INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE E DE HERMITE

INTRODUÇÃO

Objetivando a preparação aos métodos de aproximação a serem aplicados à resolução numérica de equações diferenciais ordinárias com valores no contorno e de equações diferenciais parciais (o método das linhas), apresentam-se neste capítulo os métodos de interpolação polinomial de Lagrange e de Hermite. O bom entendimento desses métodos de aproximação facilitará bastante o aprendizado nos métodos de quadratura numérica que fundamentam o método. Para consolidar seu entendimento, tais métodos serão aqui apresentados de forma exaustiva e ilustrados por exemplos simples e de fácil reprodução.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE

Tal interpolação é aqui apresentada já visando suas aplicações no desenvolvimento das expressões de quadratura numérica, sendo assim aplicada a funções contínuas e definidas no intervalo [0,+1], caso a variável independente do problema não se apresente nesta forma torna-se necessário *normalizar* o intervalo aplicando a simples transformação linear : $x_{normalizado} = \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ se o intervalo de definição da variável independente x for $[a,b]$.

A *interpolação polinomial de Lagrange* consiste em aproximar uma função contínua e definida no intervalo [0,+1], $f\left(x\right)$, por um polinômio de grau (m-1) :

$P_{m-1}(x)$, tal que: $P_{m-1}\left(x_j\right) = f\left(x_j\right)$, para $j = 1, 2, ..., m$; chamando-se os pontos x_i ($i = 1, 2, ..., m$) de *pontos nodais* ou *pontos de interpolação*.

Esse procedimento pode ser facilmente visualizado na Figura abaixo, em que se adotam 05 (cinco) *pontos nodais* aproximando a função por um polinômio de quarto grau.

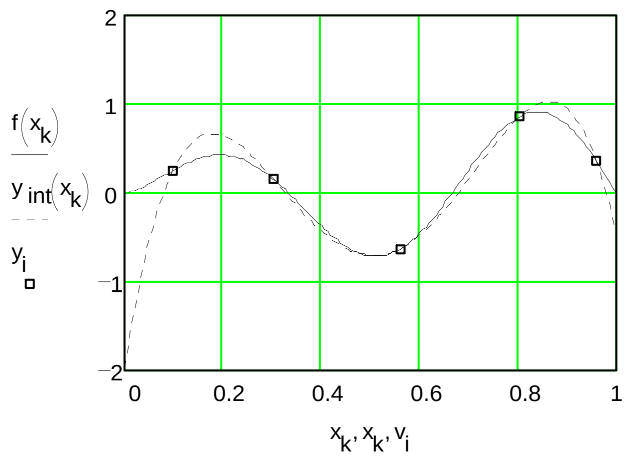


Fig. 1- Interpolação Polinomial de Lagrange com 05 Pontos (Quarto Grau)
[Curva contínua: Função **Exata**-Curva Pontilhada: Função **Interpolada**-Pequenos Quadrados: *Pontos Nodais*]

A forma mais direta, mas não necessariamente a mais simples, de gerar o polinômio interpolador: $P_{m-1}(x)$, que pode ser representado por: $P_{m-1}(x)=\sum_{i=0}^{m-1} c_i \cdot x^i$, é através da resolução do sistema linear: $P_{m-1}(x_j)=\sum_{i=0}^{m-1} c_i \cdot x_j^i = f(x_j)$, para j = 1, 2, ..., m , isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema linear fornece os valores dos m coeficientes c_i, i = 0, 1, ..., $m-1$.

<u>Exemplo Ilustrativo</u>: Determinar o polinômio interpolador de quarto grau da função: $f(x)=\sqrt{x}\cdot sen(2\cdot\pi\cdot x)$ no intervalo [0,+1], utilizando os seguintes pontos de interpolação: 0,2 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 e 0,8.

O sistema linear é: $$\begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,2^2 & 0,2^3 & 0,2^4 \\ 1 & 0,4 & 0,4^2 & 0,4^3 & 0,4^4 \\ 1 & 0,5 & 0,5^2 & 0,5^3 & 0,5^4 \\ 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 \\ 1 & 0,8 & 0,8^2 & 0,8^3 & 0,8^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{0,2}\cdot sen(0,4\cdot\pi) \\ \sqrt{0,4}\cdot sen(0,8\cdot\pi) \\ \sqrt{0,5}\cdot sen(1,0\cdot\pi) \\ \sqrt{0,6}\cdot sen(1,2\cdot\pi) \\ \sqrt{0,8}\cdot sen(1,6\cdot\pi) \end{bmatrix}$$

Ou, numericamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,04 & 0,008 & 0,0016 \\ 1 & 0,4 & 0,16 & 0,064 & 0,0256 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,0625 \\ 1 & 0,6 & 0,36 & 0,216 & 0,1296 \\ 1 & 0,8 & 0,64 & 0,512 & 0,4096 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,42532540 \\ 0,37174803 \\ 0,00000000 \\ -0,45529650 \\ -0,85065081 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -0,62875971 \\ 7,50787143 \\ -8,04344900 \\ -20,25516188 \\ 22,68130372 \end{bmatrix}.$$

O polinômio interpolador resultante é representado graficamente abaixo:

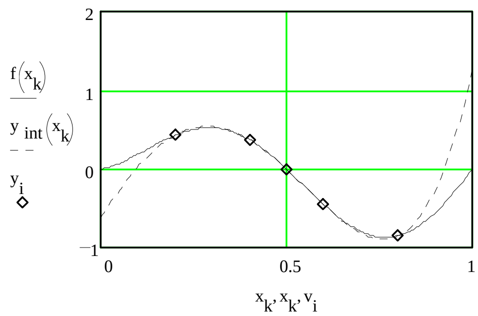


Fig. 2- Interpolação Polinomial de Lagrange com 5 Pontos (4º Grau) Função: $f(x)=\sqrt{x}\cdot sen(2\cdot\pi\cdot x)$

[Curva contínua: Função **Exata** -Curva Pontilhada: Função **Interpolada** [Pequenos Losangos: *Pontos Nodais*]

Observa-se na Figura anterior que entre os pontos de interpolação, [0,2≤ x ≤0,8] a aproximação polinomial da função é bastante satisfatória, entretanto para valores de x<0,2 e de x > 0,8 o erro é bem pronunciado, acentuando-se à medida que se distancia dos mesmos (nesses casos tem-se na realidade uma *extrapolação*). Esse comportamento é comum a todas as formas de interpolação polinomial e sua quantificação será apresentada posteriormente.

A resolução numérica do sistema linear de equações que define os valores dos coeficientes da aproximação polinomial nem sempre é preciso, pois, em muitos casos, a matriz característica do sistema $\left[\boldsymbol{A}_{i,j} = x_i^{j-1} \text{ , para } i, j = 1, \cdots, m\right]$ é *mal-condicionada*. Além disso, nesse tipo de cálculo, verifica-se que os valores dos coeficientes da interpolação são muito elevados (em módulo) e, geralmente, de sinais alternados, tal comportamento é reforçado com o aumento do grau da aproximação (no Exemplo Ilustrativo acima apesar do módulo da função ser sempre inferior a 1, os coeficientes da aproximação - com exceção de c_0 - são sempre maiores que 1 - em módulo - e aumentam à medida que o grau aumenta), tal comportamento é também um indicativo das dificuldades e imprecisões numéricas associadas ao procedimento. Outro aspecto que deve ser ressaltado é relativo à utilização posterior da interpolação polinomial, pois o objetivo final do procedimento é calcular o valor da função em outros pontos que não os utilizados na aproximação, utilizando informações dos valores da função nos *pontos nodais* para gerar a aproximação polinomial. Dessa forma, para atender a este objetivo, não há a necessidade de se calcular os coeficientes da aproximação, procedendo-se na forma proposta originalmente por Lagrange, que consiste em representar a interpolação na forma:

$$P_{m-1}(x) = \sum_{j=1}^{m} \ell_j(x) \cdot f(x_j)$$

Em que: $\ell_j(x)$: polinômio em x de grau m–1, tal que:

$$\ell_j(x_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \text{ [função } \delta \text{ de Krönecker]}$$

Os polinômios $\ell_j(x)$, para j = 1, ..., m, são chamados de *polinômios base da interpolação de Lagrange* e constituem uma *base completa* de funções polinomiais de mesmo grau [grau (m-1)], isto é qualquer polinômio de grau (m-1) pode ser expresso por uma combinação linear destes polinômios.

Como $\ell_j(x_i) = 0$ para todo $i \neq j$, isto é para i = 1, 2, ..., (j–1), (j+1), ...,m que são as (m-1) raízes de $\ell_j(x)$, logo:

$$\ell_j(x) = C_j \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdots (x - x_m) = C_j \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (x - x_k) \text{, como:}$$

$$\ell_j(x_j) = 1 \Rightarrow C_j = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} (x_j - x_k)} \text{, resulta em: } \ell_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right) \text{ para } j = 1, 2, \ldots, m$$

O procedimento de geração dos *m polinômios base da interpolação de Lagrange* pode ser implementado pelo programa em MATHCAD a seguir apresentado.

$$\text{Lagrange}(z,x,m) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..m-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} l_j \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 0..m-1 \\ \quad l_j \leftarrow l_j \cdot \left(\dfrac{z-x_i}{x_j-x_i} \right) \text{ if } j \neq i \end{array} \right. \\ l \end{array} \right.$$

Outra forma de expressar os polinômios interpoladores de Lagrange pode ser feita através da definição do *polinômio nodal*, que é o polinômio de grau m e que se anula em ***todos*** os *pontos nodais*, assim: $P_{nodal}(x) = C^{te} \cdot (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_m)$, em que C^{te} é uma constante arbitrária, note que em vista de: $\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m}(x-x_k) = \dfrac{P_{nodal}(x)}{C^{te}\cdot(x-x_j)}$ e

$\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m}(x_j-x_k) = \lim_{x\to x_j}\left[\dfrac{P_{nodal}(x)}{C^{te}\cdot(x-x_j)}\right] = \dfrac{\left.\dfrac{dP_{nodal}(x)}{dx}\right|_{x_j}}{C^{te}} = \dfrac{P'_{nodal}(x_j)}{C^{te}}$, pode-se expressar:

$\mathcal{l}_j(x) = \dfrac{P_{nodal}(x)}{(x-x_j)\cdot P'_{nodal}(x_j)}$ para j =1, 2, ..., m, em que:

$P_{nodal}(x) = C^{te}\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_m) = C^{te}\cdot\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)$.

Como a C^{te} se encontra presente no denominador e numerador da última expressão, pode-se sempre considerar: $\mathcal{l}_j(x) = \dfrac{p_{nodal}(x)}{(x-x_j)\cdot p'_{nodal}(x_j)}$ para j =1, 2, ..., m, em que:

$p_{nodal}(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_m) = \prod_{k=1}^{m}(x-x_k)$

<u>Exemplo Ilustrativo</u>: No exemplo anterior, tem-se: x_1 =0,2; x_2 = 0,4; x_3 = 0,5; x_4 = 0,6 e x_5=0,8.

