Revista Eletrônica de Educação e Ciência (REEC) – ISSN 2237-3462 - Volume 03 – Número 01 – 2013

AUTOVALORES E AUTOVETORES: CONCEITOS E UMA APLICAÇÃO A UM SISTEMA DINÂMICO

Patrícia Eduarda de Lima[1], Luciane de Fátima Rodrigues de Souza[2*]

[1] Departamento de Exatas, Faculdades Integradas Regionais de Avaré, E-mail pattyeduarda@hotmail.com Fundação Regional Educacional de Avaré, [*]E-mail: luciane_fa@yahoo.com.br.

Resumo – Autovalores e autovetores são bastante utilizados em problemas que envolvem sistemas dinâmicos, por ser através deles estudada a estabilidade de sistemas. O principal objetivo deste trabalho é apresentar e estudar um resumo teórico de autovalores e autovetores e conceitos básicos da álgebra linear, a partir de pesquisas bibliográficas. Será apresentada também, uma aplicação prática de um problema que os abrange, para isso iremos fazer uso de uma matriz obtida da simulação de um exemplo dinâmico de uma aeronave.

***Palavras-chave* – autovalores, autovetores e vibrações**

Abstract - Eigenvalues and eigenvectors are used in problems involving dynamical systems to be studied through them stability systems. The main objective of this paper is to present and study an abstract theoretical eigenvalues and eigenvectors and basic concepts of linear algebra from literature review. Will also be presented, and a practical application that will use a matrix of states obtained from the simulation of a dynamic example of an aircraft.

***Abstract* - eigenvalues, eigenvectors and vibrations.**

I. INTRODUÇÃO

A álgebra linear surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares e é um dos estudos com maior importância na matemática, por ser encontrada presente em quase todos os domínios. Nela se utiliza alguns conceitos e estruturas fundamentais como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares, sistemas de equações lineares e matrizes [4]. Dois dos conceitos dentro da álgebra Linear utilizados em muitas áreas são os de Autovalores e Autovetores, também denominados valores próprios e vetores próprios ou ainda, valores característicos e vetores característicos [1].

Para o estudo de autovalores a autovetores as matrizes são fundamentais. Arthur Cayley (1821-1895) foi um dos pioneiros a estudar matrizes, considerado um dos mais importantes autores na história da matemática, depois de Euler e Cauchy, e foi o matemático que mais contribuiu para esta ciência [5]. Os primeiros registros de matrizes surgiram por volta do segundo século a. C., mas foram nas décadas de 1920 e 1930, com a amplitude da teoria quântica, que o estudo de matrizes tornou-se de grande fundamento [2].

A determinação de autovalores e autovetores de uma matriz são conceitos que merecem uma maior atenção por haver inúmeras aplicações práticas em várias áreas diversificadas, por exemplo:

- Mecânica Quântica;
- Processamento de imagem;
- Análise de vibrações;
- Mecânica dos sólidos;
- Estatística, etc.
- A teoria dos operadores lineares diferenciais e integrais;
- As vibrações de asas de aviões;
- As vibrações de pontes ou outra estrutura sólida;
- A teoria das vibrações, quer sejam em mecânica ou elétrica, dos tipos macroscópica ou microscópica [2, 3].

Neste trabalho utilizaremos uma matriz obtida da simulação de um modelo dinâmico de uma aeronave para calcularmos os autovalores e autovetores e analisarmos e interpretarmos o que significam.

II. MATERIAIS E MÉTODOS

Para realizar este trabalho foi utilizada pesquisas bibliográficas através de livros, periódicos matemáticos, artigos científicos/ acadêmicos, dissertações, monografias, materiais didáticos, sites e revistas e uma aplicação em análise de estabilidade.

III. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

A seguir os principais conceitos para análise a partir de referências bibliográficas.

3.1. Definição de Espaços Vetores

Seja um conjunto V , não vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$\forall\, u, v \in V, u + v \in V$

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, u \in V, \alpha u \in V$

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:

$\mathbf{A_1}$) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\, u, v, \quad w \in V$

$\mathbf{A_2}$) $u + v = v + u, \forall\, u, v \in V$

$\mathbf{A_3}$) $\exists 0 \in V, \forall\, u \in \mathbf{A_1}$) $, u + 0 = u$

$\mathbf{A_4}$) $\forall\, u \in \mathbf{V}, \exists (-u) \in V, u + (-u) = \mathbf{0}$

M) Em relação à multiplicação escalar:

$\mathbf{M_1}$) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

$\mathbf{M_2}$) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$\mathbf{M_3}$) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$\mathbf{M_4}$) $1u = u$

Para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Sendo os elementos u, v, w ,..., de um espaço vetorial V são denominados vetores.

