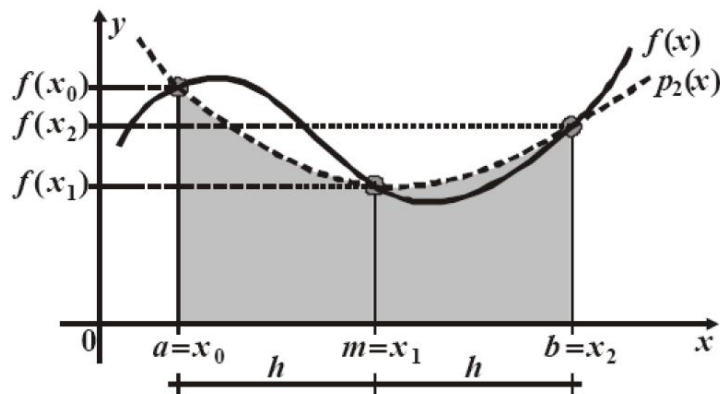


Aula 5- Integração numérica: Fórmulas de Newton-Cotes.

Objetivo:

Apresentar o método de integração numérica baseado nas fórmulas de Newton-Cotes através da aproximação de uma função que se quer integrar por um polinômio cuja integração é trivial.

1) Regra 1/3 do Simpson



Iremos considerar a aproximação de $f(x)$ por um **polinômio interpolador de ordem 2 (parábola)**, $p_2(x)$, que é dado pela fórmula de Lagrange;

$$p_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

tal que $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$, com $i=0,1,2$.

e sabendo que:

$$\begin{aligned} x_0 = a, \quad x_1 = m \text{ e } x_2 = b \\ m = x_1 = \frac{a+b}{2} \\ h = \frac{b-a}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_0 - x_1 = -h, \quad x_0 - x_2 = -2h, \\ x_1 - x_0 = h, \quad x_1 - x_2 = -h, \\ x_2 - x_0 = 2h, \quad x_2 - x_1 = h. \end{aligned}$$

temos:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} f(x_2)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2) dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2) dx + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1) dx \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \end{aligned}$$

Logo, o valor numérico da integral será dado por:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = I_S$$

Estimativa para o erro:

$$|E_S| = \frac{h^5}{90} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Considerando $h = \frac{b-a}{2} \Rightarrow h^5 = \frac{(b-a)^5}{32}$,

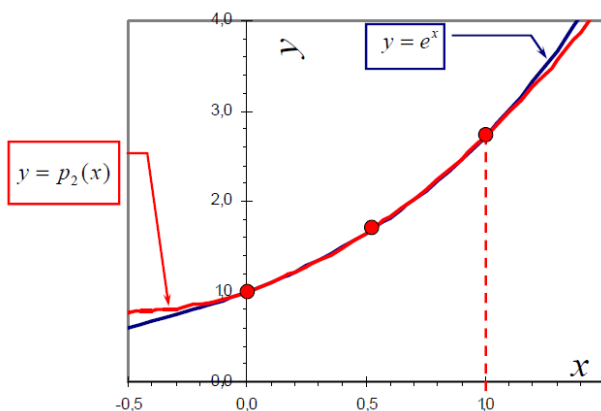
$$|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Exemplo 1:

- 1) Calcule $\int_0^1 e^x dx$ usando a regra do trapézio simples.
- 2) Estime o erro cometido.

Resolução:

$$1) \int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{6} [e^0 + 4e^{0,5} + e^1] = 1,7189$$



2) Estimativa do erro:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{iv}(x) = e^x \rightarrow |E_S| \leq \frac{1}{180} e^1 = 0,00094$$

OBS:

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = 1,71828 \text{ (com 5 casas decimais)} \\ \int_0^1 e^x dx \approx 1,7189 \end{array} \right\} \Rightarrow E_S = 1,7183 - 1,7189 = -0,0006$$

Exemplo 2:

$$1) \text{ Calcular } \int_1^7 \frac{1}{x^2} dx$$

utilizando a regra 1/3 de Simpson.

2) Calcular uma estimativa para o erro utilizando essa técnica numérica.

Resolução:

1) Temos nesse caso 3 pontos a considerar dentro do intervalo $[a, b] = [1, 7]$, são eles: $x_0 = 1$ e $x_1 = (1 + 7)/2 = 4$ e $x_2 = 7$.

Como agora temos $n = 2$ subdivisões dentro do intervalo $[a, b]$ teremos $h = (b - a)/2 = (7 - 1)/2 = 3$.