Assim:

$$\mathcal{l}_1(x) = \frac{(x-0,4)\cdot(x-0,5)\cdot(x-0,6)\cdot(x-0,8)}{(0,2-0,4)\cdot(0,2-0,5)\cdot(0,2-0,6)\cdot(0,2-0,8)} = \frac{(x-0,4)\cdot(x-0,5)\cdot(x-0,6)\cdot(x-0,8)}{0,0144}$$

$$\mathcal{l}_1(x) = \frac{20}{3} - \frac{445}{9}\cdot x + \frac{2425}{18}\cdot x^2 - \frac{2875}{18}\cdot x^3 + \frac{625}{9}\cdot x^4$$

$$\mathcal{l}_2(x) = \frac{(x-0,2)\cdot(x-0,5)\cdot(x-0,6)\cdot(x-0,8)}{(0,4-0,2)\cdot(0,4-0,5)\cdot(0,4-0,6)\cdot(0,4-0,8)} = -\frac{(x-0,2)\cdot(x-0,5)\cdot(x-0,6)\cdot(x-0,8)}{0,0016}$$

$$\mathcal{l}_2(x) = -30 + \frac{595}{2}\cdot x - 975\cdot x^2 + \frac{2625}{2}\cdot x^3 - 625\cdot x^4$$

$$\ell_3\left(x\right)=\frac{\left(x-0,2\right)\cdot\left(x-0,4\right)\cdot\left(x-0,6\right)\cdot\left(x-0,8\right)}{\left(0,5-0,2\right)\cdot\left(0,5-0,4\right)\cdot\left(0,5-0,6\right)\cdot\left(0,5-0,8\right)}=\frac{\left(x-0,2\right)\cdot\left(x-0,4\right)\cdot\left(x-0,6\right)\cdot\left(x-0,8\right)}{0,0009}$$

$$\ell_4\left(x\right)=\frac{128}{3}-\frac{4000}{9}\cdot x+\frac{14000}{9}\cdot x^2-\frac{2000}{9}\cdot x^3+\frac{10000}{9}\cdot x^4$$

$$\ell_4\left(x\right)=\frac{\left(x-0,2\right)\cdot\left(x-0,4\right)\cdot\left(x-0,5\right)\cdot\left(x-0,8\right)}{\left(0,6-0,2\right)\cdot\left(0,6-0,4\right)\cdot\left(0,6-0,5\right)\cdot\left(0,6-0,8\right)}=-\frac{\left(x-0,2\right)\cdot\left(x-0,4\right)\cdot\left(x-0,5\right)\cdot\left(x-0,8\right)}{0,0016}$$

$$\ell_4\left(x\right)=-20+215\cdot x-\frac{1575}{2}\cdot x^2+\frac{2375}{2}\cdot x^3-625\cdot x^4$$

$$\ell_5\left(x\right)=\frac{\left(x-0,2\right)\cdot\left(x-0,4\right)\cdot\left(x-0,5\right)\cdot\left(x-0,6\right)}{\left(0,8-0,2\right)\cdot\left(0,8-0,4\right)\cdot\left(0,8-0,5\right)\cdot\left(0,8-0,6\right)}=\frac{\left(x-0,2\right)\cdot\left(x-0,4\right)\cdot\left(x-0,5\right)\cdot\left(x-0,6\right)}{0,0144}$$

$$\ell_5\left(x\right)=\frac{5}{3}-\frac{335}{18}\cdot x+\frac{650}{9}\cdot x^2-\frac{2125}{18}\cdot x^3+\frac{625}{9}\cdot x^4$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}P_4(x)=&\left(\frac{20}{3}\cdot f(0,2)-30\cdot f(0,4)+\frac{128}{3}\cdot f(0,5)-20\cdot f(0,6)+\frac{5}{3}\cdot f(0,8)\right)+\\&-\left(30\cdot f(0,2)-\frac{595}{2}\cdot f(0,4)+975\cdot f(0,5)-\frac{2625}{2}\cdot f(0,6)+625\cdot f(0,8)\right)\cdot x+\\&+\left(20\cdot f(0,2)-215\cdot f(0,4)+\frac{1575}{2}\cdot f(0,5)-\frac{2375}{2}\cdot f(0,6)+625\cdot f(0,8)\right)\cdot x^2+\\&-\left(\frac{20}{3}\cdot f(0,2)-30\cdot f(0,4)+\frac{128}{3}\cdot f(0,5)-20\cdot f(0,6)+\frac{5}{3}\cdot f(0,8)\right)\cdot x^3+\\&+\left(\frac{5}{3}\cdot f(0,2)-\frac{335}{18}\cdot f(0,4)+\frac{650}{9}\cdot f(0,5)-\frac{2125}{18}\cdot f(0,6)+\frac{625}{9}\cdot f(0,8)\right)\cdot x^4\end{aligned}$$

Substituindo os valores da função em cada um dos pontos nodais na expressão acima, obtém-se os mesmos valores dos coeficientes do polinômio interpolador.

Apesar de essa forma aparentar ser mais complexa que a anterior, a mesma é obtida sem a resolução do sistema linear de equações algébricas. Além disso, os mesmos polinômios base podem ser utilizados para interpolar qualquer função contínua no intervalo, bastando calcular os valores da função em cada um dos pontos nodais.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Outra propriedade interessante dos polinômios interpoladores de Lagrange pode ser obtida quando se aplica a interpolação polinomial à função; $f\left(x\right)=x^k$ para k = 0, 1, 2,..., (m-1), então como neste caso a interpolação é **exata**, de (II.22), tem-se:

$$x^k=\sum_{j=1}^{m}\ell_j\left(x\right)\cdot x_j^k \text{, para } k = 0, 1, 2, ..., (m\text{-}1)$$

Algebricamente, os polinômios de Lagrange podem ser interpretados como as *incógnitas* deste sistema linear de equações no qual o elemento da linha k e coluna j da matriz característica é x_j^k e no qual o elemento k do vetor das *constantes* é: x^k.

Para ilustrar esta observação, adota-se m=2, assim: com k=0: $l_1(x)+l_2(x)=1$ e com k=1: $x_1 \cdot l_1(x)+x_2 \cdot l_2(x)=x$, resultando no sistema algébrico linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix} x_2-x \\ x-x_1 \end{bmatrix}$$

ERRO NA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE

Do conceito de interpolação polinomial de Lagrange, tem-se que o valor da aproximação polinomial de grau (m-1), $P_{m-1}(x)$, é igual ao valor da função $f(x)$ nos pontos nodais, isto é o erro da interpolação é nulo nos m pontos nodais, o que permite inferir que a forma do erro da aproximação é: $\text{Erro}(x) = f(x) - P_{m-1}(x) = p_{nodal}(x) \cdot \Re(x)$

Para determinar a expressão de $\Re(x)$, procede-se de maneira semelhante à utilizada na análise do resíduo de expansões em séries de potências, definindo-se a função:

$Q(t) = f(t) - P_{m-1}(t) - p_{nodal}(t) \cdot \Re(x)$.

Note que a função $Q(t)$ se anula em (m+1) valores de t que são: x_1 , x_2 , ... , x_m e x (um valor genérico do argumento original). Desta forma, pelo *Teorema do Valor Médio*, a derivada da função $Q(t)$ se anula *pelo menos m* vezes no interior do intervalo das raízes [intervalo **I** composto pelos valores de t contidos entre (a) x e x_m caso $x < x_1$ - extrapolação ; (b) x_1 e x_m caso $x_1 \le x \le x_m$ - interpolação- ; (c) x_1 e x caso $x > x_m$ - extrapolação], isto é:

$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} - \frac{dP_{m-1}(t)}{dt} - \frac{dp_{nodal}(t)}{dt} \cdot \Re(x)$ tem *pelo menos m* raízes em **I**;

a derivada da função $\frac{dQ(t)}{dt}$, $\frac{d^2Q(t)}{dt^2}$, anula-se *pelo menos m*-1 vezes no intervalo **I**, isto é:

$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} - \frac{d^2P_{m-1}(t)}{dt^2} - \frac{d^2 p_{nodal}(t)}{dt^2} \cdot \Re(x)$ contém *pelo menos m*-1 raízes em **I**.

Induzindo a expressão para a *i*'ésima derivada de $Q(t)$, resulta que:

$\frac{d^iQ(t)}{dt^i} = \frac{d^i f(t)}{dt^i} - \frac{d^iP_{m-1}(t)}{dt^i} - \frac{d^i p_{nodal}(t)}{dt^i} \cdot \Re(x)$ contém *pelo menos m*+1–*i* raízes em **I**, com i variando de 0 a m.

Para o último valor de i (isto é: $i = m$), resulta:

$\frac{d^mQ(t)}{dt^m} = \frac{d^m f(t)}{dt^m} - \frac{d^mP_{m-1}(t)}{dt^m} - \frac{d^m p_{nodal}(t)}{dt^m} \cdot \Re(x)$ anula-se *pelo menos* 1 (uma) vez em **I**,

como : $\frac{d^mP_{m-1}(t)}{dt^m} = 0$ [$P_{m-1}(t)$ é um polinômio em t de grau (m-1)] e

$\frac{d^m p_{nodal}(t)}{dt^m} = (m)!$ [o coeficiente de t^m em $p_{nodal}(t)$ é igual a 1$\Rightarrow \frac{1}{(m)!} \cdot \frac{d^m p_{nodal}(t)}{dt^m} = 1$]

obtém-se: $\frac{d^mQ(t)}{dt^m} = \frac{d^m f(t)}{dt^m} - (m)! \cdot \Re(x)$ contém *pelo menos* 1 (uma) raiz em **I**, seja essa raiz ξ, isto é: $\left.\frac{d^mQ(t)}{dt^m}\right|_{t=\xi} = 0$, resultando na expressão: $\Re(x) = \frac{1}{(m)!}\left[\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right]_{t=\xi}$.

Concluindo-se que o erro da interpolação polinomial é dado por:

$\boxed{\text{Erro}(x) = \frac{1}{(m)!}\left[\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right]_{t=\xi} \cdot p_{nodal}(x)}$, sendo ξ *algum* ponto de **I** e: $p_{nodal}(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)$: um polinômio em *x* de grau *m*

O erro da aproximação polinomial é assim constituído pelo produto de dois termos:

(i) $\frac{1}{(m)!} \cdot \left[\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right]_{t=\xi}$ e (ii) $p_{nodal}(x)$, o primeiro desses termos depende inerentemente da função que se está aproximando, independente da seleção dos pontos nodais; já o segundo termo, que é o próprio polinômio nodal, depende exclusivamente da seleção dos pontos nodais, seu valor (em módulo) pode ser minimizado segundo critérios bem definidos.

