

# Matemática Computacional

## Integração numérica

*Instituto Superior Técnico, 1<sup>o</sup> Trimestre, 2021/2022*

# Integração numérica. Sumário:

- Regras de quadratura ou de integração numérica
- Resultados auxiliares (de Cálculo Diferencial e Integral)
- Fórmulas de Newton-Cotes
  - 1 Regra dos trapézios
    - 1.1 Regra simples
    - 1.2 Regra composta
  - 2 Regra de Simpson
    - 2.1 Regra simples
    - 2.2 Regra composta

## Integração numérica - Exemplo 1

Consideremos uma população com 200 indivíduos. Sabe-se que a distribuição  $N(a)$  da altura destes indivíduos pode ser representada por uma Gaussiana que se caracteriza pelo valor médio  $\bar{a} = 1.70\text{m}$ , pelo desvio padrão  $\sigma = 0.10\text{m}$  e  $M = 200$ :

$$N(a) = \frac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\bar{a}-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

**Problema:** Qual o número de indivíduos  $N$  cuja altura varia na faixa 1.80 – 1.90m?

**Resolução do problema:** Uma estimativa para  $N$  é dada por

$$N = \int_{1.80}^{1.90} N(a) da = 797.885 \int_{1.80}^{1.90} e^{-50(1.70-a)^2} da.$$

## Integração numérica - Recursos computacionais

Como calcular o integral  $\int_{1.80}^{1.90} e^{-50(1.70-a)^2} da$ ?

- No **Matlab**, temos o comando `integral`:

```
>> 797.885*integral(@(a)exp(-50*(1.70-a).^2),1.80,1.90)
ans = 27.1810
```

A regra dos trapézios está implementada em `trapz` e `cumtrapz`.

- No **Python**, `quad`, `trapz`, `simps`, ..., fazem **integração numérica**. Estão disponíveis no pacote `integrate` da biblioteca `scipy` (`scipy.integrate`). As funções `trapz`, `simps` são a implementação das regras dos trapézios e de Simpson.

## Integração numérica - **Objetivos**

- Perceber como foram implementadas as funções `integral`, `quad`, `trapz`,...
- Deduzir e analisar as regras dos trapézios, de Simpson,...

# Integração numérica

O nosso objetivo é deduzir *fórmulas de integração numérica*, eficientes, fáceis de aplicar e de programar, usando apenas um número finito de valores da função  $f$  cujo integral queremos calcular.

Serão *funcionais*  $Q : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

## Fórmulas de integração numérica ou Regras de quadratura

Podemos ver o problema da integração numérica como um problema de aproximação mais geral: pretendemos construir uma aproximação do funcional  $I : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

em vez de considerar a aproximação de cada função  $f$  isoladamente.

Fixamos a priori um conjunto finito de pontos

$$\mathcal{X} := \{x_0, \dots, x_n\} \subset [a, b], \quad a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

e procuramos uma aproximação de  $I(f)$  através de uma soma ponderada dos valores de  $f$  em  $\mathcal{X}$ :

$$I(f) \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad (f \in C([a, b]))$$

com  $A_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , independentes de  $f$ .

# Fórmulas de integração numérica ou Regras de quadratura

## Definição

Chama-se **fórmula de integração numérica**, **regra de integração numérica** ou **regra de quadratura** a um funcional da forma

$$Q : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Os pontos  $x_0, \dots, x_n$  dizem-se os **nós de integração** e os coeficientes  $A_0, \dots, A_n$  são os **pesos da quadratura** (ambos são independentes da função  $f$ ).

# Primeiros exemplos de fórmulas de integração numérica ou quadraturas

Somas de Riemann de  $f \in C([a, b])$ , com nós

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b :$$

$$Q : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q(f) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i),$$

$$Q(f) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$$

São as **regras dos retângulos à esquerda e à direita**, respetivamente.

$$\int_a^b f(x) dx \approx Q(f)$$

## Primeiros exemplos: soma de Riemann à esquerda ou regra dos retângulos à esquerda

**Exemplo** Vamos calcular  $I = \int_{1.80}^{1.90} e^{-50(1.70-x)^2} dx$  usando a fórmula

$$Q(f) = R_n(f) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i),$$

com valores de  $f$  em 100 nós igualmente espaçados.

A função a integrar é  $f(x) := e^{-50(1.70-x)^2}$ .