O valor numérico da integral será:

$$I_s = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{3}{3} \left[\frac{1}{1^2} + 4 \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} \right] = 1.27$$

2) Calculando a estimativa para o erro, teremos:

$$|E_S| \leq \frac{(7-1)}{2880} \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$$

Derivando $f(x)$ temos $f'(x) = -2x^{-3}$

$$f''(x) = 6x^{-4}$$

$$f^3(x) = -24x^{-5}$$

$$f^4(x) = 120x^{-6} \longrightarrow$$

x	$ f^4(x) $
1	120
2	1.875
3	0.164609
4	0.029297
5	0.00768
6	0.002572
7	0.00102

logo $|E_S| \leq \frac{6^5}{2880} \times 120 = 324$ **Erro grande!!**

Exemplo 3:

1) Calcular $\int_3^{3,6} \frac{dx}{x}$ utilizando a regra 1/3 de Simpson.

2) Calcular uma estimativa para o erro utilizando essa técnica numérica.

Resolução:

1) Cálculo:

i	x_i	$f(x_i) = 1/x_i$
0	3	0,333333
1	3,3	0,303030
2	3,6	0,277778

$$A = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{0,3}{3} [0,333333 + 4 \cdot 0,303030 + 0,277778]$$

$$A \approx 0,182323$$

2) Estimativa do erro:

O erro é dado por:

$$|E_t| \leq \frac{h^5}{90} \cdot \max |f^{(IV)}(x)| \quad x \in [x_0, x_1], \text{ como visto, } f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \quad \text{e} \quad f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}. \text{ Para } x \in [3, 3,6] \text{ o valor}$$

$$\max |f^{(IV)}(x)| = \frac{24}{3^5} = \frac{24}{243}, \text{ portanto:}$$

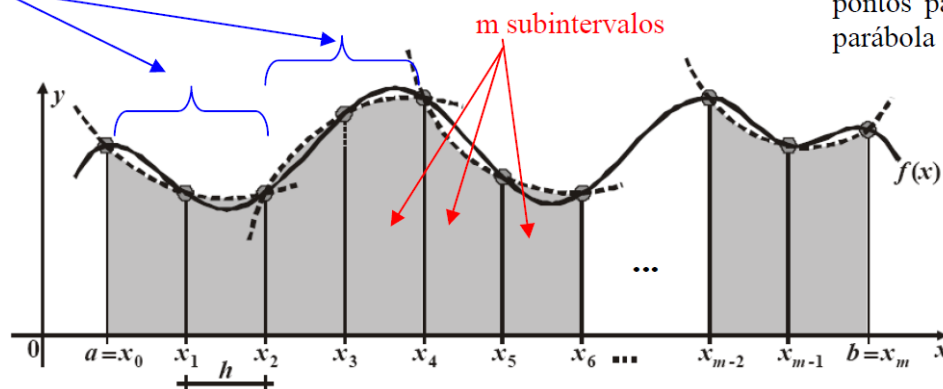
$$|E_t| \leq \frac{0,3^5}{90} \cdot \frac{24}{243} = 0,2666 \times 10^{-5}$$

2) Regra do Simpson repetida

Vamos agora repetir o procedimento anterior para n pares de subintervalos. Definimos o número de subintervalos pela letra $m = 2n$.

n pares de subintervalos, ou seja, a metade do número de subdivisões
 $n = m/2$

Obs. A cada par de subintervalos temos 3 pontos para ajustar uma parábola ($P_2(x)$)



Na figura, tome $h = \frac{b-a}{m} \Rightarrow h = x_i - x_{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, m$), para $m = 2n \Rightarrow m$ é par.

Aplica-se a regra de Simpson repetidas vezes no intervalo $[a, b] = [x_0, x_m]$.

x_0, x_1, \dots, x_m são pontos igualmente espaçados.

Então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_m} f(x) dx$$

$$\approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3} [y_2 + 4y_3 + y_4] + \dots + \frac{h}{3} [y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m]$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_m + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{m-1})]$$

Valor da função nos subintervalos de índices IMPARES dentro do intervalo [a,b], excluindo as extremidades.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_m) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i-1}) \right] = I_{SR}$$

Valor da função nas extremidades inicial e final do intervalo ou seja nos pontos a e b.

Valor da função nos subintervalos de índices PARES dentro do intervalo [a,b], excluindo as extremidades.

Estimativa para o erro para regra 1/3 de Simpson repetida.

$$|E_{SR}| \leq n \cdot \frac{h^5}{90} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$$

Considerando $h = \frac{b-a}{m} \Rightarrow h^5 = \frac{(b-a)^5}{32n^5}$,

$$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$$

$n = m/2$ é a metade de subdivisões do intervalo [a,b]

Comparando com a regra 1/3 de Simpson!

$$|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$$

$$E_{SR} = \frac{E_S}{n^4}$$

Exemplo 1:

- 1) Calcule $\int_0^1 e^x dx$ usando a regra 1/3 de Simpson repetida 3 vezes.
- 2) Estime o erro cometido.