Analisando a expressão acima, chegam-se as seguintes conclusões:

(a) o ***Erro*** da interpolação para funções polinomiais de grau inferior a *m* é nulo, pois: $\frac{d^m f(t)}{dt^m} = 0$ para todo valor de *t*;

(b) se *f*(*x*) for uma função polinomial de grau *m* com coeficiente de x^m igual a c_m o erro da interpolação será: $\text{Erro}(x) = c_m \cdot p_{nodal}(x)$;

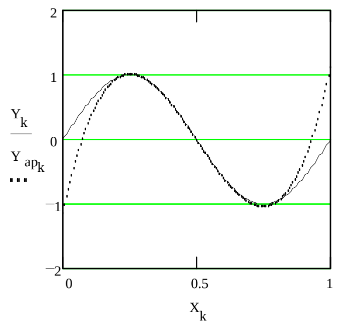
(c) se *f*(*x*) for uma função polinomial de grau *n* > *m* então o erro da interpolação é: $\text{Erro}(x) = q_{n-m}(x) \cdot p_{nodal}(x)$, em que :$q_{n-m}(x)$ é um polinômio em *x* de grau *n*-*m* .

A Eq. (II.6) é também útil para a análise dos limites superiores do erro da interpolação, esse tipo de análise é ilustrada no exemplo a seguir.

Exemplo Ilustrativo: Analise o valor máximo do erro na interpolação de 4º grau da função: $f(x) = sen(2 \cdot \pi \cdot x)$ no intervalo [0,+1], utilizando os seguintes pontos de interpolação: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6 e 0,8.

Da expressão de *f*(*x*) verifica-se que: $\frac{d^5 f(x)}{dx^5} = 32 \cdot \pi^5 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) \Rightarrow \left|\frac{d^5 f(x)}{dx^5}\right| \le 32 \cdot \pi^5$, o que permite concluir que: $|\text{Erro}(x)| \le \frac{32 \cdot \pi^5}{5!} \cdot \max|p_{nodal}(x)|$, mas o $\max|p_{nodal}(x)|$ ocorre nos limites do intervalo, isto é em *x* =0 e em *x*=+1 quando: $|p_{nodal}(0)| = |p_{nodal}(1)| = 0{,}0192$, logo: $|\text{Erro}(x)| \le \frac{32 \cdot \pi^5}{5!} \cdot 0{,}0192 = 1{,}566821$ para $0 \le x \le 1$.

A seguir, representa-se o gráfico de *f*(*x*) *versus* *x* (curva contínua) e de $f_{ap}(x)$, obtido por interpolação de Lagrange com os cinco pontos apresentados, *versus* *x* (curva pontilhada), apresentando também ao lado os valores dos erros em *x*=0 e em *x*=1.



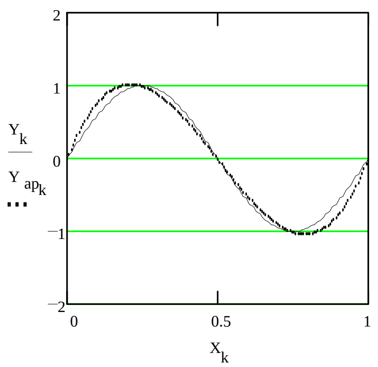
res(0) = 1.12257

res(1) = −1.12257

Fig. 3- Interpolação Polinomial de Lagrange com 5 Pontos (4º Grau) da Função: $f(x) = sen(2\pi x)$

[Curva contínua: Função **Exata -** Curva Pontilhada: Função **Interpolada** com pontos 0,2; 0,4; 0,5; 0,6 e 0,8]

Note que os valores reais do erro em x=0 e em x=1 são ambos inferiores (em módulo) ao valor máximo previsto pela análise da expressão do resíduo, Eq.(II.6). O alto valor do módulo do resíduo em x=0 e em x=1 se deve ao fato de o valor da função aproximada nestes pontos ser obtida por ***extrapolação***. Uma melhoria significativa pode ser obtida utilizando os pontos x=0 e x=1 como pontos de interpolação, além de 0,25; 0,50 e 0,75. As curvas da função exata e da função aproximada são neste caso apresentadas na figura abaixo, representando-se ao lado os valores numéricos dos extremos do resíduo e dos previstos pela expressão do resíduo.



max = 0.093913 res(max) = −0.180758

Max = 0.906088 res(Max) = 0.180758

sol = 0.088892 $cte \cdot p_{nodal}(sol)$ = 0.289398

Sol = 0.911108 $cte \cdot p_{nodal}(Sol)$ = −0.289398

Fig. 4- Interpolação Polinomial de Lagrange com 5 Pontos (4º Grau) da Função: $f(x) = sen(2\pi x)$

[Curva contínua: Função **Exata -** Curva Pontilhada: Função **Interpolada** com pontos 0; 0,25; 0,5; 0,75 e 1]

Exemplo Proposto: Analise o valor máximo do erro na interpolação de 4º grau da função: $f(x) = \exp(-x)$ no intervalo [0,+1], utilizando os seguintes pontos de interpolação: 0,2; 0,4 ; 0,5; 0,6 e 0,8. Refaça o exemplo adotando como pontos de interpolação : 0 ; 0,25 ; 0,50 ; 0,75 e 1e compare com os resultados anteriores.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧

AVALIAÇÃO DE DERIVADAS NUMÉRICAS ATRAVÉS DA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE

Nos itens anteriores se utilizou a interpolação polinomial de Lagrange apenas para calcular os valores aproximados da função em pontos distintos dos pontos nodais, isto é:

$f(x) \cong P_{m-1}(x) = \sum_{j=1}^{m} \ell_j(x) \cdot f(x_j)$, em que: $\ell_j(x)$: é um polinômio em x de grau m–1, expresso por: $\ell_j(x) = \dfrac{p_{nodal}(x)}{(x - x_j) \cdot \alpha_j}$ para j =1, 2, ..., m , sendo: $\alpha_j = p'_{nodal}(x_j)$ e

$$p_{nodal}(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_m) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)$$

A expressão anterior pode também ser utilizada para calcular o valor numérico aproximado das derivadas primeira e segunda da função $f(x)$ em cada ponto nodal, isto é, os valores de: $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x_i}$ e $\left.\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x_i}$ para i = 1, 2, ..., m . Utilizando a interpolação de Lagrange para o cômputo dessas derivadas:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x_i} \cong \left.\dfrac{dP_{m-1}(x)}{dx}\right|_{x_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \cdot f(x_j) \\ \left.\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x_i} \cong \left.\dfrac{d^2 P_{m-1}(x)}{dx^2}\right|_{x_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} B_{ij} \cdot f(x_j) \end{cases} \text{em que :} \begin{cases} A_{ij} = \left.\dfrac{d\ell_j(x)}{dx}\right|_{x_i} \\ B_{ij} = \left.\dfrac{d^2\ell_j(x)}{dx^2}\right|_{x_i} \end{cases}$$

Os termos A_{ij} e B_{ij} podem ser calculados se derivando sucessivamente a expressão de $\ell_j(x)$ rearranjada na forma:

$(x - x_j) \cdot \ell_j(x) = \dfrac{p_{nodal}(x)}{\alpha_j}$, assim:

$$(x - x_j) \cdot \frac{d\ell_j(x)}{dx} + \ell_j(x) = \frac{1}{\alpha_j} \cdot \frac{dp_{nodal}(x)}{dx}; \qquad \text{(a)}$$

$$(x - x_j) \cdot \frac{d^2\ell_j(x)}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d\ell_j(x)}{dx} = \frac{1}{\alpha_j} \cdot \frac{d^2 p_{nodal}(x)}{dx^2} \qquad \text{(b)}$$

e

$$(x - x_j) \cdot \frac{d^3\ell_j(x)}{dx^3} + 3 \cdot \frac{d^2\ell_j(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha_j} \cdot \frac{d^3 p_{nodal}(x)}{dx^3} \qquad \text{(c)}$$

Adotando $x = x_i \neq x_j$ em (a) e em vista de: $\ell_j(x_i) = 0$ e $\alpha_i = p'_{nodal}(x_i)$, tem-se:

$$A_{ij} = \left.\frac{d\ell_j(x)}{dx}\right|_{x_i} = \left[\frac{\alpha_i}{(x_i - x_j) \cdot \alpha_j} \right] \text{ para } x_i \neq x_j .$$

Adotando x=x_j em (b), tem-se: $A_{jj} = \left.\dfrac{d\ell_j(x)}{dx}\right|_{x_j} = \dfrac{1}{2 \cdot \alpha_j} \cdot \left.\dfrac{d^2 p_{nodal}(x)}{dx^2}\right|_{x_j}$.

Adotando $x = x_i \neq x_j$ em (b) tem-se: $\left(x_i - x_j\right)\cdot B_{ij} + 2\cdot A_{ij} = \dfrac{1}{\alpha_j}\cdot\left.\dfrac{d^2 p_{nodal}(x)}{dx^2}\right|_{x_i}$, mas:

$\left.\dfrac{d^2 p_{nodal}(x)}{dx^2}\right|_{x_i} = 2\cdot\alpha_i\cdot A_{ii}$ então: $\dfrac{1}{\alpha_j}\cdot\left.\dfrac{d^2 p_{nodal}(x)}{dx^2}\right|_{x_i} = 2\cdot\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}\cdot A_{ii} = 2\cdot\left(x_i - x_j\right)\cdot A_{ij}\cdot A_{ii}$, pois:

$\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j} = \left(x_i - x_j\right)\cdot A_{ij}$, logo: $B_{ij} = \left.\dfrac{d^2 l_j(x)}{dx^2}\right|_{x_i} = 2\cdot A_{ij}\cdot\left[A_{ii} - \dfrac{1}{\left(x_i - x_j\right)}\right]$ para $x_i \neq x_j$.

Adotando x=x_j em (c), tem-se $B_{jj} = \left.\dfrac{d^2 l_j(x)}{dx^2}\right|_{x_j} = \dfrac{1}{3\cdot\alpha_j}\cdot\left.\dfrac{d^3 p_{nodal}(x)}{dx^3}\right|_{x_j}$.

Resumindo: $A_{ij} = \left.\dfrac{d l_j(x)}{dx}\right|_{x_i} = \begin{cases}\left[\dfrac{\alpha_i}{(x_i - x_j)\cdot\alpha_j}\right] & \text{para } j \neq i \\ \dfrac{1}{2\cdot\alpha_i}\cdot\left.\dfrac{d^2 p_{nodal}(x)}{dx^2}\right|_{x_i} & \text{para } j = i\end{cases}$, e

$$B_{ij} = \left.\dfrac{d^2 l_j(x)}{dx^2}\right|_{x_i} = \begin{cases}2\cdot A_{ij}\cdot\left[A_{ii} - \dfrac{1}{(x_i - x_j)}\right] & \text{para } j \neq i \\ \dfrac{1}{3\cdot\alpha_i}\cdot\left.\dfrac{d^3 p_{nodal}(x)}{dx^3}\right|_{x_i} & \text{para } j = i\end{cases}$$

Nota-se que, para calcular os valores das derivadas da aproximação em cada um dos pontos nodais, não é necessário gerar os polinômios interpoladores de Lagrange sendo apenas necessário calcular as três primeiras derivadas do polinômio nodal em cada um dos pontos nodais.

Para executar este procedimento de forma iterativa, *Villadsen & Michelsen* (1978) sugerem o procedimento.