3.1.1. Definição de Transformação Linear

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação T: V $\rightarrow$ W é denominada transformação linear de V em W se:

I) $T(u + v) = f(u) + f(v)$

II) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Para $\forall\, u, v \in V$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

Observa-se que, em I, $u + v \in V$, enquanto $f(u) + f(v) \in W$. Do mesmo modo, em II, $\alpha\, u \in V$ e $\alpha f(u) \in W$.

E sendo que uma transformação linear de V em V (é o caso de $V = W$) é chamada operador linear sobre V .

Transformação identidade

$I: V \rightarrow V$

$v \mapsto v$ ou I $(v) = v$ é linear. De fato:

I) I $(u + v) = u + v = \mathbf{I}\,($ u) + I (v)

II) I $(\alpha u) = \alpha u = \alpha\, \mathbf{I}\,(u)$

3.1.2. Definição de Operadores Lineares

São chamados operadores lineares sobre V as transformações lineares de um espaço vetorial V em si mesmo, isto é, $f: V \rightarrow V$.

As transformações lineares planas são todas operadores lineares no $\mathbb{R}^2$.

Operações com transformações lineares

Adição

Sejam $f_1: V \rightarrow W$ e $f_2: V \rightarrow W$ transformações lineares. Chama-se soma das transformações lineares f_1 e f_2 à transformação linear.

$f_1 + f_2: V \rightarrow W$

$v \mapsto (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v), \forall\, v \in V$.

Se T_1 e T_2 são as matrizes de f_1 e f_2 em bases quaisquer de V e W , a matriz S que representa $f_1 + f_2$ é:

$S = T_1 + T_2$

Multiplicação por Escalar

Sejam $f: V \rightarrow W$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto de f pelo escalar α à transformação linear

$\alpha\, f: V \rightarrow W$

$v \mapsto (\alpha f)(v) = \alpha\, f(v), \forall\, v \in V$

Se T é a matriz de f em bases quaisquer de V e W, a matriz E que representa o produto de f pelo escalar α é:
$E = \alpha\, T$

3.2. Definição de Autovetores

Definição: Seja $f\colon V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V, v \neq \mathbf{0}$, chamamos de autovetor ou vetor próprio do operador f se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f\,(v) = \lambda\, v$$

O número real λ tal que $f(v) = \lambda\, v$ é denominado valor próprio de f associado ao vetor próprio v.

Como se vê, um vetor $f \neq 0$ é vetor próprio se a imagem $f(v)$ for um múltiplo escalar de v. No $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, diz-se que v e $f(v)$ têm a mesma direção.

Nas figuras abaixo se pode observar que o vetor $v \in \mathbb{R}^2$ é um vetor próprio de um operador f: dependendo do valor de λ.

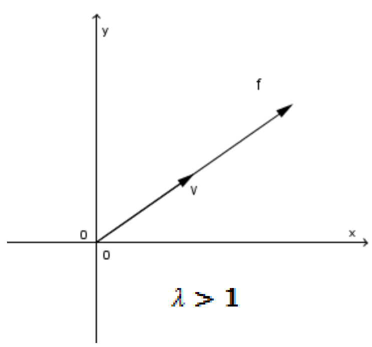

Figura 1- Operador f dilata em v

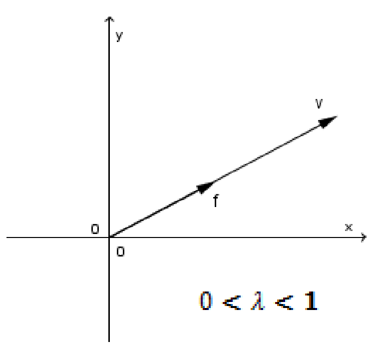

Figura 2 – Contrai v

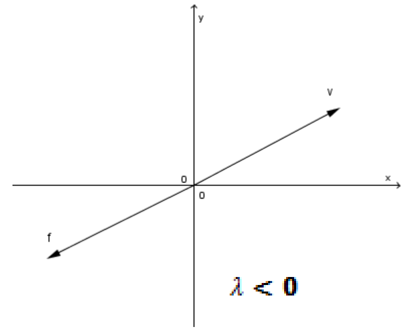

Figura 3 – Inverte o sentido de v ou anula no caso de $\lambda = 0$

Na figura 4 mostra um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ que não é vetor próprio de um operador f.

