

# O Método do Ponto Fixo

---

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Cálculo Numérico

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Introdução

Definição de Ponto Fixo

O Método do Ponto Fixo

Convergência

Ordem de Convergência

Exemplo

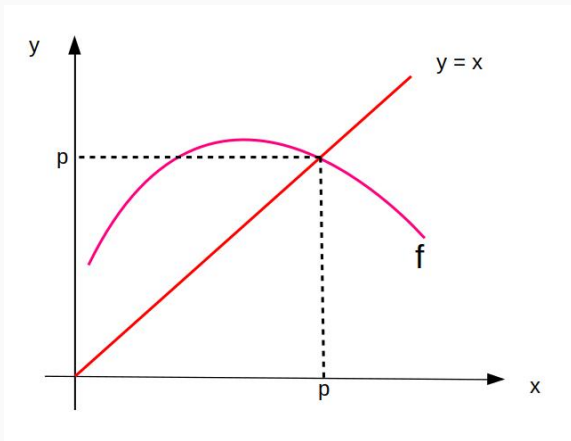
# Introdução

---

# Introdução

## Definição (Ponto Fixo de uma Função)

Um ponto fixo de uma função  $f$  é um número  $p$  tal que  $f(p) = p$ .



# O Método do Ponto Fixo

---

# O Método do Ponto Fixo (Existência)

## Teorema

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com  $f(a) \leq a$  e  $f(b) \geq b$ . Existe ao menos um ponto  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = c$ .

## Prova:

- Defina a função  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\phi(x) = x - f(x)$ .
- Note que  $\phi$  é contínua em  $[a, b]$ .
- Note que  $\phi(a) = a - f(a) \geq 0$  e  $\phi(b) = b - f(b) \leq 0$ .
- Pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $c \in [a, b]$  tal que  $\phi(c) = 0$ .
- Logo, para esse caso  $0 = \phi(c) = f(c) - c$ , de onde segue que  $f(c) = c$ .

## O Método do Ponto Fixo

- Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Suponha que  $f$  possui somente um zero em  $[a, b]$ , ou seja, a equação  $f(x) = 0$  possui somente uma solução em  $[a, b]$ .
- O Método do Ponto Fixo consiste em encontrar uma função  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(x) = x$  e com isso, construir uma sequência  $x_n$  de pontos da forma  $x_n = \phi(x_{n-1})$ , para um dado ponto inicial.
- A função  $\phi$  é chamada função de iteração.
- A construção da sequência se dá da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } x_0 \\ \text{Construa } x_n \text{ da forma } x_n = \phi(x_{n-1}) \end{array} \right.$$

## Exemplo de Funções de Iteração

Suponha que estamos interessados em buscar a solução da equação

$$x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0.$$

Podemos enumerar algumas funções de iteração para resolver a equação acima:

1.  $x = (1 - x - 2x^2)^{1/3}$ , nesse caso  $\phi(x) = (1 - x - 2x^2)^{1/3}$ ;
2.  $x = (x^2 + 2x + 1)^{-1}$ , nesse caso  $\phi(x) = (x^2 + 2x + 1)^{-1}$ ;
3.  $x = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ , nesse caso  $\phi(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ , desde que a expressão no radical tenha sentido;
4.  $x = x + \alpha(x^3 + 2x^2 + x - 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , nesse caso  $\phi(x) = x + \alpha(x^3 + 2x^2 + x - 1)$ .

## Definição

Uma função de iteração  $\phi$  para um problema  $f(x) = 0$  tem a forma geral

$$\phi(x) = x + A(x)f(x),$$

onde  $A(\xi) \neq 0$  com  $\xi$  a raiz de  $f(x) = 0$ .

## Teorema

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma contínua. Seja  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função de iteração associada ao problema de determinar  $x$  tal que  $f(x) = 0$ . Então  $f(\xi) = 0$  se e somente se  $\phi(\xi) = \xi$ .