Começamos por tomar  $n = 100$ , o que dá

$$x_i = 1.80 + 0.001i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 99, 100;$$

$$h = x_{i+1} - x_i = 0.001 \quad i = 0, 1, 2, \dots, 99.$$

Obtemos

$$I \approx h \sum_{i=0}^{99} e^{-50(1.70-x_i)^2} = h \sum_{i=0}^{99} e^{-0.50(1+0.01i)^2} = 0.0428522.$$

## Primeiros exemplos: soma de Riemann à esquerda ou regra dos retângulos à esquerda

Consequentemente, para o problema do Exemplo 1, obtemos

$$N \approx 797.885 \times 0.0428522 = 34.1911.$$

Com  $n = 1000$  obtemos

$$N \approx 797.885 \times 0.0400727 = 31.9734$$

e ainda com  $n = 10000$ :

$$N \approx 797.885 \times 0.0397993 = 31.7553$$

Note-se que estes valores estão longe dos valores já obtidos no Exemplo 1:

```
>> 797.885*integral(@(a)exp(-50*(1.70-a).^2),1.80,1.90)
ans = 27.1810
```

# Primeiros exemplos: implementação da regra dos retângulos à esquerda em Matlab

A regra

$$R_n(f) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

com

$$h = (b - a)/n; \quad x_i = a + hi, \quad i = 0, \dots, n$$

fica simplesmente

$$R_n(f) := h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

```
function Q = regra_Riemann(a,b,f,n)
h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b-h,n);
Q=h*sum(f(x));
end
```

## Primeiros exemplos: implementação da regra dos retângulos à esquerda em Matlab

**Exemplo 2** Consideremos o integral

$$I = \int_0^1 \exp(x^2) dx.$$

Fazendo

```
>> for k = 1:8  
disp(regra_Riemann(0,1,@(x)exp(x.^2),10^k))  
end
```

obtém-se um output que permite construir a seguinte tabela de valores aproximados para  $I$  com  $n = 10^k$ ,  $k = 1, \dots, 8$ .

## Primeiros exemplos: implementação da regra dos retângulos à esquerda em Matlab

$k$	$n$	$R_n$
1	10	1.38126060131585
2	100	1.45410564070698
3	1000	1.46179305803985
4	10000	1.46256583634623
5	$10^5$	1.46264315454335
6	$10^6$	1.4626508867667
7	$10^7$	1.46265165999299
8	$10^8$	1.46265173731611

Sabemos que para  $f(x) := \exp(x^2)$  se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f) = I$$

mas a sequência de valores tabelados indicia que a convergência é muito lenta.

**Regras de integração mais expeditas?**

# Resultados auxiliares - Teorema do valor médio para integrais

## Teorema

Sejam  $u, v \in C([a, b])$  tais que  $v$  não muda de sinal em  $[a, b]$ .  
Então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = u(c) \int_a^b v(x)dx.$$

A demonstração deste resultado encontra-se em anexo.

# Resultados auxiliares - Teorema do valor médio discreto

## Teorema

Sejam  $u \in C([a, b])$ ,  $x_k \in [a, b]$  e  $v_k \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Então existe  $c \in [\min\{x_0, \dots, x_n\}, \max\{x_0, \dots, x_n\}]$  tal que

$$\sum_{k=0}^n u(x_k)v_k = u(c) \sum_{k=0}^n v_k.$$

A demonstração deste resultado encontra-se em anexo.

Nós de integração igualmente espaçados.  
Fórmulas de Newton-Cotes.

## Fórmulas de Newton-Cotes fechadas

Consideremos nós igualmente espaçados que incluem os extremos do intervalo de integração:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad \text{com } h = \frac{b - a}{n}.$$

As fórmulas de Newton-Cotes fechadas são da forma

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i), \quad \text{com } x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

**Exemplos:** regra do trapézio, regra de Simpson, regra dos três oitavos,...

A seguir concretizamos as fórmulas de Newton-Cotes fechadas para  $n = 1$  (regra do trapézio) e  $n = 2$  (regra de Simpson).