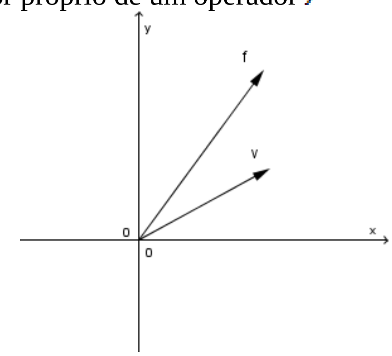

Figura 4 – Não é vetor próprio.

3.2.1 Determinação dos Autovalores

Considerando um operador linear $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ do qual a matriz canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O fato de ser A a matriz canônica de f pode-se escrever:

$f(v) = A\, v$

Se v é um vetor próprio de f e λ o respectivo valor próprio, isto é:

$f(v) = \lambda\, v$

Então,

$A\, v = \lambda\, v$

Onde v é uma matriz-coluna de ordem 2 x 1.

Ou

$A\, v - \lambda\, v = \mathbf{0}$

Tendo em vista que $v = \mathbf{I}\, v$ ($\mathbf{I}$ é a matriz identidade), pode-se escrever:

$A\,v - \lambda\,\mathbf{I}\,v = \mathbf{0}$

Ou

$$(A - \lambda\,\mathbf{I})\,v = \mathbf{0} \qquad \textbf{(I)}$$

Fazendo $v = (x, y)$, a equação (I) fica:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(II)}$$

A igualdade (II) representa um sistema homogêneo de 2 equações lineares com 2 variáveis $(x \; e \; y)$. Se o determinante da matriz dos coeficientes das variáveis for diferente de zero, a única solução do sistema é a trivial, isto é, $x = y = 0$. Como se deseja vetores $v \neq 0$, deve-se necessáriamente ter:

$$Det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \; ou \; Det\,(A - \lambda\,I) = \mathbf{0}$$

(III)

A equação (III) é denominada equação característica do operador f ou da matriz A e suas raízes são os valores próprios do operador f ou da matriz A. O determinante $(A - \lambda\,I)$, que é um polinômio em λ, é denominado polinômio característico de f ou de A.

3.2.2 Determinação dos Vetores Próprios

Os vetores próprios correspondentes aos valores obtidos substituindo cada valor de λ na igualdade (II) e resolvendo o respectivo sistema homogêneo de equações lineares.

3.2.3 Propriedades dos autovalores e autovetores

1) Se λ é um valor próprio de um operador linear $f: V \to V$, o conjunto é S_λ de todos os vetores $v \in V$, inclusive o vetor $v = \mathbf{0}$, tais que $f(v) = \lambda\,v$, é um subespaço vetorial de V $(S_1\lambda = \{v \in V /\, f(v) = \lambda\,v\})$. De fato, se v_1 e $v_2 \in S_\lambda$:

$f\,(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda\,v_1 + \lambda\,v_2 = \lambda\,(v_1 + v_2)$,

e, portanto, $(v_1 + v_2) \in S_\lambda$

Analogamente, verifica-se que $a\,v \in S_\lambda$ para todo $a \in \mathbf{R}$.

O subespaço S_λ é denominado subespaço associado ao valor próprio λ.

3.2.4. Diagonalização de Operadores

Sabe-se que, dado um operador linear $f: V \to V$, a cada base B de V corresponde uma matriz T_B que representa f na base B. Pretende-se obter uma base do espaço vetorial V de modo que a matriz de f, nessa base, seja a mais simples possível. A seguir se verá que essa matriz é uma matriz diagonal.

Propriedades:

1) Vetores próprios associados a valores próprios distintos de um operador linear $f: V \to V$ são linearmente independentes.

A demonstração será feita para o caso de $f\!: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ em que λ_1 e λ_2 são distintos.

Sejam $f\,(v_1) = \lambda_1\,v_1 \; e \; f\,(v_2) = \lambda_2\,v_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e considere-se a igualdade:

$$a_1\,v_1 + a_2\,v_2 = 0 \qquad \textbf{(I)}$$

Pela linearidade de f, tem-se:

$a_1\,f(v_1) + a_2\,f(v_2) = \mathbf{0}$

Ou

$$a_1\,\lambda_1 v_1 + a_2\,\lambda_2 v_2 = \mathbf{0} \quad \textbf{(II)}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (I) por λ_1, vem:

$a_1\,\lambda_1 v_1 + a_2\,\lambda_2 v_2 = \mathbf{0}$

Subtraindo (III) de (II), tem-se:

$$a_2\,(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = \mathbf{0},$$

Mas,

$$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \; e \; v_2 \neq \mathbf{0},$$

Logo, $a_2 = \mathbf{0}$.