Para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, m$

$$\begin{cases}p_{i,j} = \left(x_i - x_j\right)\cdot p_{i,j-1} & \text{com } p_{i,0} = 1 \\ q_{i,j} = \left(x_i - x_j\right)\cdot q_{i,j-1} + p_{i,j\text{-}1} & \text{com } q_{i,0} = 0 \\ r_{i,j} = \left(x_i - x_j\right)\cdot r_{i,j-1} + 2\cdot q_{i,j\text{-}1} & \text{com } r_{i,0} = 0 \\ s_{i,j} = \left(x_i - x_j\right)\cdot s_{i,j-1} + 3\cdot \mathrm{r}_{\mathrm{i,j\text{-}1}} & \text{com } s_{i,0} = 0\end{cases}$$

Em que: $\left.\dfrac{dp_{nodal}(x)}{dx}\right|_{x_i} = q_{i,m}$, $\left.\dfrac{d^2 p_{nodal}(x)}{dx^2}\right|_{x_i} = r_{i,m}$ e $\left.\dfrac{d^3 p_{nodal}(x)}{dx^3}\right|_{x_i} = s_{i,m}$.

A *sub-rotina* que calcula as três primeiras derivadas do polinômio nodal (normalizado) programada em MATHCAD é mostrada a seguir:

```
derivadas(x, m) := | for  i ∈ 1.. m
                   |   | I ← i − 1
                   |   | p ← 1
                   |   | q ← 0
                   |   | r ← 0
                   |   | s ← 0
                   |   | for  j ∈ 1.. m
                   |   |   | t ← x_i − x_j
                   |   |   | s ← t·s + 3·r
                   |   |   | r ← t·r + 2·q
                   |   |   | q ← t·q + p
                   |   |   | p ← t·p
                   |   | Res_{I,0} ← q
                   |   | Res_{I,1} ← r
                   |   | Res_{I,2} ← s
```

Exemplo Ilustrativo: Calcular numericamente os valores das derivadas primeiras e segundas da função $f(x) = \sqrt{x} \cdot sen\left(2 \cdot \pi \cdot x\right)$nos pontos: 0,2; 0,4; 0,5; 0,6 e 0,8. a partir da aproximação polinomial de 4^0 grau utilizando estes mesmos pontos como pontos nodais. Comparar estes valores com os valores exatos.

Adotando o procedimento descrito em (II.9) e (II.10), determinam-se as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -12{,}5000 & 45{,}0000 & -53{,}3333 & 22{,}5000 & -1{,}6667 \\ -0{,}5556 & -12{,}5000 & 17{,}7778 & -5{,}0000 & 0{,}2778 \\ 0{,}2083 & -5{,}6250 & 0{,}0000 & 5{,}6250 & -0{,}2083 \\ -0{,}27778 & 5{,}0000 & -17{,}7778 & 12{,}5000 & 0{,}5556 \\ 1{,}6667 & -22{,}5000 & 53{,}3333 & -45{,}0000 & 12{,}5000 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 111{,}1111 & -675{,}0000 & 977{,}7778 & -450{,}0000 & 36{,}1111 \\ 19{,}4444 & 0{,}0000 & -88{,}8889 & 75{,}0000 & -5{,}5556 \\ -1{,}3889 & 112{,}5000 & -222{,}2222 & 112{,}5000 & -1{,}3889 \\ -5{,}5556 & 75{,}0000 & -88{,}8889 & 0{,}0000 & 19{,}4444 \\ 36{,}1111 & -450{,}0000 & 977{,}7778 & -675{,}0000 & 111{,}1111 \end{bmatrix}$$

Baseados nestes valores, calculam-se:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_i} \approx \left.\frac{dP_4(x)}{dx}\right|_{x_i} = \sum_{j=1}^{5} A_{i,j} \cdot f\left(x_j\right) \quad \text{e} \quad \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x_i} \approx \left.\frac{d^2 P_4(x)}{dx^2}\right|_{x_i} = \sum_{j=1}^{5} B_{i,j} \cdot f\left(x_j\right)$$

para i = 1, 2, 3, 4 e 5.

Apresentando os resultados em forma tabelada, tem-se:

i	x_i	$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right\|_{x_i}$	$\left.\dfrac{dP_4(x)}{dx}\right\|_{x_i}$	$\left.\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right\|_{x_i}$	$\left.\dfrac{d^2 P_4(x)}{dx^2}\right\|_{x_i}$
1	0,2	1,9316	2,5867	–15,1079	–29,5061
2	0,4	–2,7502	–2,8430	–23,2941	–21,1512
3	0,5	–4,4429	–4,3863	–8,8858	–8,8085
4	0,6	–4,3168	–4,4232	11,7282	8,9778
5	0,8	1,2049	2,1998	36,0854	60,8807

Nota-se uma grande discrepância entre os valores exatos e aproximados das derivadas primeira e segunda (sobretudo neste último caso) nos pontos 0,2 e 0,8, apenas os valores das derivadas primeira e segunda no ponto central (x = 0,5) são calculados com uma precisão razoável. Tais resultados, entretanto, não caracterizam a inadequação do procedimento para todas as funções, mas pode indicar que a função $f(x) = \sqrt{x} \cdot sen\left(2 \cdot \pi \cdot x\right)$ é muito mal aproximada por uma função polinomial.

Investigando-se os valores das duas primeiras derivadas nos mesmos pontos para a função $f(x) = \exp(-x)$, obtém-se os seguintes resultados.

i	x_i	$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right\|_{x_i}$	$\left.\dfrac{dP_4(x)}{dx}\right\|_{x_i}$	$\left.\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right\|_{x_i}$	$\left.\dfrac{d^2 P_4(x)}{dx^2}\right\|_{x_i}$
1	0,2	–0,8187	–0,8187	0,8187	0,8168
2	0,4	–0,6703	–0,6703	0,6703	0,6705
3	0,5	–0,6065	–0,6065	0,6065	0,6065
4	0,6	–0,5488	–0,5488	0,5488	0,5486
5	0,8	–0,4493	–0,4493	0,4493	0,4510

Verificando-se uma grande melhoria na estimação das duas primeiras derivadas, nos pontos considerados, em comparação com as estimações da função anterior.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE HERMITE

A *interpolação polinomial de Hermite* consiste em aproximar uma função contínua e definida no intervalo [0,+1], f(x), por um polinômio de grau ($2m$-1) :

$P_{2m\text{-}1}(x)$, tal que: $P_{2m-1}\left(x_j\right) = f\left(x_j\right)$ e $\left.\dfrac{dP_{2m-1}(x)}{dx}\right|_{x_j} = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x_j}$, para j = 1, 2, ..., m ; sendo os pontos x_i (i = 1, 2, ..., m) os *pontos nodais* ou *pontos de interpolação*.

Esse procedimento pode ser visualizado na Figura a seguir, onde se adotam três *pontos nodais* aproximando a função por um polinômio de quinto grau.

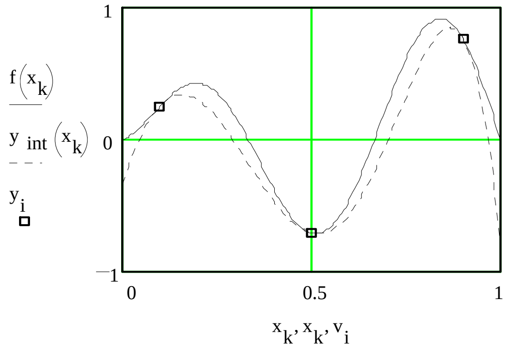


Fig. 5- Interpolação Polinomial de Hermite com 03 Pontos (5^0 Grau)
[Curva contínua: Função **Exata** - Curva Pontilhada: Função **Interpolada**- Pequenos Quadrados: *Pontos Nodais*]

A forma direta de gerar o polinômio interpolador: $P_{2m\text{-}1}(x)$, representado por: $P_{2m-1}(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} c_i \cdot x^i$, é através da resolução do sistema algébrico linear:

$P_{2m-1}(x_j) = \sum_{i=0}^{2m-1} c_i \cdot x_j^i = f(x_j)$ e $P'_{2m-1}(x_j) = \sum_{i=0}^{2m-1} i \cdot c_i \cdot x_j^{i-1} = f'(x_j)$, para j = 1, 2, ..., m

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{2m-1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (2m-1)\cdot x_1^{2m-2} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \cdots & (2m-1)\cdot x_2^{2m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_m & \cdots & (2m-1)\cdot x_m^{2m-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \\ f'(x_1) \\ f'(x_2) \\ \vdots \\ f'(x_m) \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema algébrico linear acima fornece os valores dos coeficientes c_i , para i = 0, 1, ..., $2m$–1.

<u>Exemplo Ilustrativo</u>: Determinar o polinômio interpolador de Hermite de 5º grau da função $f(x) = \sqrt{x} \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot x)$ no intervalo [0,+1], utilizando os seguintes pontos de interpolação: 0,2; 0,5 e 0,8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,2^2 & 0,2^3 & 0,2^4 & 0,2^5 \\ 1 & 0,5 & 0,5^2 & 0,5^3 & 0,5^4 & 0,5^5 \\ 1 & 0,8 & 0,8^2 & 0,8^3 & 0,8^4 & 0,8^5 \\ 0 & 1,0 & 2\cdot 0,2 & 3\cdot 0,2^2 & 4\cdot 0,2^3 & 5\cdot 0,2^4 \\ 0 & 1,0 & 2\cdot 0,5 & 3\cdot 0,5^2 & 4\cdot 0,5^3 & 5\cdot 0,5^4 \\ 0 & 1,0 & 2\cdot 0,8 & 3\cdot 0,8^2 & 4\cdot 0,8^3 & 5\cdot 0,8^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{0,2}\cdot sen(0,4\pi) \\ \sqrt{0,5}\cdot sen(1,0\pi) \\ \sqrt{0,8}\cdot sen(1,6\pi) \\ 2\cdot\pi\sqrt{0,2}\cdot\cos(0,4\pi) + \dfrac{sen(0,4\pi)}{2\sqrt{0,2}} \\ 2\cdot\pi\sqrt{0,5}\cdot\cos(1,0\pi) + \dfrac{sen(1,0\pi)}{2\sqrt{0,5}} \\ 2\cdot\pi\sqrt{0,8}\cdot\cos(1,6\pi) + \dfrac{sen(1,6\pi)}{2\sqrt{0,8}} \end{bmatrix}$$

Ou, numericamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0,04 & 0,008 & 0,0016 & 0,00032 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,0625 & 0,03125 \\ 1 & 0,8 & 0,64 & 0,512 & 0,4096 & 0,32768 \\ 0 & 1,0 & 0,40 & 0,120 & 0,0320 & 0,00800 \\ 0 & 1,0 & 1,00 & 0,750 & 0,5000 & 0,31250 \\ 0 & 1,0 & 1,60 & 1,920 & 2,0480 & 2,04800 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4253254 \\ 0,0000000 \\ -0,85065081 \\ 1,93162836 \\ -4,44288294 \\ 1,20497295 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35225549 \\ -4,96315397 \\ 51,0962438 \\ -152,79666262 \\ 164,21527662 \\ -57,87556516 \end{bmatrix}$$

Representado graficamente abaixo:

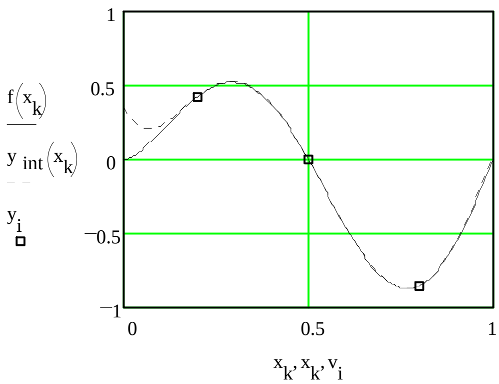


Fig. 6- Interpolação Polinomial de Hermite com 3 Pontos (5º Grau)-Função: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \text{sen}(2\pi x)$

[Curva contínua: Função **Exata**-Curva Pontilhada: Função **Interpolada**-Pequenos Losangos: *Pontos Nodais*]

Observa-se na Figura acima que entre os pontos de interpolação, isto é: $0{,}2 \leq x \leq 1{,}0$ a aproximação polinomial da função é bastante satisfatória, entretanto para valores de $x<0{,}2$ o erro da aproximação é mais pronunciado (compare com a Fig. 2).