# Regra do trapézio

## Regra do trapézio

Baseia-se na aproximação linear da função  $f$  (genérica) nos nós:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b.$$

Seja  $p_1$  o polinómio de grau menor ou igual a 1 interpolador de  $f$  nestes 2 nós:

$$p_1(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x),$$

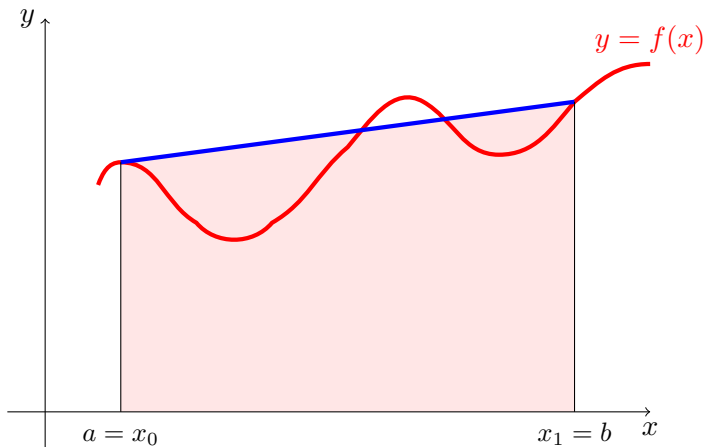
representado na base de Lagrange de  $\mathcal{P}_1$ . A regra do trapézio corresponde a aproximar

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T(f)$$

com

$$T(f) := \int_a^b p_1(x)dx = f(x_0) \int_a^b \ell_0(x)dx + f(x_1) \int_a^b \ell_1(x)dx.$$

## Interpretação geométrica



**Figura:** Regra do trapézio. A linha azul representa o polinômio  $p_1$  interpolador de  $f$  em  $x_0$  e  $x_1$ . O integral  $\int_a^b f(x) dx$  é aproximado pela área do trapézio a sombreado.

## Regra do trapézio

$$T(f) = f(x_0) \int_a^b \ell_0(x) dx + f(x_1) \int_a^b \ell_1(x) dx$$

Cálculo dos pesos:

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{h}{2},$$

$$A_1 = \int_a^b \ell_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{h}{2}, \quad h := b - a.$$

Quadratura obtida:

$$T(f) = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

# Regra de Simpson

## Regra de Simpson simples

Agora consideramos a interpolação quadrática da função  $f$  nos 3 nós igualmente espaçados:

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b.$$

Seja  $p_2$  o polinómio de grau menor ou igual a 2 interpolador de  $f$  nestes nós:

$$p_2(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x),$$

onde  $\{l_0, l_1, l_2\}$  é a base de Lagrange de  $\mathcal{P}_2$ . A regra de Simpson simples corresponde a:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq S(f) := \int_a^b p_2(x)dx = f(x_0)A_0 + f(x_1)A_1 + f(x_2)A_2$$

onde

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad i = 0, 1, 2.$$

# Regra de Simpson simples

Cálculo dos pesos:

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x) dx = \int_a^b \frac{(x - (a+b)/2)(x-b)}{(a - (a+b)/2)(a-b)} dx = \frac{b-a}{6},$$

$$A_1 = \int_a^b \ell_1(x) dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{((a+b)/2 - a)((a+b)/2 - b)} dx = \frac{2(b-a)}{3},$$

$$A_2 = \int_a^b \ell_2(x) dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x - (a+b)/2)}{(b-a)(b - (a+b)/2)} dx = \frac{b-a}{6}.$$

Assim, a aproximação obtida para o integral é

$$S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \quad h = \frac{b-a}{2}.$$

# Regras do trapézio e de Simpson: análise dos erros de integração

# Grau de uma regra de quadratura

## Definição

Diz-se que a quadratura  $Q$  representa exatamente o integral  $I$  sobre o espaço  $\mathcal{P}_m$ , dos polinómios de grau menor ou igual a  $m$ , se

$$Q(p) = I(p), \forall p \in \mathcal{P}_m.$$

Diz-se ainda que  $Q$  é uma aproximação de  $I$  com grau de precisão (ou grau de exatidão) igual a  $m$  se  $m$  é o maior inteiro não negativo tal que  $Q$  é exata sobre  $\mathcal{P}_m$ .

Por outras palavras,  $Q$  tem grau  $m$  se  $Q(p) = I(p)$ , para todo o polinómio  $p$  de grau  $\leq m$ , e existe um polinómio  $q$  de grau  $m + 1$  tal que  $Q(q) \neq I(q)$ .

## Grau de uma regra de quadratura

Como determinar facilmente o grau de precisão/exatidão de uma quadratura?