Substituindo a_2 por seu valor em (I) e tendo em vista que $v_1 \neq \mathbf{0}$, tem-se $a_1 = \mathbf{0}$

Portanto, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI, pois (I) só admite a solução trivial $a_1 = a_2 = \mathbf{0}$

2) Se $f: V \to V$ é um operador linear, dim $V = n$ e f possui n valores próprios distintos, o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, formado pelos

correspondentes vetores próprios, é uma base de V .

Esta propriedade é consequência imediata da propriedade anterior.

3) Se um operador linear $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ admite valores próprios λ_1, λ_2 e λ_3 distintos, associados a v_1, v_2 e v_3 , respectivamente, a propriedade 2) assegura que o conjunto $P = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do $\mathbf{R}^3$.

Tendo em vista que:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3$$
$$f(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3$$
$$f(v_3) = 0v_1 + 0v_2 + \lambda_3 v_3 ,$$

O operador f é representado na base P dos vetores próprios pela matriz diagonal, no qual os elementos da diagonal principal são os valores próprios de f. A matriz diagonal D é a mais simples representante do operador linear f.

$$T_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = D$$

3.3. Matriz Diagonalizável

Sendo A a matriz canônica do operador f, as matrizes A e D são semelhantes por representarem o mesmo operador em bases diferentes. Logo, a relação entre matrizes semelhantes permite escrever:

$$D = Q^{-1}AQ \qquad \text{(I)}$$

Sendo Q a matriz de mudança de base para a matriz canônica.

$$C = \{e_1 1 = (1, 0, 0), e_1 2 = (0, 1, 0), e_1 3 = (0, 0, 1)\}$$

Tendo em vista que

$$Q = C^{-1}P = I^{-1}P = P$$

A igualdade (I) escreve-se

$$D = P^{-1}AP,$$

Sendo P a matriz cujas colunas são os vetores próprios do operador f (P está designando tanto a base dos vetores próprios de f quanto a matriz ora descrita; no contexto, identifica-se quando se trata de uma ou de outra).

A igualdade (II) dá motivo à definição a seguir:

A matriz quadrada A é diagonizável se existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}A\,P$ seja matriz diagonal.

Diz-se, nesse caso, que a matriz P diagonaliza A ou que P é a matriz diagonalizadora.

A definição acima pode ser expressa de modo equivalente: um operador linear $f\colon V \to V$ é diagonalizável se existe uma base de V formada por vetores próprios de f.

3.3.1. Diagonalização de matrizes simétricas – Propriedades

1) A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

A demonstração será feita somente para o caso de uma matriz simétrica A de ordem 2. Seja a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$$

Cuja equação característica é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} p-\lambda & r \\ r & q-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Isto é,

$$(p-\lambda)(q-\lambda) - r^2 = 0$$
$$pq - \lambda\, p - \lambda\, q + \lambda^2 - r^2 = 0$$
$$\lambda^2 - (p+q)\lambda + (pq - r^2) = 0$$

O discriminante dessa equação do 2º grau em λ é

$$(p+q)^2 - 4(1)(pq - r^2) = p^2 + 2pq + q^2 - 4pq + 4r^2 = (p-q)^2 + 4r^2$$

Tendo em vista que esse discriminante é uma soma de quadrados (não negativa), as raízes da equação característica são reais e, por conseguinte, a matriz A possui dois valores próprios.

2) Se $f\colon V \to V$ é um operador linear simétrico com valores próprios distintos, os vetores próprios correspondentes são ortogonais. De fato, sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios de um operador linear simétrico f com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sejam, ainda, $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $f(v_2) = \lambda_2 v_2$, isto é, v_1 e v_2 vetores próprios associados, respectivamente, a λ_1 e λ_2. Pretende-se mostrar que $v_1 . v_2 = 0$.

Sendo f um operador simétrico, pela propriedade, vem:

$f(v_1).v_2 = v_1.f(v_2)$
Ou
$\lambda_1 v_1.v_2 = v_1.\lambda_2 v_2$
$\lambda_1(v_1.v_2) - \lambda_2(v_1.v_2) = 0$
$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1.v_2) = 0$
Como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0,$ segue-se que $v_1.v_2 = 0$, ou seja $v_1 \perp v_2$.