Resolução:

1)

$$h := \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad x_i := 0 + \frac{1}{6}i, \text{ para } i=1,2,\dots,6$$

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{18} \left[e^0 + 4e^{\frac{1}{6}} + 2e^{\frac{2}{6}} + 4e^{\frac{3}{6}} + 2e^{\frac{4}{6}} + 4e^{\frac{5}{6}} + e^1 \right]$$

Exemplo 2:

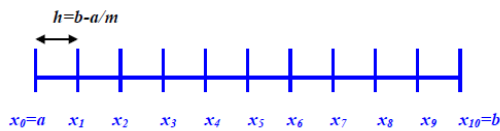
- 1) Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x^2} dx$ utilizando a regra 1/3 de Simpson repetida para 10 subdivisões.
- 2) Calcular uma estimativa para o erro utilizando essa técnica numérica.

Resolução:

obs: m será sempre um número par.

Temos $m=2n=10$ subdivisões dentro do intervalo $[a, b] = [x_0, x_m] = [1, 7]$, portanto, temos que considerar 11 pontos igualmente espaçados por $h = (b - a)/2n = (7 - 1)/10 = 0,6$.

São eles:



$$x_0 = 1; x_1 = 1,6; x_2 = 2,2; x_3 = 2,8; x_4 = 3,4; x_5 = 4; x_6 = 4,6; x_7 = 5,2; x_8 = 5,8; x_9 = 6,4; x_{10} = 7$$

Valor numérico da integral:

$$I_{SR} = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + f(x_m) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i-1}) \right]$$

Calculando os somatório temos:

$$\frac{m-1}{2} = \frac{10-1}{2} = 4$$

Valor da função nos subintervalos de índices PARES dentro do intervalo $[a, b]$, excluindo as extremidades.

$$\sum_{i=1}^4 f(x_{2i}) = f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) = \frac{1}{2,2^2} + \frac{1}{3,4^2} + \frac{1}{4,6^2} + \frac{1}{5,8^2} = 0,3701$$

$$\frac{m}{2} \xrightarrow{m=10} \frac{10}{2} = 5$$

$$\sum_{i=1}^5 f(x_{2i-1}) = f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) = \frac{1}{1,6^2} + \frac{1}{2,8^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5,2^2} + \frac{1}{6,4^2} = 0,642$$

Valor da função nos subintervalos de índices IMPARES dentro do intervalo [a,b], excluindo as extremidades.

Logo:

$$I_{SR} = \frac{0.6}{3} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{7^2} + 2 \times 0,701 + 4 \times 0,6427 \right] \approx 0,8657$$

2) Cálculo da estimativa para o erro:

$$|E_{SR}| \leq \frac{(7-1)^5}{2880n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$$

Derivando $f(x)$ temos $f'(x) = -2x^{-3}$

$$f''(x) = 6x^{-4}$$

$$f^3(x) = -24x^{-5}$$

$$f^4(x) = 120x^{-6}$$

x	$ f^4(x) $
1	120
2	1.875
3	0.164609
4	0.029297
5	0.00768
6	0.002572
7	0.00102

logo

$$|E_{SR}| \leq \frac{6^5}{2880 \times 5^4} \times 120 = 0,5184$$

Erro pequeno!!

Exemplo 3

$$\text{Seja } I = \int_0^1 e^x dx$$

- Calcule uma aproximação para I usando 10 subintervalos e a regra 1/3 de Simpson repetida. Estime o erro cometido.
- Qual o número mínimo de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 10^{-3} ?

$$\text{Resp: } I_{SR} = 1.718; \quad |E_{SR}| \leq 1,51 \times 10^{-6}; \quad m=2$$

Exercício proposto 1

$$\text{Seja } I = \int_8^{13} 3xe^{2x} dx$$

- Calcule o valor de I com 8 subintervalos na regra do trapézio repetida e na regra 1/3 de Simpson repetida.
- Qual dos dois métodos numéricos dá uma estimativa para o erro menor?
- Quantas subdivisões devemos ter, em cada uma das técnicas propostas, para que o erro no cálculo seja menor do 10^{-13} ?

Exercício proposto 2

Seja a integral: $I = \int_0^{0.6} \frac{1}{1+x} dx$

a) Calcule pela regra dos trapézios e pela regra dos trapézios repetida com 4 subintervalos seu valor aproximado:

b) Quantos subintervalos devemos ter na regra dos trapézios repetida para obtermos uma precisão de cálculo melhor que $\varepsilon \sim 10^{-6}$?

Exercício proposto 3

Seja a integral: $I = \int_0^{0.6} e^{5x} + x^2 dx$

a) Calcule seu valor aproximado pela regra 1/3 de Simpson repetida usando 3 e 6 subintervalos. Compare os valores encontrados.

b) Quantos subintervalos devemos ter se quisermos obtermos uma precisão de cálculo melhor que $\varepsilon \sim 10^{-9}$ utilizando a regra 1/3 de Simpson repetida.

Referências:

1- Livro.

Cálculo numérico.

Márcia Ruggiero e Vera Lopes.

2- Livro

Análise Numérica

Richard L. Burden e J. Douglas Faires

3- Apostila.

Cálculo Numérico.

Faculdade de Engenharia, Arquitetura e urbanismo.

Prof. Dr. Sérgio Pilling.