### Proposição

$Q$  tem grau de exatidão igual a  $m$  se e só se

$$Q(x^k) = I(x^k), \quad k = 0, \dots, m; \quad Q(x^{m+1}) \neq I(x^{m+1}).$$

*Observação:* O **método dos coeficientes indeterminados** para determinar os pesos  $A_0, \dots, A_n$  de uma quadratura  $Q(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$  (ver exercícios) baseia-se no sistema

$$Q(x^k) = I(x^k), \quad k = 0, \dots, n.$$

## Erro de integração na regra do trapézio

Por construção, tem-se

$$I(p) - T(p) = 0, \forall p \in \mathcal{P}_1.$$

Como o polinómio de segundo grau  $w_2(x) := (x - a)(x - b)$  não muda de sinal em  $[a, b]$  mas é nulo nos extremos do intervalo, tem-se

$$I(w_2) < 0 \text{ e } T(w_2) = 0.$$

Assim,  $T$  tem grau de precisão igual a 1.

Suponhamos que  $f \in C^2([a, b])$  e seja  $p_1 \in \mathcal{P}_1$  o polinómio interpolador de  $f$  em  $x_0$  e  $x_1$ . Tem-se

$$\begin{aligned} I(f) - T(f) &= I(f) - T(p_1) = \int_a^b [f(x) - p_1(x)] dx \\ &= \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi(x))}{2} w_2(x) dx. \end{aligned}$$

## Erro de integração na regra do trapézio

Como  $w_2(x) := (x - a)(x - b)$  não muda de sinal em  $[a, b]$ , o Teorema do valor médio para integrais, garante existência de  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$\begin{aligned} E^T(f) &:= \int_a^b f(x)dx - T(f) \\ &= \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b w_2(x)dx = -\frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{12}. \end{aligned}$$

Assim, o erro de integração em  $[a, b]$  é dado por

$$E^T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

## Erro de integração na regra de Simpson simples

Efetivamente,  $S$  é exata sobre  $\mathcal{P}_3$ , pois, para além de  $S(p) = I(p)$ , para todo  $p \in \mathcal{P}_2$ , tem-se ainda

$$S\left((x - x_1)^3\right) = I\left((x - x_1)^3\right) = 0, \quad x_1 = \frac{a + b}{2}.$$

Sendo  $w_3(x) := (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ , com  $x_0 = a$ ,  $x_2 = b$ , e  $W(x) := w_3(x)(x - x_1)$ , tem-se  $W(x) \leq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  e

$$0 = S(W(x)) \neq I(W(x)) < 0.$$

Assim,  $S$  tem grau de precisão igual a 3.

A informação sobre o grau de precisão deve surgir na fórmula de erro. Suponhamos que  $f \in C^4([a, b])$ . Seja  $p$  o único polinómio de  $\mathcal{P}_3$  tal que

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \quad p'(x_1) = f'(x_1).$$

## Erro de integração na regra de Simpson simples

Vamos mostrar que, para cada  $x \in [a, b]$ , existe  $\xi(x) \in (a, b)$  tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} w_3(x)(x - x_1).$$

Para  $x \in [a, b] \setminus \{x_0, x_1, x_2\}$  fixo, consideremos o polinómio

$$q = q(t) \in \mathcal{P}_4$$

definido por

$$q(t) = p(t) + \frac{f(x) - p(x)}{W(x)} W(t), \quad W(s) := w_3(s)(s - x_1)$$

o qual satisfaz

$$q(x_i) = p(x_i), \quad i = 0, 1, 2; \quad q(x) = p(x); \quad q'(x_1) = p'(x_1).$$

## Erro de integração na regra de Simpson simples

A função  $E(t) := f(t) - q(t)$  admite em cada nó  $x_0, x_2, x$  um zero com multiplicidade 1 e no nó  $x_1$  um zero com multiplicidade 2, pelo menos.

Portanto, a função  $E$  tem pelo menos 5 zeros (contados com a sua multiplicidade) em  $[a, b]$ . Então,

$$\exists \xi(x) \in (a, b) : E^{(4)}(\xi(x)) = 0,$$

ou seja,

$$\exists \xi(x) \in (a, b) : q^{(4)}(\xi(x)) = f^{(4)}(\xi(x)).$$

Como  $q^{(4)}$  é constante e tem o valor

$$q^{(4)} = 4! \frac{f(x) - p(x)}{W(x)},$$

conclui-se que

$$\exists \xi(x) \in (a, b) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} w_3(x) (x - x_1).$$

## Erro de integração na regra de Simpson simples

Agora, integrando

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} w_3(x)(x - x_1)$$

em  $[a, b]$  e lembrando que a função

$$W(x) := w_3(x)(x - x_1)$$

não muda de sinal em  $[a, b]$ , permite concluir, que existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$\begin{aligned} E^S(f) &:= I(f) - S_2(f) = I(f) - S_2(p) = I(f - p) \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) dx \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} h^5 \int_0^2 t(t-1)^2(t-2) dt = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

Nós de integração igualmente espaçados.  
Regras compostas.

