MATRIZES DE ROTAÇÃO

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO
USP – MAT 2458 – TURMA 20
AULAS DE 8 DE AGOSTO DE 2014

Nosso primeiro objetivo é encontrar a matriz A que implementa em $\mathbb{R}^3$ uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo passando pela origem e paralelo ao vetor unitário $\mathbf{u}$. O sentido da rotação é o anti-horário, quando o movimento é visto por um observador em direção ao qual o vetor $\mathbf{u}$ aponta.

Tomando um vetor $\mathbf{v}$ perpendicular a $\mathbf{u}$ e também de norma igual a 1, definindo $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, temos:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad A\mathbf{v} = (\cos\theta)\mathbf{v} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{w}, \quad A\mathbf{w} = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{v} + (\cos\theta)\mathbf{w}. \tag{1}$$

Seja $P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$ a matriz que tem nas colunas os vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Como o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é ortonormal, P é ortogonal, isto é, $P^t = P^{-1}$. Segue de (1) que, se $R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, então $AP = PR_\theta$. Daí

$$A = PR_\theta P^t. \tag{2}$$

`Exercícios`: (1) Use o método acima para encontrar a matriz de rotação de $120°$ em torno do vetor $(1, 1, 1)$. Tente "visualizar" a resposta encontrada. (2) Encontre a matriz de rotação de $45°$ em torno do vetor $(1, 0, -1)$.

Como R_θ e P são ortogonais, a matriz A também é ortogonal, pois

$$A^t = (PR_\theta P^t)^t = PR_\theta^t P^t = PR_\theta^{-1} P^{-1} = (PR_\theta P^{-1})^{-1} = (PR_\theta P^t)^{-1} = A^{-1}.$$

Além disso, como $\det R_\theta = 1$, segue que

$$\det A = \det(PR_\theta P^t) = (\det P)(\det R_\theta)(\det P^t) = (\det P)(\det P^t) = \det(PP^t) = \det I = 1$$

Mostramos então que

`toda matriz de rotação em` $\mathbb{R}^3$ `é ortogonal e tem determinante igual a 1.`

Vamos provar agora a recíproca desta afirmação, isto é, que toda matriz ortogonal 3×3 que tem determinante igual a 1 é a matriz de uma rotação em $\mathbb{R}^3$. Para isso, vamos provar primeiro que toda matriz ortogonal 2×2 de determinante igual a 1 é a matriz de uma rotação em $\mathbb{R}^2$.

Nós já sabemos que, para todo θ, a matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é ortogonal e tem determinante igual a 1. Vamos provar agora que, se uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é ortogonal e tem determinante 1, então existe um θ tal que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. As equações matriciais $AA^t = I$ e $\det A = 1$ são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac = -db \\ ad - bc = 1 \end{cases}.$$

A terceira equação do sistema implica que $a^2c^2 = d^2b^2$. As duas primeiras implicam que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Multiplicando esta última equação por c^2 e substituindo nela a equação $a^2c^2 = d^2b^2$, vem que $(d^2 + c^2)b^2 = c^2(c^2 + d^2)$. Mas como $c^2 + d^2 = 1$, temos então que $b^2 = c^2$. Daí, $a^2 = 1 - b^2 = 1 - c^2 = d^2$. Mostramos assim que toda solução (a, b, c, d) das três primeiras equações do sistema acima satisfaz $a^2 = d^2$ e $b^2 = c^2$. Como $a^2 + c^2 = 1$, existe um θ tal que $a = \cos\theta$ e $c = \operatorname{sen}\theta$ (de fato, no caso em que a e c são positivos, podemos tomar para θ o ângulo adjacente a a no triângulo retângulo de catetos a e c e hipotenusa 1; o caso geral segue deste, verifique!). Como $a^2 = d^2$ e $b^2 = c^2$, segue que $d = \pm\cos\theta$ e $c = \pm\operatorname{sen}\theta$. Para que a última equação do sistema seja satisfeita, só podemos tomar $b = -\operatorname{sen}\theta$ e $d = \cos\theta$. Assim provamos que

`toda matriz` 2×2`, ortogonal e de determinante 1 é uma matriz de rotação em` $\mathbb{R}^2$.