Viu-se que uma matriz A é diagonalizada pela matriz P da base dos vetores próprios por meio de

$$D = P^{-1} A\ P$$

(I)

No caso particular de A ser simétrica, P será uma matriz de uma base ortogonal, de acordo com a propriedade 2. As vezes, por conveniência, há interesse que a base P, alem de ortogonal, seja ortonormal, o que se obtém normalizando cada vetor.

Assim, nessa condição, por ser a matriz P ortogonal, tem-se:

$$P^{-1} = P^t$$

E a relação (I) fica:

$$D = P^t\ A\ P$$

Dizendo-se, nesse caso, que P diagonaliza A ortogonalmente [1].

IV. APLICAÇÃO DE AUTOVALORES EM ESTABILIDADE

Em sistemas dinâmicos, se os autovalores relativos ao sistema forem reais, o sistema é instável e se forem complexos o sistema é estável [6].

Para mostrar uma aplicação, foi usado um modelo de simulação de vôo apresentado em [6]. Os resultados encontrados estão mostrados a seguir:

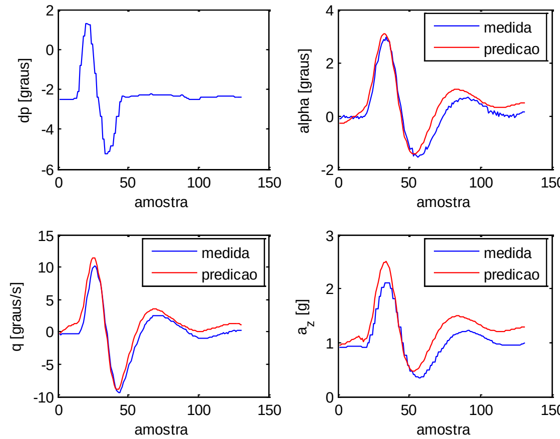

Figura 1. Resultados de simulação usando autovalores complexos.

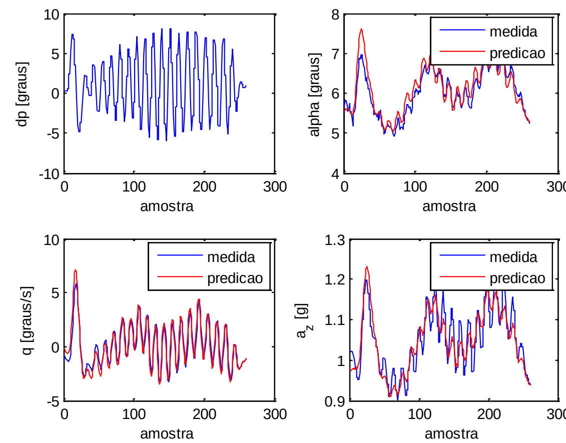

Figura 2. Resultados de simulação usando autovalores reais.

CONCLUSÃO

Considerando as análises, pode se concluir que autovalores e autovalores são bastante importantes para análise de sistemas dinâmicos. Neste trabalho foi apresentado um problema de sistema dinâmico representativo de uma aeronave. Realmente pode-se observar que quando os autovalroes são reais o sistema não estabiliza e quando forem complexos o sistema estabiliza.

REFERÊNCIAS

1. STEINBRUCH, A. & WINTERLE, P. (1997). Introdução à Álgebra linear.

2. OLIVEIRA, D. E. (2006). Sobre um método assemelhado ao de Francis para a determinação de autovalores de matrizes. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências da Universidade Estadual “Júlio de Mesquita Filho” de São José do Rio Preto, São Paulo.

3. Disponível em: <http://www.mspc.eng.br/matm/al_auto_val_vet_01.shtml>. Acesso em 25 de Julho de 2012.

4. AFONSO, A. P. Aplicações de Álgebra Linear. Disponível em <http://www.matematiques.com.br>. Acesso em 25 de Agosto de 2012.

5. Departamento de Ciência da Computação IME / USP - Universidade de São Paulo (2010). Disponível em <http://www.matematica.br/historia/cayley.html>. Acesso em 28/07/2012.

6. SOUZA, L. F. R. Redes Neurais artificiais na predição de respostas e estimação de derivadas aerodinâmicas de aeronaves. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos – USP São Carlos, 2007.