O procedimento de determinação direta dos coeficientes da interpolação polinomial de Hermite apresenta as mesmas limitações já apresentadas na interpolação polinomial de Lagrange. No presente caso, a aproximação polinomial pode ser calculada segundo um procedimento semelhante ao de Lagrange, e que é apresentado a seguir.

Visando satisfazer as $2{\cdot}m$ especificações impostas, propõe-se a forma:

$P_{2m-1}(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x)$, em que: $g_j(x) = \left[\mathit{l}_j(x)\right]^2 \cdot \left[f(x_j) + a_j(x - x_j) \right]$ para $j = 1,\dots,m$ são polinômios em x de grau $2 \cdot m - 1$, que satisfazem a:

i-) $g_j(x_i) = \begin{cases} f(x_j) & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$

ii-) $\dfrac{dg_j(x)}{dx} = \left[\mathit{l}_j(x)\right] \cdot \left\{ 2 \cdot \dfrac{d\mathit{l}_j(x)}{dx} \left[f(x_j) + a_j \cdot (x - x_j) \right] + a_j \cdot \mathit{l}_j(x) \right\}$ que para $x = x_i \neq x_j$ é nulo e para $x = x_j$, resultando em:

$$\left.\frac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_j} = f'(x_j) = 2 \cdot A_{jj} \cdot f(x_j) + a_j \Rightarrow a_j = f'(x_j) - 2 \cdot A_{jj} \cdot f(x_j).$$

Obtendo-se:

$$P_{2m-1}(x)=\sum_{j=1}^{m}\left[\mathscr{l}_j(x)\right]^2\cdot\left\{f(x_j)+\left[f'(x_j)-2\cdot A_{jj}\cdot f(x_j)\right]\cdot(x-x_j)\right\} \qquad \text{(A)}$$

Em que: $A_{jj}=\left.\dfrac{d\mathscr{l}_j(x)}{dx}\right|_{x_j}$

Em vista de: $\mathscr{l}_j(x)=\dfrac{p_{nodal}(x)}{\alpha_j\cdot(x-x_j)}\Rightarrow(x-x_j)\cdot\mathscr{l}_j(x)=\dfrac{p_{nodal}(x)}{\alpha_j}$, em que: $\alpha_j=p'_{nodal}(x_j)$.

O que permite expressar (A) na forma:

$P_{2m-1}(x)=\sum_{j=1}^{m}\left[\mathscr{l}_j(x)\right]^2\cdot f(x_j)+\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[f'(x_j)-2\cdot A_{jj}f(x_j)\right]\cdot\dfrac{\mathscr{l}_j(x)}{\alpha_j}\right\}\cdot p_{nodal}(x)$, em que: $A_{jj}=\left.\dfrac{d\mathscr{l}_j(x)}{dx}\right|_{x_j}$, $\alpha_j=p'_{nodal}(x_j)$ e $p_{nodal}(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_m)=\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)$

É importante analisar os graus dos dois termos do membro direito da ultima expressão assim:

(a) Termo: $\sum_{j=1}^{m}\left[\mathscr{l}_j(x)\right]^2\cdot f(x_j)$: polinômio em *x* de grau $2\cdot m-2$;

(b) Termo: $\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[f'(x_j)-2\cdot A_{jj}f(x_j)\right]\cdot\dfrac{\mathscr{l}_j(x)}{\alpha_j}\right\}\cdot p_{nodal}(x)=q_{m-1}(x)\cdot p_{nodal}(x)$ é um polinômio em *x* de grau $2\cdot m-1$ resultante do produto de um polinômio em *x* de grau $m-1$, $q_{m-1}(x)$, por um polinômio em *x* de grau *m*,

$p_{nodal}(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_m)=\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)$, o *polinômio nodal.*

Outra forma da interpolação de Hermite pode ser obtida se colocando em (A) os termos $f(x_j)$ e $f'(x_j)$ em evidência, resultando em:

$f(x)\cong P_{2m-1}(x)=\sum_{j=1}^{m}s_j(x)\cdot f(x_j)+\sum_{j=1}^{m}r_j(x)\cdot f'(x_j)$, em que:

$s_j(x)=\left[1-2\cdot A_{jj}\cdot(x-x_j)\right]\cdot\left[\mathscr{l}_j(x)\right]^2$ e $r_j(x)=(x-x_j)\cdot\left[\mathscr{l}_j(x)\right]^2$ [para j =1, 2, ..., m] são polinômios de grau $2\cdot m-1$em *x* e $l_j(x)$ e A_{jj} tem o mesmo significado apresentado na interpolação de Lagrange.

<u>Exemplo Ilustrativo</u>:No exemplo anterior, tem-se: x_1 =0,2; x_2 = 0,5 e x_3 = 0,8.Assim:

$$\mathscr{l}_1(x)=\frac{(x-1/2)\cdot(x-4/5)}{(1/5-1/2)\cdot(1/5-4/5)}=\frac{5}{9}\cdot\left(4-13\cdot x+10\cdot x^2\right)\Rightarrow A_{11}=\left.\frac{d\mathscr{l}_1(x)}{dx}\right|_{0,2}=-5$$

$$\mathscr{l}_2(x)=\frac{(x-1/5)\cdot(x-4/5)}{(1/2-1/5)\cdot(1/2-4/5)}=-\frac{4}{9}\cdot\left(4-25\cdot x+25\cdot x^2\right)\Rightarrow A_{22}=\left.\frac{d\mathscr{l}_2(x)}{dx}\right|_{0,5}=0$$

$$l_3(x)=\frac{(x-1/5)\cdot(x-1/2)}{(4/5-1/5)\cdot(4/5-1/2)}=\frac{5}{9}\cdot\left(1-7\cdot x+10\cdot x^2\right)\Rightarrow A_{33}=\left.\frac{dl_3(x)}{dx}\right|_{0,8}=5$$

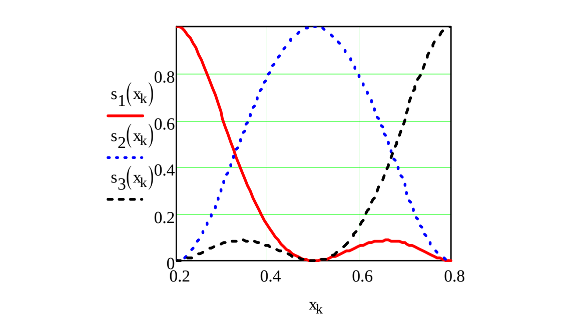
Determinando-se:

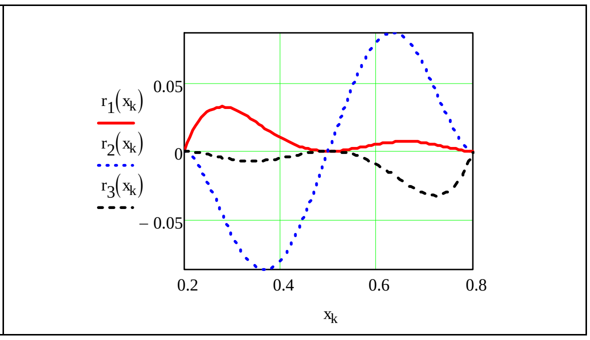
$$s_1(x)=\frac{25}{81}\cdot(10\cdot x-1)\cdot\left[4-13\cdot x+10\cdot x^2\right]^2 \text{ e } r_1(x)=\frac{5}{81}\cdot(5\cdot x-1)\cdot\left[4-13\cdot x+10\cdot x^2\right]^2;$$

$$s_2(x)=\frac{16}{81}\cdot\left(4-25\cdot x+25\cdot x^2\right)^2 \text{ e } r_2(x)=\frac{8}{81}\cdot(2\cdot x-1)\cdot\left(4-25\cdot x+25\cdot x^2\right)^2;$$

$$s_3(x)=\frac{25}{81}\cdot(9-10\cdot x)\cdot\left[1-7\cdot x+10\cdot x^2\right]^2 \text{ e } r_3(x)=\frac{5}{81}\cdot(5\cdot x-4)\cdot\left[1-7\cdot x+10\cdot x^2\right]^2$$

Os gráficos desses polinômios são mostrados abaixo.





Resultando em:

$$P_5(x)=(10\cdot x-1)\left[\frac{(x-0,5)\cdot(x-0,8)}{0,18}\right]^2\cdot f(0,2)+\left[\frac{(x-0,2)\cdot(x-0,8)}{0,09}\right]^2\cdot f(0,5)+$$

$$+(9-10\cdot x)\left[\frac{(x-0,2)\cdot(x-0,5)}{0,18}\right]^2\cdot f(0,8)+(x-0,2)\cdot\left[\frac{(x-0,5)\cdot(x-0,8)}{0,18}\right]^2\cdot f'(0,2)+$$

$$+(x-0,5)\cdot\left[\frac{(x-0,2)\cdot(x-0,8)}{0,09}\right]^2\cdot f'(0,5)+(x-0,8)\cdot\left[\frac{(x-0,2)\cdot(x-0,5)}{0,18}\right]^2\cdot f'(0,8)$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧

ERRO NA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE HERMITE

De forma semelhante à interpolação polinomial de Lagrange, chega-se à seguinte expressão do erro na interpolação polinomial de Hermite:

$$\boxed{\text{Erro}(x)=\frac{1}{(2m)!}\cdot\left[\frac{d^{2m}f(t)}{dt^{2m}}\right]_{t=\xi}\cdot\left[p_{nodal}(x)\right]^2}$$, sendo ξ *algum* ponto de **I** e :

$p_{nodal}(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)$: um polinômio em x de grau m.