### Prova:

( $\implies$ )

- Seja  $\xi$  tal que  $f(\xi) = 0$ .
- Da definição de função de iteração tem-se

$$\phi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi)$$

# Propriedades

- De onde tem-se  $\phi(\xi) = \xi$

( $\Leftarrow$ )

- Se  $\phi(\xi) = \xi$  então da definição de função de iteração tem-se

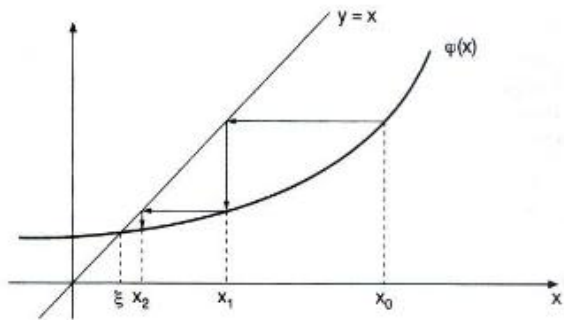
$$\xi = \phi(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi).$$

- De onde segue que

$$A(\xi)f(\xi) = 0.$$

- Como  $A(\xi) \neq 0$  tem-se  $f(\xi) = 0$ .

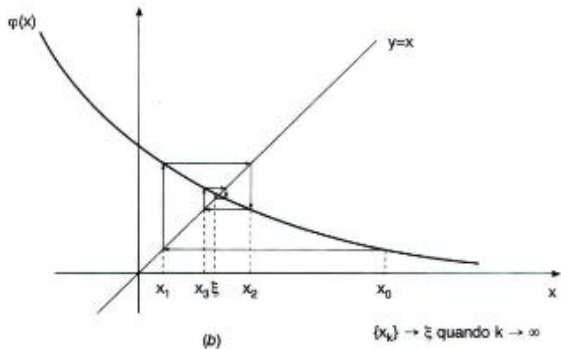
## Exemplos de Comportamentos para Funções de Iteração



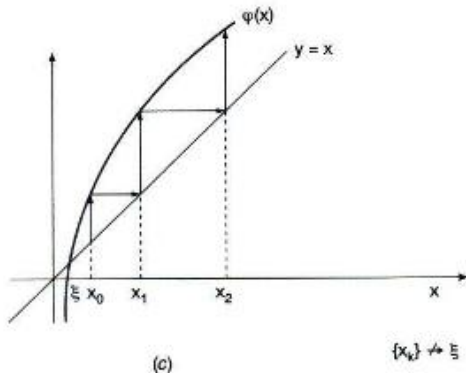
(a)

$\{x_k\} \rightarrow \xi$  quando  $k \rightarrow \infty$

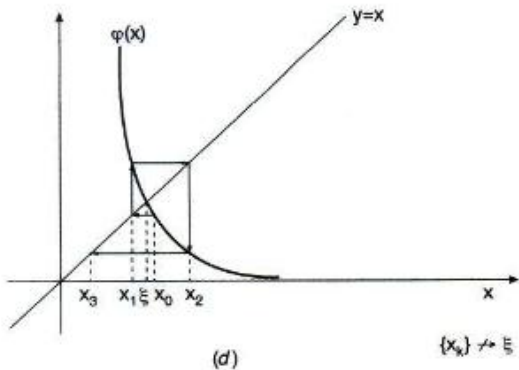
## Exemplos de Comportamentos para Funções de Iteração



## Exemplos de Comportamentos para Funções de Iteração



## Exemplos de Comportamentos para Funções de Iteração



# Convergência

---

## Teorema

Seja  $\xi$  uma raiz da equação  $f(x) = 0$ , *isolada* em um intervalo  $I \ni \xi$ , centrado em  $\xi$ . Seja  $\phi$  uma função de iteração para a equação  $f(x) = 0$ . Se

1.  $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$  ,
2.  $|\phi'(x)| \leq M < 1$  para todo  $x \in I$ ,
3.  $x_0 \in I$ ,

então a sequência  $x_n$  gerada pela iteração  $x_n = \phi(x_{n-1})$  converge para  $\xi$ .