De modo a obter melhores aproximações para os integrais, em vez de aumentar o grau de precisão/exatidão das fórmulas de Newton-Cotes, é preferível utilizar as fórmulas de integração compostas.

# Regra dos trapézios

## Regra dos trapézios (composta)

Sejam

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h := \frac{b - a}{n}.$$

Sendo  $f \in C^2([a, b])$ , em cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , tem-se:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}).$$

Daqui resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] - \frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i). \end{aligned}$$

# Interpretação geométrica

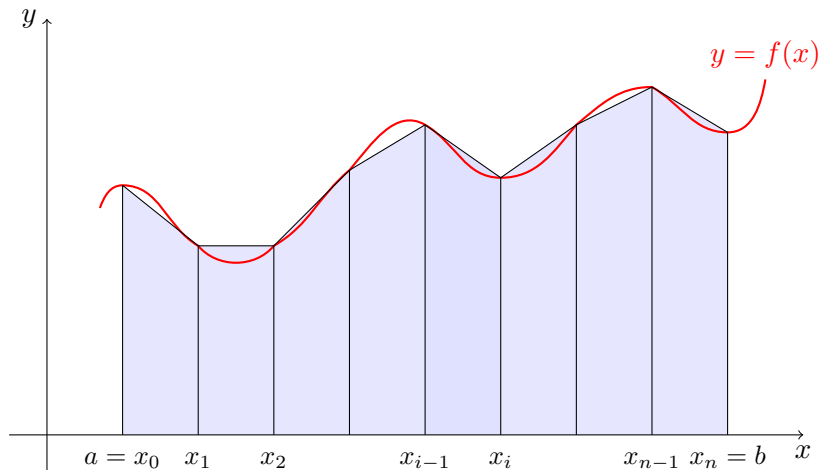


Figura: Regra dos trapézios composta

## Regra dos trapézios

- $$\frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Se  $f \in C^2([a, b])$ , o Teorema do valor médio discreto garante a existência de  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = n f''(\xi),$$

donde

- $$-\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

## Resumo das notações e fórmulas para a regra dos trapézios

$$T_n(f) = h \left[ \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right],$$
$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i h \quad (i = 0, \dots, n)$$

e, para  $f \in C^2([a, b])$ ,

$$E_n^T(f) = I(f) - T_n(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$
$$= -\frac{(b-a)^3}{12n^2}, \quad \xi \in (a, b).$$

# Ordem de precisão de uma quadratura

## Definição

A **ordem de convergência** de uma quadratura composta é a sua ordem em relação ao comprimento  $h = (b - a)/n$  dos subintervalos em que se divide o intervalo original  $[a, b]$ .

Se  $f \in C^2([a, b])$ , a fórmula de majoração do erro para regra dos trapézios é:

$$|E_n^T(f)| \leq h^2 \frac{(b-a)}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Como

$$|E_n^T(f)| = \mathcal{O}(h^2),$$

a regra  $T_n$  tem ordem de convergência igual a 2.

## Observações sobre a regra dos trapézios

1.  $T_1(f)$  dá o valor exato de  $I(f)$  sobre  $\mathcal{P}_1([a, b])$ , mas  $T_n(f)$  não é exata para  $I(f)$  sobre  $\mathcal{P}_n([a, b])$ . Mais concretamente  $T_n(f)$  corresponde a aproximar a função  $f$  por um *spline de grau 1* associado aos nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , i.e., uma função seccionalmente linear em  $[a, b]$ .  
A regra  $T_n$  tem **grau de precisão igual a 1**.
2. Se  $f \in C^2([a, b])$ , a regra  $T_n$  tem **ordem de convergência igual a 2** e
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = I(f)$ .

# Regra de Simpson composta

## Regra de Simpson composta

Seja  $n$  par e sejam  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ , com  $h := \frac{b-a}{n}$ .