Analisando a expressão acima, chegam-se às seguintes conclusões:

(a) o erro da interpolação é nulo para funções polinomiais em x de grau inferior a $2\cdot m$, pois:

$\frac{d^{2m}f(x)}{dx^{2m}}\equiv 0$ para todo valor de x;

(b) se $f(x)$ for uma função polinomial em x de grau $2{\cdot}m$ em que c_{2m} é o coeficiente de x^{2m}, então o erro da interpolação será: $\text{Erro}(x) = c_{2m} \cdot \left[p_{nodal}(x) \right]^2$;

(c) se $f(x)$ for uma função polinomial em x de grau $n > 2m$ então o erro da interpolação será:

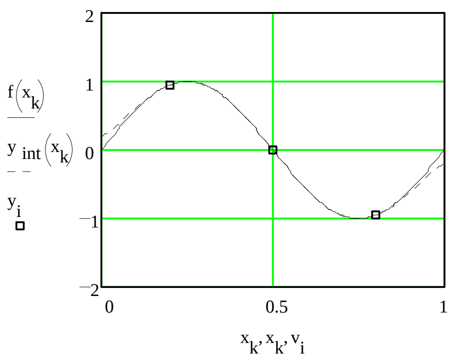
$\text{Erro}(x) = q_{n-2m}(x) \cdot \left[p_{nodal}(x) \right]^2$, em que :$q_{n-2m}(x)$ é um polinômio em x de grau n-$2{\cdot}m$

<u>Exemplo Ilustrativo</u>: Analise o valor máximo do erro na interpolação de 5º grau da função: $f(x) = sen(2\cdot\pi\cdot x)$ no intervalo [0,+1], utilizando os valores da função e de sua derivada nos pontos : 0,2; 0,5 e 0,8.

Da expressão de $f(x)$ verifica-se que: $\dfrac{d^6 f(x)}{dx^6} = -64\cdot\pi^6 sen(2\cdot\pi\cdot x) \Rightarrow \left|\dfrac{d^6 f(x)}{dx^6}\right| \leq 64\cdot\pi^6$. O que permite concluir que: $|\text{Erro}(x)| \leq \dfrac{64\cdot\pi^6}{6!}\max|p_{nodal}(x)|^2$, mas o $\max|p_{nodal}(x)|^2$ ocorre nos limites do intervalo, isto é, em x=0 e em x=+1, cujo valor é:

$|p_{nodal}(0)|^2 = |p_{nodal}(1)|^2 = 0,0064$, logo: $|\text{Erro(x)}| \leq \dfrac{64\pi^6}{6!}0,0064 = 0,5469$ para $0 \leq x \leq 1$.

A seguir, representa-se o gráfico de $f(x)$ *versus* x (curva contínua) e de $f_{ap}(x)$, obtido por interpolação polinomial de Hermite com os três pontos apresentados, *versus* x (curva pontilhada), apresentando também ao lado os valores dos erros em x=0 e em x=1.



Erro em x=0 : -0,1935
Erro em x=1 : +0,1935

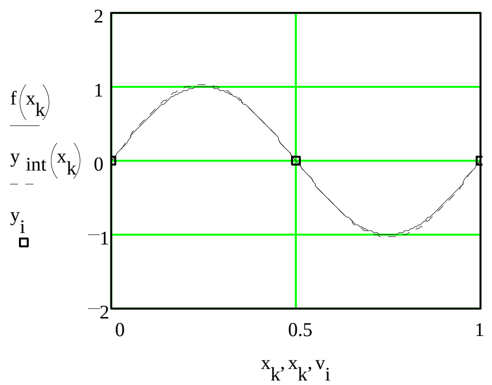
Fig. 7- Interpolação Polinomial de Hermite com 3 Pontos (5º Grau)Função: $f(x) = sen(2\cdot\pi\cdot x)$

[Curva contínua: Função **Exata**-Curva Pontilhada: Função **Interpolada** com pontos 0,20; 0,50 e 0,80]

De forma semelhante à apresentada no exemplo ilustrativo da interpolação de Lagrange, investiga-se a melhoria da interpolação utilizando x=0 e x=1 além de x=0,5 como pontos de interpolação, neste caso pode se estimar um valor superior do módulo do erro através de (II.15), resultando em: $|\text{Erro}(x)| \leq \dfrac{64\cdot\pi^6}{6!}\max|p_{nodal}(x)|^2$, no presente caso o polinômio nodal é $p_{nodal}(x) = x \cdot (x-0,5) \cdot (x-1) = x^3 - 1,5x^2 + 0,5x \Rightarrow \dfrac{dp_{nodal}(x)}{dx} = 3x^2 - 3x + 0,5$ que se anula nos pontos: $0,5\left(1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ em que $|p_{nodal}(x)| = 0,0481$. Assim:

$\max |p_{nodal}(x)|^2 = 0,0023$ e $|\text{Erro}(x)| \leq \dfrac{64 \cdot \pi^6}{6!} \cdot 0,0023 = 0,1978$ para $0 \leq x \leq 1$.

A representação gráfica dessa nova aproximação é mostrada na Figura a seguir.



Erros máximos (em módulo) em x=0,1766 e em x=0,8234 , com o valor de 0,03915

Fig. 8- Interpolação Polinomial de Hermite com 3 Pontos (5º Grau)Função: $f(x) = sen(2 \cdot \pi \cdot x)$

[Curva contínua: Função **Exata**-Curva Pontilhada: Função **Interpolada** com pontos 0; 0,50 e 1]

<u>Exemplo Proposto</u>: Analise o valor máximo do erro na interpolação de 5º grau da função: $f(x) = \exp(-x)$ no intervalo [0,+1], utilizando os valores da função e de sua derivada nos seguintes pontos de interpolação: 0,2; 0,5 e 0,8. Refaça o exemplo adotando como novos pontos de interpolação : 0 ; 0,50 e 1e compare com os resultados anteriores.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧

<u>INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MISTA DE LAGRANGE/HERMITE</u>

A *interpolação polinomial mista de Lagrange/Hermite* será definida como sendo a aproximação de uma função contínua e definida no intervalo [0,+1], $f(x)$, por um polinômio em *x* de grau $2 \cdot m$, $P_{2m}(x)$, satisfazendo a: $P_{2m}(x_j) = f(x_j)$ e $P'_{2m}(x_j) = f'(x_j)$ nos pontos de interpolação <u>*internos*</u>, isto é, para $j = 1, 2, \cdots, m$ e, além disso, uma das duas possibilidades abaixo:

(a) $P_{2m}(x_0) = f(x_0)$, em que x_0 = 0 [*extremidade inferior* é também *ponto de interpolação*];

(b) $P_{2m}(x_{m+1}) = f(x_{m+1})$, em que x_{m+1} = 1 [*extremidade superior* é também *ponto de interpolação*].

A *interpolação polinomial mista de Lagrange/Hermite* pode também ser definida como a aproximação de uma função contínua e definida no intervalo [0,+1], $f(x)$, por um polinômio em *x* de grau $2 \cdot m + 1$, $P_{2m+1}(x)$, satisfazendo a: $P_{2m+1}(x_j) = f(x_j)$ e

$P'_{2m+1}\left(x_j\right) = f'\left(x_j\right)$ nos pontos de interpolação *internos*, isto é, para $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ e, além disso; $P_{2m+1}\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)$, em que $x_0 = 0$ e $P_{2m+1}\left(x_{m+1}\right) = f\left(x_{m+1}\right)$, em que $x_{m+1} = 1$ [*extremidades inferior* e *superior* são também *pontoa de interpolação*].

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MISTA DE LAGRANGE/HERMITE: usando a extremidade inferior como ponto de interpolação

A forma direta de gerar o polinômio interpolador: $P_{2m}(x)$, representado por: $P_{2m}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2m} c_i \cdot x^i$, é através da resolução do sistema algébrico linear:

$$\begin{array}{l} P_{2m}\left(x_j\right) = \sum_{i=0}^{2m} c_i \cdot x_j^i = f\left(x_j\right) \text{ para } j = 0, 1, 2, ..., m \text{ e} \\ P'_{2m}\left(x_j\right) = \sum_{i=0}^{2m} i \cdot c_i \cdot x_j^{i-1} = f'\left(x_j\right) \text{ para } j = 1, 2, ..., m \end{array},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2m} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{2m} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & 2\cdot m\cdot x_1^{2m-1} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \cdots & 2\cdot m\cdot x_2^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_m & \cdots & 2\cdot m\cdot x_m^{2m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \\ c_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \\ f'(x_1) \\ f'(x_2) \\ \vdots \\ f'(x_m) \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema algébrico linear acima fornece os valores dos coeficientes c_i , para $i = 0, 1, ..., 2\cdot m$.

Fundamentado na interpolação de Hermite, chega-se a:

$$P_{2m}(x) = \left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2 \cdot f\left(x_0\right) + \sum_{j=1}^{m} g_j\left(x\right) \cdot$$

Em que: $p_{nodal}(x) = \left(x - x_1\right)\cdot\left(x - x_2\right)\cdots\left(x - x_m\right)$ [o polinômio nodal considerando exclusivamente os *pontos internos de interpolação*] e

$g_j\left(x\right) = \frac{x}{x_j}\cdot\left[l_j\left(x\right)\right]^2\cdot\left[f\left(x_j\right) + a_j\cdot\left(x - x_j\right)\right]$, para $j = 1,..., m$ são polinômios em x de grau $2\cdot m$, que devem satisfazer a:

i-) $g_j\left(x_i\right) = \begin{cases} f\left(x_j\right) & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$ (já satisfaz!); ii-) $g_j\left(x_0\right) = g_j\left(0\right) = 0$ (já satisfaz!);

iii-) $\left.\frac{dg_j\left(x\right)}{dx}\right|_{x_i} = f'\left(x_j\right)\cdot\delta_{i,j}$, calculando a derivada:

$$\frac{dg_j(x)}{dx}=\left[\ell_j(x)\right]\left\{\left[2\cdot\frac{x}{x_j}\cdot\frac{d\ell_j(x)}{dx}+\frac{\ell_j(x)}{x_j}\right]\cdot\left[f\left(x_j\right)+a_j\cdot\left(x-x_j\right)\right]+a_j\cdot\frac{x}{x_j}\cdot\ell_j(x)\right\}$$

para: $x=x_i\neq x_j$ $\left.\frac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_i}=0$ pois $\ell_j(x_i)=0$ quando $i\neq j$ (já satisfaz!);

para : $x=x_j$, $\left.\frac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_j}=f'\left(x_j\right)=\left[2\cdot A_{jj}+\frac{1}{x_j}\right]\cdot f\left(x_j\right)+a_j\Rightarrow a_j=f'\left(x_j\right)-\left[2A_{jj}+\frac{1}{x_j}\right]\cdot f\left(x_j\right)$

Assim, o polinômio $P_{2m}(x)$ é expresso por:

$$P_{2m}(x)=\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2\cdot f\left(x_0\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{x}{x_j}\left[\ell_j(x)\right]^2\cdot\left\{f\left(x_j\right)+\left[f'\left(x_j\right)-\left(2\cdot A_{jj}+\frac{1}{x_j}\right)\cdot f(x_j)\right]\cdot(x-x_j)\right\} \qquad \text{(B)}$$

em que: $A_{jj}=\left.\frac{d\ell_j(x)}{dx}\right|_{x_j}$ e $\alpha_j=p'_{nodal}(x_j)$