Agora suponha que A é uma matriz 3×3, ortogonal e de determinante 1. Então temos

$$\det(A - I) = \det(A - AA^t) = \det[A(I - A^t)] = \det A \cdot \det(I - A^t) = \det(I - A^t)^t = \det(I - A).$$

Como $I - A$ é uma matriz 3×3, $\det(I - A) = -\det(A - I)$, logo $\det(A - I) = -\det(A - I)$, logo $\det(A - I) = 0$. Isto prova que 1 é autovalor de A. Seja $\mathbf{u}$ um autovetor de A associado ao autovalor 1, isto é, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Podemos supor que a norma de $\mathbf{u}$ é igual a 1 (se não for, basta tomar $\mathbf{u}$ dividido pela sua norma como um "novo $\mathbf{u}$"). Tomemos agora um $\mathbf{v}$ perpendicular a $\mathbf{u}$ e de norma 1 e $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Precisamos dos seguintes resultados auxiliares (que é o que se chamam de "lemas").

Lema 1. *Se P é uma matriz ortogonal $n \times n$, então $(P\mathbf{x}).(P\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertencentes a $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Vamos usar o ponto para denotar o produto interno euclideano em $\mathbb{R}^n$ e não vamos usar ponto para denotar produto de matrizes, de modo que, identificando vetores de $\mathbb{R}^n$ com matrizes $n \times 1$, podemos escrever $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y}$. Assim teremos $(P\mathbf{x}).(P\mathbf{y}) = (P\mathbf{x})^t(P\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^tP^t)(P\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t(P^tP)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (na penúltima igualdade usamos que $P^tP = I$, já que P é ortogonal). $\square$

Lema 2. *Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é um conjunto ortonormal de vetores de $\mathbb{R}^3$, então todo elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Se $\mathbf{x}$ for perpendicular a $\mathbf{u}$, então $\mathbf{x}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.*

Tente interpretar geometricamente o enunciado deste lema. Sua demonstração, que não vamos ver aqui, usa conceitos que vão ser bastante explorados na disciplina: a *dimensão* de $\mathbb{R}^3$ é igual a três, logo qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que seja *linearmente independente* e tenha três elementos *gera* $\mathbb{R}^3$. E todo conjunto ortonormal é linearmente independente .

Como A é ortogonal e $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são perpendiculares a $\mathbf{u}$, segue do Lema 1 que $A\mathbf{v}$ e $A\mathbf{w}$ também são perpendiculares a $A\mathbf{u}$, que é igual a $\mathbf{u}$. Segue então do Lema 2 que $A\mathbf{v}$ e $A\mathbf{w}$ são combinações lineares de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, isto é, existem reais a, b, c e d tais que $A\mathbf{v} = a\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ e $A\mathbf{w} = b\mathbf{v} + d\mathbf{w}$.

Definamos agora a matriz P como no começo deste texto, isto é, $P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$ é a matriz que tem nas colunas os vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. As equações

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad A\mathbf{v} = a\mathbf{v} + c\mathbf{w}, \quad \text{e} \quad A\mathbf{w} = b\mathbf{v} + d\mathbf{w}$$

podem ser escritas, em notação matricial, como

$$(3) \qquad AP = PR, \quad \text{onde} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}. \quad \text{Daí,} \quad A = PRP^t.$$

Como, por hipótese, $AA^t = I$ e, por construção, P é ortogonal, segue que $(PRP^t)(PRP^t)^t = PR(P^tP)R^tP^t = PRR^tP^t = I$. Multiplicando a equação $PRR^tP^t = I$ à esquerda por P^t e, em seguida, à direita por P, segue que $RR^t = P^tP = I$. Usando que R é formada for dois blocos (e a definição de produtos de matrizes), segue de $RR^t = I$ que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Se provarmos que o determinante de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é igual a 1, seguirá do fato, já demonstrado, de que `toda matriz` 2×2`, ortogonal e de determinante 1 é uma matriz de rotação em` $\mathbb{R}^2$, que $R = R_\theta$ para algum θ e portanto, usando o que provamos no começo deste texto e, portanto, A será uma matriz de rotação.