### Prova:

Vamos mostrar que se  $x_0 \in I$  então  $x_n \in I$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

# Convergência

- Como  $\xi$  é uma raiz de  $f(x) = 0$  tem-se  $f(\xi) = 0$
- Já foi estabelecido que  $f(\xi) = 0$  se e somente se  $\phi(\xi) = \xi$ .
- Para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $x_{n+1} = \phi(x_n)$ .
- Logo  $x_{n+1} - \xi = \phi(x_n) - \phi(\xi)$ .
- Como  $\phi$  é diferenciável em  $I$ , pelo Teorema do Valor Médio, se  $x_n \in I$ , existe  $c_n$  entre  $x_n$  e  $\xi$  tal que

$$\phi'(c_n)(x_n - \xi) = \phi(x_n) - \phi(\xi).$$

- Portanto temos  $x_{n+1} - \xi = \phi(x_n) - \phi(\xi) = \phi'(c_n)(x_n - \xi)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Assim  $x_{n+1} - \xi = \phi'(c_n)(x_n - \xi)$
- Logo, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$|x_{n+1} - \xi| = |\phi'(c_n)| |x_n - \xi| < |x_n - \xi|$$

# Convergência

- Agora, nota-se que, se  $x_0 \in I$  então, do fato  $|x_{n+1} - \xi| < |x_n - \xi|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $|x_1 - \xi| < |x_0 - \xi|$  de onde segue  $x_1 \in I$ .
- Assim, indutivamente, conclui-se que, se  $x_0 \in I$  então  $x_n \in I$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

- Nota-se que

$$|x_1 - \xi| = |\phi(x_0) - \phi(\xi)| = |\phi'(c_0)||x_0 - \xi| \leq M|x_0 - \xi|,$$

$$|x_2 - \xi| = |\phi(x_1) - \phi(\xi)| = |\phi'(c_1)||x_1 - \xi| \leq M^2|x_0 - \xi|,$$

$$\dots = \dots$$

$$|x_n - \xi| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\xi)| = |\phi'(c_{n-1})||x_{n-1} - \xi| \leq M^n|x_0 - \xi|,$$

- Logo

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \xi| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M^n |x_0 - \xi| = |x_0 - \xi| \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$$

- Como  $0 < M < 1$  segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0.$$

- E portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \xi| = 0$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

## Definição

Seja  $x_n$  uma sequência gerada por algum método iterativo. Seja  $e_n = x_n - \xi$  o erro cometido na iteração  $n$ . Se existirem os reais  $p \geq 1$  e  $c > 0$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c$$

então  $p$  é chamado de ordem de convergência desse método e  $c$  é a constante assintótica de erro.

Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = c$$

com  $0 \leq |c| < 1$  então a convergência é pelo menos linear.

## Teorema

*O Método do Ponto Fixo converge linearmente.*

### Prova:

- Já sabemos que  $x_{n+1} - \xi = \phi'(c_n)(x_n - \xi)$  com  $c_n$  entre  $x_n$  e  $\xi$ .
- Logo

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{x_n - \xi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi'(c_n) \\ &= \phi'\left(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n\right) \\ &= \phi'(c^*) \\ &= C\end{aligned}$$

# Convergência

## Observações:

- A convergência do processo iterativo será tanto mais rápida quanto menor for o valor de  $\phi'$ .
- Se o módulo da derivada  $|\phi'(x)|$  for maior que 1 para todo  $x \in I$  a iteração  $x_n = \phi(x_{n-1})$  divergir.
- Da definição de ordem de convergência, podemos afirmar que para  $n$  suficientemente grande teremos

$$|e_{n+1}| = c|e_n|^p \quad \text{e} \quad |e_n| = c|e_{n-1}|^p$$

Segue então que

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \frac{c|e_n|^p}{c|e_{n-1}|^p} = \left| \frac{e_n}{e_{n-1}} \right|^p$$

De onde obtem-se

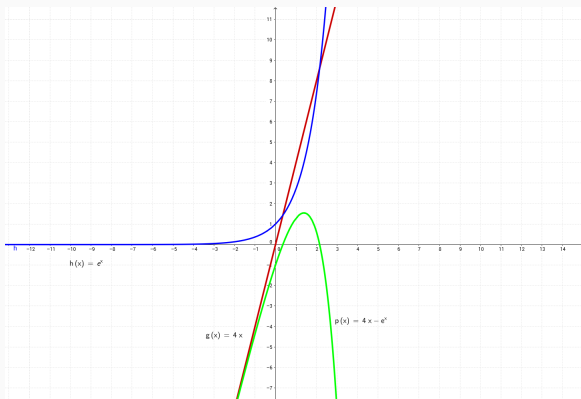
$$p = \frac{\log |e_{n+1}| - \log |e_n|}{\log |e_n| - \log |e_{n-1}|}$$

## Exemplo

Vamos resolver a equação

$$e^x - 4x = 0.$$

Nota-se que essa equação possui uma raiz no intervalo  $[0, 1]$  e outra no intervalo  $[2, 3]$ .