Usando na expressão acima a propriedade: $\left(x-x_j\right)\cdot\ell_j(x)=\frac{p_{nodal}(x)}{\alpha_j}$, obtém-se:

$$P_{2m}(x)=\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2\cdot f\left(x_0\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{x}{x_j}\cdot\left[\ell_j(x)\right]^2\cdot f\left(x_j\right)+\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[f'\left(x_j\right)-\left(2\cdot A_{jj}+\frac{1}{x_j}\right)f(x_j)\right]\cdot\frac{\ell_j(x)}{\alpha_j\cdot x_j}\right\}\cdot x\cdot p_{nodal}(x)$$

É importante analisar os graus dos três termos do membro direito da última expressão, assim:

(a) Termo: $\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2\cdot f\left(x_0\right)$ polinômio em x de grau $2\cdot m$;

(b) Termo: $\sum_{j=1}^{m}\frac{x}{x_j}\cdot\left[\ell_j(x)\right]^2\cdot f\left(x_j\right)$: polinômio em x de grau $2\cdot m-1$;

(c) Termo: $\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[f'\left(x_j\right)-\left(2\cdot A_{jj}+\frac{1}{x_j}\right)f(x_j)\right]\cdot\frac{\ell_j(x)}{\alpha_j\cdot x_j}\right\}\cdot x\cdot p_{nodal}(x)=q_{m-1}(x)\cdot x\cdot p_{nodal}(x)$

é um polinômio em x de grau $2\cdot m$ resultante do produto de um polinômio em x de grau $m-1$, $q_{m-1}(x)$, por um polinômio em x de grau $m+1$, $x\cdot p_{nodal}(x)$. Esse último polinômio pode ser interpretado como um novo *polinômio nodal*, pois x=x_0=0 passou a ser também um ponto de interpolação, isto é: $p^*_{nodal}(x)=\left(x-x_0\right)\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-x_m\right)=x\cdot p_{nodal}(x)$.

Colocando em (B) os termos $f\left(x_j\right)$ e $f'\left(x_j\right)$ em evidência, resulta:

$\boxed{f(x)\cong P_{2m}(x)=\sum_{j=0}^{m}s_j(x)\cdot f\left(x_j\right)+\sum_{j=1}^{m}r_j(x)\cdot f'\left(x_j\right)}$, em que: $s_0(x)=\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2$,

$s_j(x) = \frac{x}{x_j} \cdot \left[l_j(x) \right]^2 \cdot \left\{ 1 - \left(2 \cdot A_{jj} + \frac{1}{x_j} \right) \cdot (x - x_j) \right\}$ para $j = 1, 2, \cdots, m$ e

$r_j(x) = \frac{x}{x_j} \cdot \left[l_j(x) \right]^2 \cdot (x - x_j)$ todos polinômios em x de grau $2 \cdot m$.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MISTA DE LAGRANGE/HERMITE: usando a extremidade superior como ponto de interpolação

A forma direta de gerar o polinômio interpolador: P_{2m} (x), representado por: $P_{2m}(x) = \sum_{i=0}^{2m} c_i \cdot x^i$, é através da resolução do sistema algébrico linear:

$$P_{2m}(x_j) = \sum_{i=0}^{2m} c_i \cdot x_j^i = f(x_j) \text{ para } j = 1, 2, ..., m, m+1 \text{ e}$$

,

$$P'_{2m}(x_j) = \sum_{i=0}^{2m} i \cdot c_i \cdot x_j^{i-1} = f'(x_j) \text{ para } j = 1, 2, ..., m$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2m} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{2m} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & 2 \cdot m \cdot x_1^{2m-1} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \cdots & 2 \cdot m \cdot x_2^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_m & \cdots & 2 \cdot m \cdot x_m^{2m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \\ c_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \\ f(1) \\ f'(x_1) \\ f'(x_2) \\ \vdots \\ f'(x_m) \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema algébrico linear acima fornece os valores dos coeficientes c_i , para i = 0, 1, ..., $2 \cdot m$.

Fundamentado na interpolação de Hermite, chega-se a:

$$P_{2m}(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x) + \left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)} \right]^2 \cdot f(x_{m+1})$$

Em que: $p_{nodal}(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_m)$ e

$g_j(x) = \frac{1-x}{1-x_j} \cdot \left[l_j(x) \right]^2 \cdot \left[f(x_j) + a_j \cdot (x - x_j) \right]$, para j= 1,..., m são polinômios em x de grau $2 \cdot m$, que devem satisfazer a:

i-) $g_j(x_i) = \begin{cases} f(x_j) & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$ (já satisfaz!); ii-) $g_j(x_{m+1}) = g_j(1) = 0$ (já satisfaz!);

iii-) $\left.\dfrac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_j)\cdot\delta_{i,j}$, calculando a derivada:

$$\frac{dg_j(x)}{dx} = \left[l_j(x)\right]\left\{\left[2\cdot\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\frac{dl_j(x)}{dx} - \frac{l_j(x)}{1-x_j}\right]\cdot\left[f(x_j)+a_j\cdot(x-x_j)\right]+a_j\cdot\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot l_j(x)\right\}$$

para: $x = x_i \neq x_j$ $\left.\dfrac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_i} = 0$ pois $l_j(x_i) = 0$ quando $i \neq j$ (já satisfaz!);

para : $x = x_j$, $\left.\dfrac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_j} = f'(x_j) = \left[2\cdot A_{jj} - \dfrac{1}{1-x_j}\right]\cdot f(x_j) + a_j \Rightarrow a_j = f'(x_j) - \left[2\cdot A_{jj} - \dfrac{1}{1-x_j}\right]\cdot f(x_j)$

Assim, o polinômio $P_{2m}(x)$ é expresso por:

$$\boxed{\begin{aligned} P_{2m}(x) &= \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[l_j(x)\right]^2\cdot\left\{f(x_j)+\left[f'(x_j)-\left(2\cdot A_{jj}-\frac{1}{1-x_j}\right)\cdot f(x_j)\right]\cdot(x-x_j)\right\}+ \\ &+\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2\cdot f(x_{m+1}) \\ &\text{em que: } A_{jj} = \left.\frac{dl_j(x)}{dx}\right|_{x_j} \quad \text{e} \quad \alpha_j = p'_{nodal}(x_j)\end{aligned}} \qquad \text{(C)}$$

Usando na expressão acima a propriedade: $(x-x_j)\cdot l_j(x) = \dfrac{p_{nodal}(x)}{\alpha_j}$, obtém-se:

$$P_{2m}(x) = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[l_j(x)\right]^2\cdot f(x_j) + \left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2\cdot f(x_{m+1}) +$$

$$+\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[f'(x_j)-\left(2\cdot A_{jj}-\frac{1}{1-x_j}\right)\cdot f(x_j)\right]\cdot\frac{l_j(x)}{\alpha_j(1-x_j)}\right\}\cdot(1-x)\cdot p_{nodal}(x)$$

É importante analisar os graus dos três termos do membro direito da última expressão, assim:

(a) Termo: $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[l_j(x)\right]^2\cdot f(x_j)$: polinômio em *x* de grau $2\cdot m-1$;

(b) Termo: $\left[\dfrac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2\cdot f(x_{m+1})$: polinômio em *x* de grau $2\cdot m$;

(c) Termo: $\displaystyle\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[f'(x_j)-\left(2\cdot A_{jj}-\frac{1}{1-x_j}\right)\cdot f(x_j)\right]\cdot\frac{l_j(x)}{\alpha_j(1-x_j)}\right\}\cdot(1-x)\cdot p_{nodal}(x) = q_{m-1}(x)\cdot(1-x)\cdot p_{nodal}(x)$

é um polinômio em *x* de grau $2\cdot m$ resultante do produto de um polinômio em *x* de grau $m-1$, $q_{m-1}(x)$, por um polinômio em *x* de grau $m+1$, $(1-x)\cdot p_{nodal}(x)$.

Esse último polinômio pode ser interpretado como um novo *polinômio nodal*, pois $x=x_{m+1}=1$, passou a ser também um ponto de interpolação, isto é:

$p^*_{nodal}(x) = (x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)\cdot(x-x_{m+1}) = -(1-x)\cdot p_{nodal}(x)$.

Colocando em (C) os termos $f(x_j)$ e $f'(x_j)$ em evidência, resulta:

$\boxed{f(x) \cong P_{2m}(x) = \sum_{j=1}^{m+1} s_j(x)\cdot f(x_j) + \sum_{j=1}^{m} r_j(x)\cdot f'(x_j)}$, em que:

$s_j(x) = \left(\dfrac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[l_j(x)\right]^2\cdot\left\{1-\left(2\cdot A_{jj} - \dfrac{1}{1-x_j}\right)\cdot(x-x_j)\right\}$ para $j = 1, 2, \cdots, m$,

$s_{m+1}(x) = \left[\dfrac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2$ e $r_j(x) = \left(\dfrac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[l_j(x)\right]^2\cdot(x-x_j)$ todos polinômios em x de grau $2\cdot m$.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MISTA DE LAGRANGE/HERMITE:usando ambas as extremidades como pontos de interpolação

A forma direta de gerar o polinômio interpolador: $P_{2m+1}(x)$, representado por: $P_{2m+1}(x) = \sum_{i=0}^{2m+1} c_i\cdot x^i$, é através da resolução do sistema algébrico linear:

$$P_{2m+1}(x_j) = \sum_{i=0}^{2m+1} c_i\cdot x_j^i = f(x_j) \text{ para } j = 0, 1, 2, ..., m, m+1 \text{ e}$$

,

$$P'_{2m+1}(x_j) = \sum_{i=0}^{2m+1} i\cdot c_i\cdot x_j^{i-1} = f'(x_j) \text{ para } j = 1, 2, ..., m$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2m} & x_1^{2m+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2m} & x_2^{2m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{2m} & x_m^{2m+1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & 2\cdot m\cdot x_1^{2m-1} & 2\cdot(m+1)\cdot x_1^{2m} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \cdots & 2\cdot m\cdot x_2^{2m-1} & 2\cdot(m+1)\cdot x_2^{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_m & \cdots & 2\cdot m\cdot x_m^{2m-1} & 2\cdot(m+1)\cdot x_m^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \\ c_{2m} \\ c_{2m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \\ f(1) \\ f'(x_1) \\ f'(x_2) \\ \vdots \\ f'(x_m) \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema algébrico linear acima fornece os valores dos coeficientes c_i , para i = 0, 1, ..., $2\cdot m+1$.

