

Solução de equações:  
Método de Newton

# Relembrando o método da iteração linear

- Queremos resolver

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

- Resolvemos

$$x = \psi(x) \quad (2)$$

Com  $\psi(x) = x + A(x)f(x)$

E garantimos que  $A(\bar{x}) \neq 0$

# Convergência do MIL

- Vimos que a convergência depende de  $\psi'(x)$
- Para convergência, precisamos garantir:

$$|\psi'(x)| < 1$$

A idéia do método de Newton é escolher um  $\psi$  tal que  
 $\psi'(\bar{x}) = 0$

Por que ?

Pelo teorema da permanência do sinal, se  $\psi'(x)$  é contínua, garantimos que  $\psi'(x) < M$  em um intervalo próximo de  $\bar{x}$

## Escolhendo $\psi$

- $\psi(x) = x + A(x)f(x)$

$$\psi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

Se calculamos no ponto  $\bar{x}$

$$\psi'(\bar{x}) = 1 + A'(\bar{x})\cancel{f(\bar{x})} + A(\bar{x})f'(\bar{x})$$

Como queremos  $\psi'(\bar{x}) = 0$

$$A(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})}$$

$\neq 0$  em  $\bar{x}$

desde que  $f'(\bar{x}) \neq 0$

# Método de Newton

$$x = \psi(x)$$

Método iterativo:

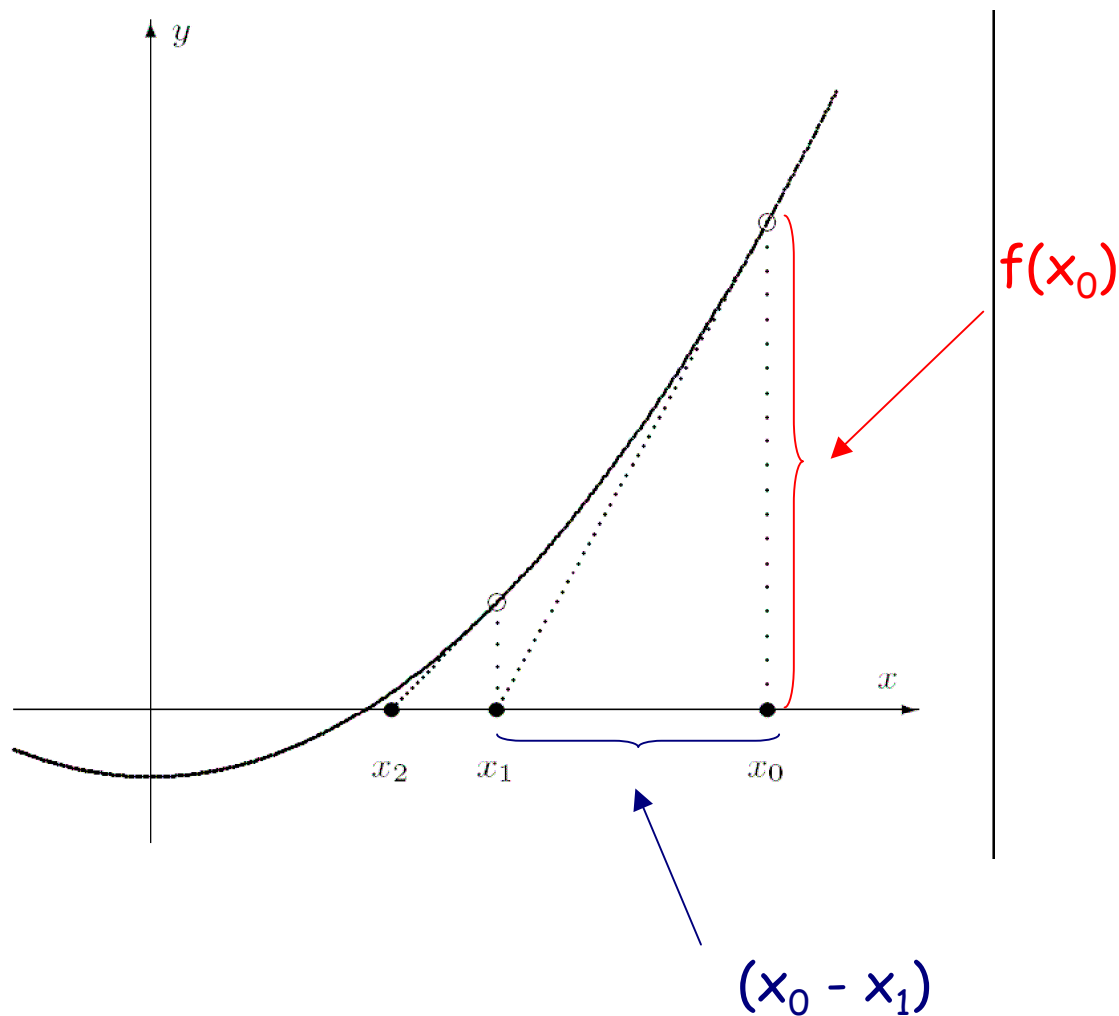
$$x_{k+1} = \psi(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + A(x_k)f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Converge sempre que  $|x_0 - \bar{x}|$  for suficientemente pequeno!