## Exemplo

- Vamos usar a função de iteração

$$\phi(x) = \frac{e^x}{4}$$

com  $x_0 = 1$  para determinar a raiz em  $[0, 1]$ .

- Inicialmente, nota-se que

$$\phi'(x) = \frac{e^x}{4}$$

- Para  $x \in [0, 1]$  tem-se

$$\frac{1}{4} < \phi'(x) < \frac{e}{4} < 1.$$

- Assim, o método do ponto fixo com a função de iteração e o  $x_0$  acima deverá convergir.

## Exemplo

### Comportamento do Método do Ponto Fixo para o Problema Anterior

$n$	$x_n$	$C$	$p$	$e_n$
1	0.6795704571E+00	0.0000000000E+00	-	0.3204295429E+00
2	0.4932575123E+00	0.0000000000E+00	-	0.1863129448E+00
3	0.4094105450E+00	0.4500329666E+00	-	0.8384696727E-01
4	0.3764824614E+00	0.3927164535E+00	0.8542444327E+00	0.3292808362E-01
5	0.3642874957E+00	0.3703515161E+00	0.9409693922E+00	0.1219496569E-01
6	0.3598720003E+00	0.3620752608E+00	0.9777532884E+00	0.4415495383E-02
7	0.3582864902E+00	0.3590786618E+00	0.9918858595E+00	0.1585510174E-02
8	0.3577188734E+00	0.3580026068E+00	0.9970783036E+00	0.5676167752E-03
9	0.3575158838E+00	0.3576173690E+00	0.9989529675E+00	0.2029896177E-03
10	0.3574433191E+00	0.3574796002E+00	0.9996254267E+00	0.7256464739E-04
11	0.3574173823E+00	0.3574303505E+00	0.9998660802E+00	0.2593680735E-04
12	0.3574081122E+00	0.3574127472E+00	0.9999521308E+00	0.9270145570E-05
13	0.3574047989E+00	0.3574064555E+00	0.9999828906E+00	0.3313209871E-05
14	0.3574036148E+00	0.3574042069E+00	0.9999938850E+00	0.1184155146E-05
15	0.3574031916E+00	0.3574034032E+00	0.9999978144E+00	0.4232210791E-06
16	0.3574030403E+00	0.3574031159E+00	0.9999992188E+00	0.1512605324E-06
17	0.3574029862E+00	0.3574030135E+00	0.9999997214E+00	0.5406097009E-07
18	0.3574029669E+00	0.3574029768E+00	0.9999999002E+00	0.1932155164E-07
19	0.3574029600E+00	0.3574029615E+00	0.9999999584E+00	0.6905579775E-08
20	0.3574029576E+00	0.3574029654E+00	0.1000000011E+01	0.2468074689E-08

## Exemplo

Vamos agora encontrar a segunda raiz, ou seja, a que está no intervalo  $[2, 3]$ .

- Nota-se que se tomarmos  $x_0 = 3.0$  com a função de iteração usada anteriormente, ou seja,  $\phi(x) = e^x/4$ , teremos o seguinte resultado

$n$	$x_n$
1	0.5021384231E+01
2	0.3790525928E+02
3	0.7244108526E+16
4	+Infinity

- A sequência contruída pela função de iteração dada diverge.
- Isso ocorre pois  $1 < \frac{e^2}{4} < \phi'(x)$  para  $x \in [2, 3]$ .
- É necessário utilizar outra função de iteração.

