = 2$, $V_2 = \{(-\frac{z}{2}, z, z), z \in \mathbf{R}\}$ e $v_2 = (-1,2,2)$

$\lambda_3 = 3$, $V_3 = \{(-z, z, z), z \in \mathbf{R}\}$ e $v_3 = (-1,1,1)$

Sendo $A = \{(0,1,0), (-1,2,2), (-1,1,1)\}$ uma base de autovetores, $[T]_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Se existem $r < n$ autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ e suas multiplicidades algébricas e geométricas forem iguais, isto é, para todo $i = 1, \ldots, r$, $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$, então o operador linear *T* é diagonalizável.

Exemplo: Seja o operador $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ e a base canônica do $\mathbf{R}^3$, então $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 0$, $V_0 = \{(-y - z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$ e $A_1 = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$

$\lambda_2 = 3$, $V_3 = \{(z, z, z), z \in \mathbf{R}\}$ e $A_2 = \{(1,1,1)\}$

Sendo $A = A_1 \cup A_2 = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$ uma base de autovetores, $[T]_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercícios

1) Verificar, utilizando a definição, se os vetores dados são autovetores:

   a) $(-2,1)$ para $[T]=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) $(-2,1,3)$ para $[T]=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Os vetores $(1,1)$ e $(2,-1)$ são autovetores de um operador linear $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determinar $T(4,1)$.

3) Determinar o operador linear $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos autoespaços $V_1 = \{(-y, y), y \in \mathbf{R}\}$ e $V_3 = \{(0, y), y \in \mathbf{R}\}$.

4) Determinar os autovalores e os autovetores dos seguintes operadores lineares no $\mathbf{R}^2$.

   a) $T(x,y) = (x+2y, -x+4y)$

   b) $T(x,y) = (y, -x)$

5) Dado o operador linear T no $\mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y) = (-3x-5y, 2y)$, encontrar uma base de autovetores.

6) Verificar se existe uma base de autovetores para:

   a) $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 2y+3z)$

   b) $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x, -2x-y, 2x+y+2z)$

   c) $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x, -2x+3y-z, -4y+3z)$

7) Seja $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y) = (4x+5y, 2x+y)$. Encontrar uma base que diagonalize o operador *T*.

8) O operador linear $T:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tal que $T(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y+z, y+z+t, x+y)$ é diagonalizável?

Respostas

1) a) Sim b) Não

2) $T(x,y) = (x+4y, 2x+3y)$ e $T(4,1) = (8,11)$

3) $T(x,y) = (x, 2x+3y)$

4) a) autovalores: 2 e 3
   b) não possui autovalores reais

5) $\{(1,-1),(1,0)\}$

6) a) b) Sim c) Não

7) $A = \{(-1,1),(5,2)\}$ e $[T]_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Apêndice E – Teoremas

Seja V um espaço vetorial n-dimensional e $T: V \to V$ um operador linear.

Teo81. Se $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$ é um autovetor do operador linear T associado ao autovalor $\lambda \in \mathbf{R}$ então para todo $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$, o vetor kv é também um autovetor de T associado ao autovalor λ.

dem.: $T(kv) =$

$kT(v) =$ por TL2

$k(\lambda v) =$ por hipótese

$(k\lambda)v =$ por EV5

$(\lambda k)v =$ comutatividade da multiplicação em $\mathbf{R}$

$\lambda(kv)$ por EV5

Teo82. Seja λ um autovalor de T. Então $V_\lambda \cup \{\mathbf{0}_V\}$ é um subespaço vetorial de V.

Teo83. Sejam os autovetores v e v' do operador linear T associados, respectivamente, aos autovalores λ e λ' distintos entre si. Então v e v' são linearmente independentes.

dem.: $kv + k'v' = \mathbf{0}_V$ (1)

$T(kv + k'v') = T(\mathbf{0}_V)$

$T(kv) + T(k'v') = \mathbf{0}_V$

$kT(v) + k'T(v') = \mathbf{0}_V$

$k(\lambda v) + k'(\lambda' v') = \mathbf{0}_V$

$(k\lambda)v + (k'\lambda')v' = \mathbf{0}_V$ (2)

Multiplicando-se (1) por λ, $\lambda(kv + k'v') = \lambda\mathbf{0}_V$

$\lambda(kv) + \lambda(k'v') = \mathbf{0}_V$

$(\lambda k)v + (\lambda k')v' = \mathbf{0}_V$

$(k\lambda)v + (k'\lambda)v' = \mathbf{0}_V$ (3)

Subtraindo (3) de (2), $(k\lambda)v + (k'\lambda')v' - (k\lambda)v - (k'\lambda)v' = \mathbf{0}_V$

$(k'\lambda')v' - (k'\lambda)v' = \mathbf{0}_V$

$(k'\lambda' - k'\lambda)v' = \mathbf{0}_V$

$k'(\lambda' - \lambda)v' = \mathbf{0}_V$

Mas $v' \neq \mathbf{0}_V$ e, por hipótese, $\lambda \neq \lambda'$.

Assim, $k' = 0$.

Analogamente, $k = 0$.

Logo, v e v' são linearmente independentes.

Teo84. Sejam $v_1, v_2, ..., v_r$ autovetores do operador linear T associados a autovalores todos distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$. Então os autovetores $v_1, v_2, ..., v_r$ são linearmente independentes.

dem.: Por indução em r.

Corolário84: Seja um operador linear $T: V \to V$ e V um espaço vetorial n-dimensional. Se T possui n autovalores distintos então existe uma base constituída por autovetores.

Teo85. Sejam V um espaço vetorial n-dimensional e $T:V \to V$ um operador linear. Se existem n autovalores distintos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ então o operador linear T é diagonalizável.

dem.: Considere uma base de autovetores $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subseteq V$, tal que v_i corresponde ao autovalor λ_i, para todo $i=1,...,n$.

Para todo $i=1,...,n$, $T(v_i)=\lambda_i\cdot v_i=0\cdot v_1+...+0\cdot v_{i-1}+\lambda_i\cdot v_i+0\cdot v_{i+1}+...+0\cdot v_n$.

Então, $[v_i]_A=\begin{pmatrix}0\\ ...\\ \lambda_i\\ ...\\ 0\end{pmatrix}$.

Assim, $[T]_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Logo, o operador linear T é diagonalizável.

Teo86. Se existem $r<n$ autovalores distintos $\lambda_1,..,\lambda_r$ e para qualquer autovalor a multiplicidade algébrica for igual a sua multiplicidade geométrica, isto é, para todo $i=1,...,r$, $m_a(\lambda_i)=m_g(\lambda_i)$ então o operador linear T é diagonalizável.

dem.: Como a multiplicidade geométrica de λ_i é a dimensão do autoespaço V_{λ_i}, então:

$$\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+...+\dim V_{\lambda_r}=\dim V=n$$

Considere A_i uma a base do autoespaço V_{λ_i}.

O conjunto $A=A_1\cup A_2\cup...\cup A_r$ é uma base do espaço vetorial V.

Então, $[T]_A=\begin{pmatrix}k_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & k_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & k_n\end{pmatrix}$ onde k_j é um dos autovalores λ_i, respeitada sua multiplicidade algébrica, isto é, o autovalor λ_i aparecerá tantas vezes na diagonal principal quanto for sua multiplicidade algébrica.