Para provar que, de fato, o determinante de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é igual a 1, observemos primeiro que ele é igual ao determinante de R, que por sua vez satisfaz

$$\det A = \det(PRP^t) = (\det P)(\det R)(\det P^t) = (\det P)(\det P^t)(\det R) =$$

$$= [\det(PP^t)](\det R) = (\det I)(\det R) = \det R.$$

Como o determinante de A, por hipótese, é igual a 1, segue que $\det R = 1$. Chegamos ao resultado que queríamos:

`Uma matriz` 3×3 `é uma matriz de rotação em` $\mathbb{R}^3$ `se, e somente se,`
`ela é ortogonal e tem determinante igual a 1.`

Agora é fácil provar que a composição de duas rotações em $\mathbb{R}^3$ é uma rotação (isto é algo muito difícil de se "enxergar" geometricamente e serve como um belo exemplo do poder das técnicas algébricas). De fato, o produto de duas matrizes ortogonais e de determinante 1 é também ortogonal e tem determinante 1 (verifique!).

`Exemplo`. A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é ortogonal e tem determinante 1, logo é uma matriz de rotação. O autovetor $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ de autovalor 1 é portanto paralelo ao eixo de rotação. O plano perpendicular ao eixo de rotação que passa pela origem tem equação $x - y + z = 0$. Logo, um vetor genérico perpendicular ao eixo de rotação é da forma $\mathbf{v}_{st} = (s, t, t - s)$, $s, t \in \mathbb{R}$. O cosseno do ângulo θ formado por $\mathbf{v}_{st}$ e $A\mathbf{v}_{st}$ é igual a

$$\frac{(s, t, t-s) \cdot (t-s, -s, -t)}{\sqrt{s^2 + t^2 + (t-s)^2}\sqrt{(t-s)^2 + (-s)^2 + (-t)^2}} = \frac{st - s^2 - t^2}{2(t^2 + s^2 - st)} = -\frac{1}{2};$$

logo $\theta = 120^\circ$. Para decidir se o sentido de rotação é anti-horário (para quem olha "contra" $(1, -1, 1)$), devemos tomar um vetor perpendicular ao eixo de rotação, digamos $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$, e verificar se os vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, A\mathbf{v}\}$, nesta ordem, estão, ou não, positivamente orientados, isto é, se o produto misto $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot A\mathbf{v}$ é positivo ou negativo. Temos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot A\mathbf{v} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0,$$

logo a rotação é no sentido horário. [1]

`Exercícios`: (3) Tome um vetor $\mathbf{v}$ perpendicular a $(1, 1, 1)$ arbitrário, aplique a ele a matriz A encontrada no Exercício 1 e verifique, usando produto escalar, que o ângulo formado $\mathbf{v}$ e $A\mathbf{v}$ é igual a 120°.

(4) Encontre o eixo e o ângulo da rotação que se obtém compondo, nas duas ordens possíveis, as rotações dos Exercícios 1 e 2.

(5) Verifique que $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz de rotação, encontre o eixo de rotação, o ângulo, e determine o sentido da rotação. Resposta: rotação no sentido anti-horário de $\arccos(-\frac{1}{3})$ em torno de $(1, 1, 0)$.

Ao longo do semestre, veremos que as matrizes A e R na equação (3) são duas representações da mesma transformação linear em $\mathbb{R}^3$ (uma rotação). A matriz A representa a rotação na *base canônica* $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ e a matriz R representa a rotação na base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. A matriz P é uma *matriz de mudança de base.* Neste caso particular, em que as duas bases são ortonormais, a matriz de mudança de base é ortogonal, mas isso não ocorre sempre. No caso geral, em vez de P^t, aparece P^{-1} na fórmula de mudança de base.

---

[1]Dados três vetores não-coplanares $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, seja π o plano que contém um ponto O e é paralelo a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$. Como todo plano, π divide os pontos do espaço que não pertencem a ele em dois semi-espaços. Considere agora os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com suas extremidades iniciais situadas no ponto O. O conjunto ordenado de vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é *positivamente orientado* se um observador situado no semi-espaço para onde $\mathbf{w}$ aponta enxergar os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ numa posição tal que, quando $\mathbf{u}$ gira no sentido anti-horário até encontrar $\mathbf{v}$, o ângulo percorrido é menor do que 180°.

O produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é perpendicular a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$. O sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é determinado exigindo-se que os três vetores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$, nesta ordem, estejam positivamente orientados. Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ também for positivamente orientado, então $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ apontam para o mesmo lado do plano π, logo o ângulo entre eles é menor do que 180°, logo o produto escalar de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ com $\mathbf{w}$ é negativo.