## Exemplo

- Vamos construir uma função de iteração que possa ser utilizada pelo método para encontrar a raiz de  $f(x) = 4x - e^x = 0$  no intervalo  $[2, 3]$ .
- Para isso vamos observar que queremos resolver  $4x - e^x = 0$
- Vamos multiplicar  $\rho > 0$  em ambos os lados e obter

$$\rho(4x - e^x) = 0$$

- Vamos somar  $x$  em ambos os lados e obter

$$x + \rho(4x - e^x) = x$$

- Temos então, uma candidata a função de iteração

$$\phi(x) = x + \rho(4x - e^x), \quad \text{para } \rho > 0.$$

## Exemplo

- Vamos agora determinar  $\rho$ . Isso será feito de forma que  $\phi$  satisfaça a condição  $|\phi'(x)| < 1$  para todo  $x \in [2, 3]$ .
- Para isso, nota-se que

$$\phi'(x) = 1 + \rho(4 - e^x).$$

- Assim, temos que ter

$$|1 + \rho(4 - e^x)| < 1$$

- De outro modo

$$-1 < 1 + \rho(4 - e^x) < 1$$

- Ou equivalentemente

$$-2 < \rho(4 - e^x) < 0$$

## Exemplo

- Agora, como  $|\phi'(x)| < 1$  em  $[2, 3]$ , temos para  $2 < x < 3$  que

$$e^2 < e^x < e^3$$

$$-e^3 < -e^x < -e^2$$

$$4 - e^3 < 4 - e^x < 4 - e^2$$

$$\rho(4 - e^3) < \rho(4 - e^x) < \rho(4 - e^2)$$

- Agora, basta encontrar  $\rho > 0$  tal que

$$-2 < \rho(4 - e^3) < \rho(4 - e^x) < \rho(4 - e^2) < 0$$

- Da última desigualdade qualquer  $\rho > 0$  pode ser utilizado.
- Da primeira desigualdade temos

$$0 < \rho < \frac{2}{e^3 - 4} \approx 0.12$$

## Exemplo

Assim, utilizando a função de iteração  $\phi(x) = x + \rho(4x - e^x)$ , com  $\rho = 0.1$  e  $x_0 = 3$  obtemos os seguintes resultados

$n$	$x_n$	$C$	$p$	$e_n$
1	0.2191446308E+01	0.0000000000E+00	-	0.8085536923E+00
2	0.2173210278E+01	0.0000000000E+00	-	0.1823603012E-01
3	0.2163849814E+01	0.5132950091E+00	-	0.9360463248E-02
4	0.2158931313E+01	0.5254548849E+00	0.1036385265E+01	0.4918501139E-02
5	0.2156316251E+01	0.5316787432E+00	0.1018639877E+01	0.2615062504E-02
6	0.2154917339E+01	0.5349439930E+00	0.1009786894E+01	0.1398911978E-02
7	0.2154166573E+01	0.5366785839E+00	0.1005201718E+01	0.7507660991E-03
8	0.2153762956E+01	0.5376060670E+00	0.1002782176E+01	0.4036164098E-03
9	0.2153545769E+01	0.5381037040E+00	0.1001493012E+01	0.2171874851E-03
10	0.2153428841E+01	0.5383712009E+00	0.1000802618E+01	0.1169274872E-03
11	0.2153365874E+01	0.5385151316E+00	0.1000431882E+01	0.6296722115E-04
12	0.2153331960E+01	0.5385926168E+00	0.1000232510E+01	0.3391368041E-04
13	0.2153313693E+01	0.5386343428E+00	0.1000125209E+01	0.1826707296E-04
14	0.2153303854E+01	0.5386568159E+00	0.1000067437E+01	0.9839683358E-05
15	0.2153298553E+01	0.5386689206E+00	0.1000036324E+01	0.5300331614E-05
16	0.2153295698E+01	0.5386754409E+00	0.1000019566E+01	0.2855158469E-05
17	0.2153294160E+01	0.5386789532E+00	0.1000010540E+01	0.1538013775E-05
18	0.2153293332E+01	0.5386808452E+00	0.1000005677E+01	0.8284985604E-06
19	0.2153292885E+01	0.5386818642E+00	0.1000003058E+01	0.4462971490E-06
20	0.2153292645E+01	0.5386824128E+00	0.1000001646E+01	0.2404124251E-06