Fundamentado na interpolação de Hermite, chega-se a:

$$P_{2m+1}(x) = \left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2\cdot(1-x)\cdot f(x_0) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x) + \left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2\cdot x\cdot f(x_{m+1})$$

Em que: $p_{nodal}(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdots(x - x_m)$ e

$g_j(x) = \dfrac{x\cdot(1-x)}{x_j\cdot(1-x_j)}\cdot\left[\mathit{l}_j(x)\right]^2\cdot\left[f(x_j) + a_j\cdot(x - x_j)\right]$, para j= 1,..., m são polinômios em x de grau $2\cdot m+1$, que devem satisfazer a:

i-) $g_j(x_i) = \begin{cases} f(x_j) & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$ (já satisfaz!); ii-) $g_j(x_0) = g_j(0) = 0$ (já satisfaz!);

iii-) $g_j(x_{m+1}) = g_j(1) = 0$ (já satisfaz!);

iv-) $\left.\dfrac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_j)\cdot\delta_{i,j}$, calculando a derivada:

$$\frac{dg_j(x)}{dx} = \left[\mathit{l}_j(x)\right]\left\{\left[2\cdot\frac{x\cdot(1-x)}{x_j\cdot(1-x_j)}\cdot\frac{d\mathit{l}_j(x)}{dx} + \frac{(1-2\cdot x)\cdot\mathit{l}_j(x)}{x_j\cdot(1-x_j)}\right]\cdot\left[f(x_j) + a_j\cdot(x - x_j)\right] + a_j\cdot\frac{x\cdot(1-x)}{x_j\cdot(1-x_j)}\cdot\mathit{l}_j(x)\right\}$$

para: $x = x_i \neq x_j$ $\left.\dfrac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_i} = 0$ pois $\mathit{l}_j(x_i) = 0$ quando $i \neq j$ (já satisfaz!);

para : $x = x_j$, $\left.\dfrac{dg_j(x)}{dx}\right|_{x_j} = f'(x_j) = \left[2\cdot A_{jj} + \dfrac{1-2\cdot x_j}{x_j\cdot(1-x_j)}\right]\cdot f(x_j) + a_j \Rightarrow$

$$a_j = f'(x_j) - \left[2\cdot A_{jj} + \frac{1-2\cdot x_j}{x_j\cdot(1-x_j)}\right]\cdot f(x_j)$$

Assim, o polinômio $P_{2m+1}(x)$ é expresso por:

$$\boxed{\begin{aligned} &P_{2m+1}(x) = \left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2\cdot(1-x)\cdot f(x_0) + \\ &\sum_{j=1}^{m}\frac{x\cdot(1-x)}{x_j\cdot(1-x_j)}\cdot\left[\mathit{l}_j(x)\right]^2\cdot\left\{f(x_j) + \left[f'(x_j) - \left(2\cdot A_{jj} + \frac{1-2\cdot x_j}{x_j\cdot(1-x_j)}\right)\cdot f(x_j)\right]\cdot(x - x_j)\right\} + \\ &+\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2\cdot x\cdot f(x_{m+1}) \\ &\text{em que: } A_{jj} = \left.\frac{d\mathit{l}_j(x)}{dx}\right|_{x_j} \quad \text{e} \quad \alpha_j = p'_{nodal}(x_j) \end{aligned}} \qquad \text{(D)}$$

Usando na expressão acima a propriedade: $(x - x_j)\cdot\mathit{l}_j(x) = \dfrac{p_{nodal}(x)}{\alpha_j}$, obtém-se:

$$P_{2m+1}(x)=\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(0)}\right]^2\cdot(1-x)\cdot f\left(x_0\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{x\cdot(1-x)}{x_j\cdot\left(1-x_j\right)}\cdot\left[\ell_j(x)\right]^2\cdot f\left(x_j\right)+\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2\cdot x\cdot f\left(x_{m+1}\right)+$$

$$+\left\langle\sum_{j=1}^{m}\frac{x\cdot(1-x)}{x_j\cdot\left(1-x_j\right)}\cdot\frac{\ell_j(x)}{\alpha_j}\cdot\left\{\left[f'\left(x_j\right)-\left(2\cdot A_{jj}+\frac{1-2\cdot x_j}{x_j\cdot\left(1-x_j\right)}\right)\cdot f\left(x_j\right)\right]\right\}\right\rangle\cdot\cancel{x}\cdot(\cancel{1}-\cancel{x})\cdot p_{nodal}(x)$$

É importante analisar os graus dos três termos do membro direito da última expressão, assim:

(a) Termo: $\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[\ell_j(x)\right]^2\cdot f\left(x_j\right)$: polinômio em x de grau $2\cdot m-1$;

(b) Termo: $\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2\cdot f\left(x_{m+1}\right)$: polinômio em x de grau $2\cdot m$;

(c) Termo: $\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[f'\left(x_j\right)-\left(2\cdot A_{jj}-\frac{1}{1-x_j}\right)\cdot f\left(x_j\right)\right]\cdot\frac{\ell_j(x)}{\alpha_j\left(1-x_j\right)}\right\}\cdot(1-x)\cdot p_{nodal}(x)=q_{m-1}(x)\cdot(1-x)\cdot p_{nodal}(x)$

é um polinômio em x de grau $2\cdot m$ resultante do produto de um polinômio em x de grau $m-1$, $q_{m-1}(x)$, por um polinômio em x de grau $m+1$, $(1-x)\cdot p_{nodal}(x)$.

Esse último polinômio pode ser interpretado como um novo *polinômio nodal*, pois $x=x_{m+1}=1$, passou a ser também um ponto de interpolação, isto é:

$p^*_{nodal}(x)=\left(x-x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-x_m\right)\cdot\left(x-x_{m+1}\right)=-(1-x)\cdot p_{nodal}(x)$.

Colocando em (D) os termos $f\left(x_j\right)$ e $f'\left(x_j\right)$ em evidência, resulta:

$\boxed{f(x)\cong P_{2m+1}(x)=\sum_{j=0}^{m+1}s_j(x)\cdot f\left(x_j\right)+\sum_{j=1}^{m}r_j(x)\cdot f'\left(x_j\right)}$, em que:

$s_j(x)=\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[\ell_j(x)\right]^2\cdot\left\{1-\left(2\cdot A_{jj}-\frac{1}{1-x_j}\right)\cdot\left(x-x_j\right)\right\}$ para $j=1,2,\cdots,m$,

$s_{m+1}(x)=\left[\frac{p_{nodal}(x)}{p_{nodal}(1)}\right]^2$ e $r_j(x)=\left(\frac{1-x}{1-x_j}\right)\cdot\left[\ell_j(x)\right]^2\cdot\left(x-x_j\right)$ todos polinômios em x de grau $2\cdot m$.

ERRO NA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MISTA DE LAGRANGE/HERMITE:usando a extremidade inferior como ponto de interpolação

De forma semelhante à interpolação polinomial de Lagrange, chega-se à seguinte expressão do erro na interpolação polinomial mista de Lagrange/Hermite:

$\boxed{\text{Erro}(x)=\frac{1}{(2\cdot m+1)!}\left[\frac{d^{2m+1}f(t)}{dt^{2m+1}}\right]_{t=\xi}\cdot x\cdot\left[p_{nodal}(x)\right]^2}$, onde ξ é *algum* ponto de **I** e:

$p_{nodal}(x)=\prod_{i=1}^{m}\left(x-x_i\right)$: polinômio de grau m.

Analisando a expressão acima, chegam-se as seguintes conclusões:

(a) o erro da interpolação é nulo para funções polinomiais de grau inferior a $2 \cdot m + 1$, pois:
$\dfrac{d^{2m+1} f(t)}{dt^{2m+1}} = 0$ para todo valor de *t*;

(b) se $f(x)$ for uma função polinomial de grau $2 \cdot m + 1$ cujo coeficiente de x^{2m+1} é c_{2m+1} então o erro da interpolação será: $\text{Erro}(x) = c_{2m+1} \cdot x \cdot \left[p_{nodal}(x) \right]^2$;

(c) se $f(x)$ for uma função polinomial em *x* de grau $n > 2 \cdot m + 1$ então o erro da interpolação será: $\text{Erro}(x) = q_{n-2m-1}(x) \cdot x \cdot [p_{nodal}(x)]^2$, em que :$q_{n-2m-1}(x)$ é um polinômio em *x* de grau $n - 2 \cdot m - 1$.

<u>ERRO NA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MISTA DE LAGRANGE/HERMITE:usando a extremidade superior como ponto de interpolação</u>

De forma semelhante à interpolação polinomial de Lagrange, chega-se à seguinte expressão do erro na interpolação polinomial mista de Lagrange/Hermite:

$\boxed{\text{Erro}(x) = \dfrac{1}{(2 \cdot m + 1)!} \left[\dfrac{d^{2m+1} f(t)}{dt^{2m+1}} \right]_{t=\xi} \cdot (x-1) \cdot \left[p_{nodal}(x) \right]^2}$, onde ξ é *algum* ponto de **I** e:

$p_{nodal}(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$: polinômio de grau *m*.

Analisando a expressão acima, chegam-se as seguintes conclusões:

(a) o erro da interpolação é nulo para funções polinomiais de grau inferior a $2 \cdot m + 1$, pois:
$\dfrac{d^{2m+1} f(t)}{dt^{2m+1}} = 0$ para todo valor de *t*;

(b) se $f(x)$ for uma função polinomial de grau $2 \cdot m + 1$ cujo coeficiente de x^{2m+1} é c_{2m+1} então o erro da interpolação será: $\text{Erro}(x) = c_{2m+1} \cdot x \cdot \left[p_{nodal}(x) \right]^2$;

(c) se $f(x)$ for uma função polinomial em *x* de grau $n > 2 \cdot m + 1$ então o erro da interpolação será:
$\text{Erro}(x) = q_{n-2m-1}(x) \cdot (x-1) \cdot [p_{nodal}(x)]^2$, em que :$q_{n-2m-1}(x)$ é um polinômio em *x* de grau $n - 2 \cdot m - 1$.

<u>ERRO NA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL MISTA DE LAGRANGE/HERMITE:usando as extremidades inferior e superior como pontos de interpolação</u>

De forma semelhante à interpolação polinomial de Lagrange, chega-se à seguinte expressão do erro na interpolação polinomial mista de Lagrange/Hermite:

$\boxed{\text{Erro}(x) = \dfrac{1}{(2 \cdot m + 2)!} \left[\dfrac{d^{2m+2} f(t)}{dt^{2m+2}} \right]_{t=\xi} \cdot x \cdot (x-1) \cdot \left[p_{nodal}(x) \right]^2}$, onde ξ é *algum* ponto de **I** e:

$p_{nodal}(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$: polinômio de grau *m*.

Analisando a expressão acima, chegam-se as seguintes conclusões:

(a) o erro da interpolação é nulo para funções polinomiais de grau inferior a $2 \cdot m + 2$, pois:

$\dfrac{d^{2m+2} f(t)}{dt^{2m+2}} = 0$ para todo valor de t;

(b) se $f(x)$ for uma função polinomial de grau $2 \cdot m + 2$ cujo coeficiente de x^{2m+2} é c_{2m+2} então o erro da interpolação será: $\text{Erro}(x) = c_{2m+2} \cdot x \cdot (x-1) \cdot \left[p_{nodal}(x) \right]^2$;

(c) se $f(x)$ for uma função polinomial em x de grau $n > 2 \cdot m + 2$ então o erro da interpolação será: $\text{Erro}(x) = q_{n-2m-2}(x) \cdot x \cdot (x-1) \cdot [p_{nodal}(x)]^2$, em que :$q_{n-2m-2}(x)$ é um polinômio em x de grau $n - 2 \cdot m - 2$.