A regra de Simpson composta resulta de aplicar a regra simples em cada subintervalo  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  com base nos nós  $x_{2i-2}$ ,  $x_{2i-1}$ ,  $x_{2i}$  :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \\ &= \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right].\end{aligned}$$

# Interpretação geométrica

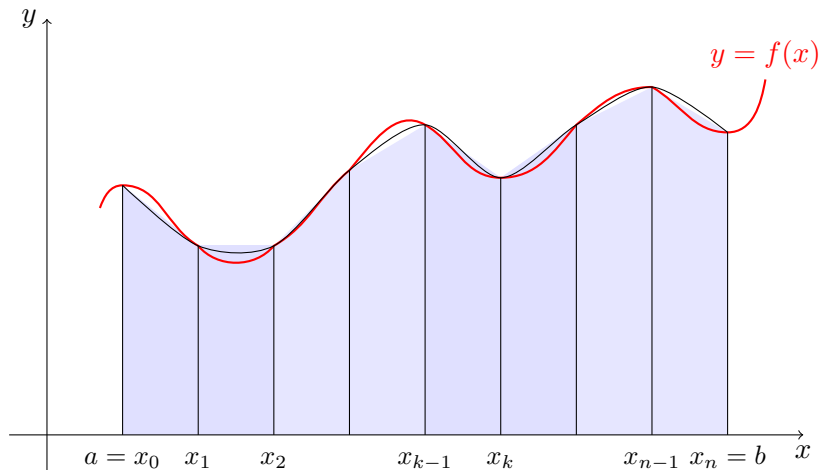


Figura: Regra de Simpson composta

Supondo que  $f \in C^4([a, b])$ , podemos usar a expressão já conhecida para o erro de integração da regra simples:

$$\begin{aligned} E_n^S(f) &= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{h^5}{180} n f^{(4)}(\xi_i) \\ &= -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) h^4, \quad \xi \in (a, b). \end{aligned}$$

Portanto,

a regra  $S_n$  tem ordem de convergência igual a 4 e grau de precisão igual a 3.

## Resumo das notações e fórmulas para a regra de Simpson

$$S_n(f) = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih \quad (i = 0, \dots, n)$$

Para  $f \in C^4([a, b])$ ,

$$\begin{aligned} E_n^S(f) &= I(f) - S_n(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \\ &= -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \end{aligned}$$

# Anexo

## Demonstração do Teorema do valor médio para integrais

**Teorema** Sejam  $u, v \in C([a, b])$  tais que  $v$  não muda de sinal em  $[a, b]$ . Então existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = u(c) \int_a^b v(x)dx.$$

**Demonstração:** Podemos admitir que  $v$  não é identicamente nula (podendo anular-se em algum ponto de  $(a, b)$ ). Pondo

$$w(x) := u(x) - \frac{\int_a^b u(s)v(s)ds}{\int_a^b v(s)ds},$$

obtém-se  $\int_a^b w(x)v(x)dx = 0$ , pelo que a função  $wv$  tem de mudar de sinal em  $(a, b)$ .

Como  $v$  não muda de sinal então tem de ser  $w$  a ter essa propriedade, i.e., existe  $c \in (a, b)$  tal que  $w(c) = u(c) - \frac{\int_a^b u(s)v(s)ds}{\int_a^b v(s)ds} = 0$ .

## Demonstração do Teorema do valor médio discreto

**Teorema** Sejam  $u \in C([a, b])$ ,  $x_k \in [a, b]$  e  $v_k \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Então existe  $c \in [\min\{x_0, \dots, x_n\}, \max\{x_0, \dots, x_n\}]$  tal que

$$\sum_{k=0}^n u(x_k)v_k = u(c) \sum_{k=0}^n v_k.$$

**Demonstração:** Sejam  $I := [\min\{x_0, \dots, x_n\}, \max\{x_0, \dots, x_n\}]$ ,  $x_m, x_M \in I$  tais que  $u(x_m) = \min_{x \in I} u(x)$  e  $u(x_M) = \max_{x \in I} u(x)$ . Tem-se

$$u(x_m) \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u(x_k)v_k \leq u(x_M) \sum_{k=0}^n v_k$$

ou ainda

$$u(x_m) \leq \frac{\sum_{k=0}^n u(x_k)v_k}{\sum_{k=0}^n v_k} \leq u(x_M)$$

e, pelo Teorema do valor intermédio, existe  $c \in I$  tal que

$$\frac{\sum_{k=0}^n u(x_k)v_k}{\sum_{k=0}^n v_k} = u(c).$$