# Interpretação geométrica



$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

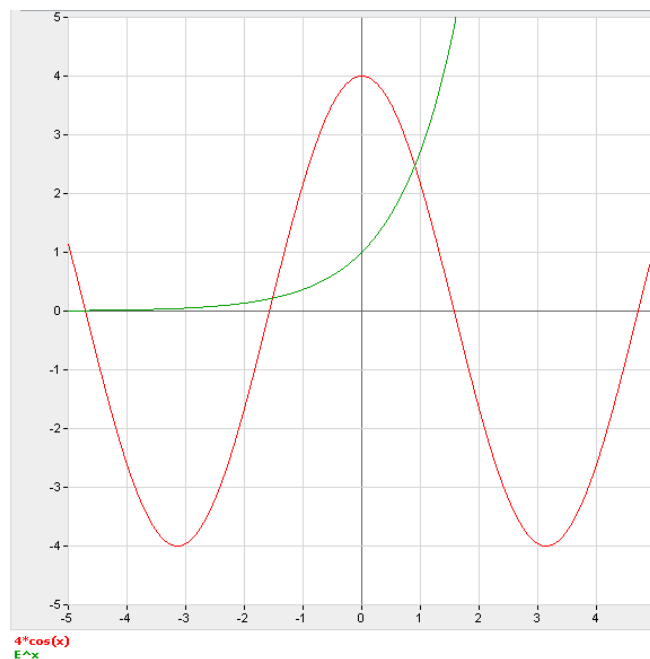
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Também chamado método das tangentes!

# Exemplo

- Determinar, usando o método de Newton, a menor raiz positiva da equação  $4 \cos(x) - e^x = 0$ , com erro inferior a  $10^{-2}$



na vizinhança do ponto  $x=1.0$

# Aplicação do método

- $f(x) = 4\cos(x) - e^x$
- $f'(x) = -4\text{sen}(x) - e^x$

Logo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{4\cos(x_k) - e^{x_k}}{-4\text{sen}(x_k) - e^{x_k}}$$

$$x_1 = 1.0 - \frac{4\cos(1.0) - e^{1.0}}{-4\text{sen}(1.0) - e^{1.0}} = 0.908$$

$$\text{erro rel} = \frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 0.101$$

$$x_2 = 0.908 - \frac{4\cos(0.908) - e^{0.908}}{-4\text{sen}(0.908) - e^{0.908}} = 0.905$$

$$\text{erro rel} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.0033$$

# Ordem de convergência

- **Teorema 3.6 (Franco):** Se  $f, f'$  e  $f''$  são contínuas em  $I$  cujo centro  $\bar{x}$  é solução de  $f(x)=0$  e se  $f'(\bar{x}) \neq 0$  então a ordem de convergência do método de Newton é quadrática, ou seja,  $p=2$ .

$$x_{k+1} = \psi(x_k)$$

$$\bar{x} = \psi(\bar{x})$$

---


$$x_{k+1} - \bar{x} = \underbrace{\psi(x_k) - \psi(\bar{x})}_{\text{desenvolvimento exato em série de Taylor em torno do ponto } \bar{x}}$$

desenvolvimento **exato** em série de Taylor em torno do ponto  $\bar{x}$

$$\cancel{\psi(\bar{x})} + \cancel{(x_k - \bar{x})\psi'(\bar{x})} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2!}\psi''(\xi_k)$$

$\xi_k$  entre  $x_k$  e  $\bar{x}$

# Ordem de convergência

- **Teorema 3.6 (Franco):** Se  $f, f'$  e  $f''$  são contínuas em  $I$  cujo centro  $\bar{x}$  é solução de  $f(x)=0$  e se  $f'(\bar{x}) \neq 0$  então a ordem de convergência do método de Newton é quadrática

$$x_{k+1} - \bar{x} = \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2!} \psi''(\xi_k)$$

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} = \frac{\psi''(\xi_k)}{2!} \leq C$$

Ordem de convergência

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$

Significa que a quantidade de dígitos significativos  
 Duplica à medida que os valores da sequência se aproximam  
 da solução de  $f(x)=0$

## Outra maneira de obter o método

- Vimos que podemos obter o método de Newton:
  - Através da definição de  $\psi(x) = x + A(x)f(x)$ , com  $\psi'(\bar{x})=0$
  - Através de uma interpretação geométrica
  
- Outra forma: expansão de Taylor

$$f(x)|_{x_0} \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Como queremos  $f(x) = 0$  :

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0$$

$$x = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

# Exercício

- Usando o método de Newton, com erro inferior a  $10^{-2}$ , determinar uma raiz da equação, considerando  $x_0=0.4$  e  $I=(0,1)$ . Use 6 casas decimais e arredondamento nos cálculos.

$$x - e^{x-2} = 0$$

