

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM MATLAB PARA PROBLEMAS POTENCIAIS BIDIMENSIONAIS

Roberto Pettres, Raphael Fernando Scuciato, Luiz Alkimin de Lacerda

Palavras-Chave: Elementos de Contorno, Equação de Laplace, Matlab, Solução Fundamental.

1 INTRODUÇÃO

Aliada à evolução dos computadores, diversos métodos numéricos foram desenvolvidos e aplicados para solucionar problemas regidos por equações diferenciais onde a solução analítica não existe ou não é obtida trivialmente. Entre os diversos métodos numéricos está o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia e Dominguez, 1989; Beer, 1994).

O MEC consiste na transformação da equação diferencial que descreve determinado fenômeno em uma equação integral que relaciona idealmente valores de contorno (Beer, 1994). No caso de problemas descritos pela *Equação de Laplace*, os valores do contorno são o potencial e o fluxo. Neste tipo de formulação são determinadas as soluções aproximadas para os elementos não prescritos do contorno ou em pontos pertencentes ao domínio a partir da resolução de um sistema de equações algébricas, obtido a partir das integrais do contorno contendo a solução fundamental do problema (Greenberg, 1971).

A vantagem da aplicação desse método está associada à dimensão do sistema de equações, sendo menor do o sistema obtido em outras formulações como no caso do Método dos Elementos Finitos ou Método das Diferenças Finitas, sendo reduzido por utilizar apenas valores do contorno em sua formulação.

A partir disso, neste trabalho é apresentada a formulação do MEC para solução da *Equação de Laplace* em sua forma bidimensional utilizando o aplicativo '*Elementos de Contorno Constantes*' para análise de uma placa quadrada sob condições de contorno específicas.

2 MODELO BIDIMENSIONAL

O modelo matemático escolhido para este estudo é *Equação de Laplace* (eq.1).

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

O modelo geométrico é uma placa quadrada com aresta igual a L (Figura 1) sob as seguintes condições de contorno (eq.2):

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \\ q(x, 0) &= 0, \\ q(L, y) &= 1, \\ q(x, L) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Onde u é o potencial e q é o fluxo em relação à direção n normal ao contorno (eq.3):

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (3)$$

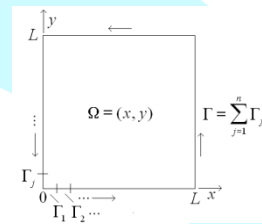


Figura 1 - Modelo geométrico com a discretização do contorno.

De acordo com Greenberg (1971), a solução fundamental para a *Equação de Laplace* denotada por u^* é:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4)$$

Onde $r = (X - \xi)$ é o valor do raio.

Conhecida a solução fundamental, a sua derivada em relação à direção normal ao contorno é denotada por q^* e calculada como:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5)$$

3 FORMULAÇÃO COM MEC

A partir do modelo matemático, do modelo geométrico e assumindo que as variações em cada elemento Γ_j são constantes, a formulação com o MEC de acordo com Brebbia e Dominguez (1989) toma a seguinte forma:

$$c_i u_i = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma_j q_j - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j u_j \quad (6)$$

Onde c_i é o coeficiente para contorno suave com valor igual a 0.5 e $i = 1, \dots, n$ (n = número de elementos).

3.1 Implementação Computacional

A formulação do MEC foi implementada no software Matlab R2010®, sendo desenvolvido o aplicativo '*Elementos de Contorno Constantes*' (Figura 2), que permite descrever o problema bidimensional a partir do modelo geométrico e condições de contorno, assim como gerar o *arquivo.bem* de leitura contendo os parâmetros de integração, quantidade de elementos e nós funcionais, quantidade de pontos para a Quadratura de Gauss (Press *et al.*, 2007) e localização de pontos pertencentes ao domínio.

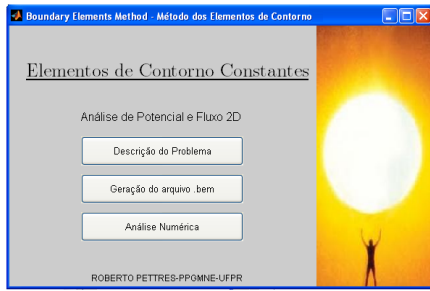


Figura 2 – Aplicativo *Elementos de Contorno Constantes*.

A simulação é iniciada ao clicar o botão *Análise Numérica* como ilustrado na figura anterior.

3.2 Análise Numérica

A análise numérica foi realizada para com um número variável de elementos no contorno iguais a 4, 16, 64 e 256 com o intuito de verificar o desempenho do MEC em relação ao resultado analítico. Foi atribuído valor dois para a variável L (aresta) e 100 para o número de pontos de Gauss. As figuras a seguir representam os resultados obtidos nesta etapa.

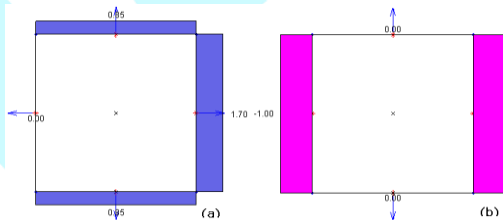


Figura 3 – Resultado do MEC para 4 elementos (a) Potenciais u . (b) Fluxos q .

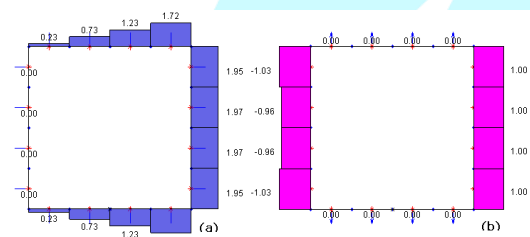


Figura 4 – Resultado do MEC para 16 elementos (a) Potenciais u . (b) Fluxos q .

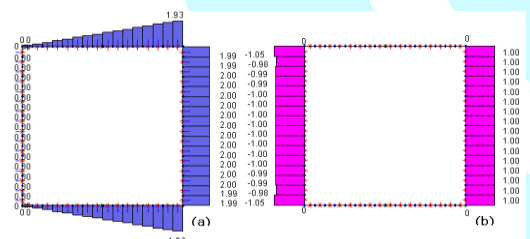


Figura 5 – Resultado do MEC para 64 elementos (a) Potenciais u . (b) Fluxos q .

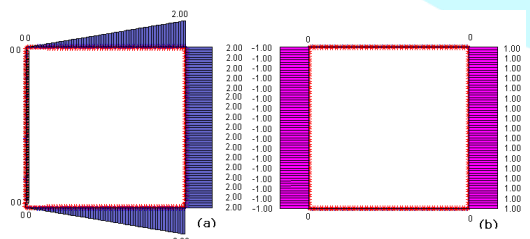


Figura 6 – Resultado do MEC para 256 elementos (a) Potenciais u . (b) Fluxos q .

É possível observar uma tendência linear nos resultados com o aumento no número de elementos no contorno. Para o problema bidimensional a solução analítica da *Equação de Laplace* de acordo com Stephenson (1970) e com as condições de contorno dadas (eq. 2) assume a forma

linear:

$$u(x, y) = x \quad (7)$$

Esta solução é ilustrada pela Figura 7:

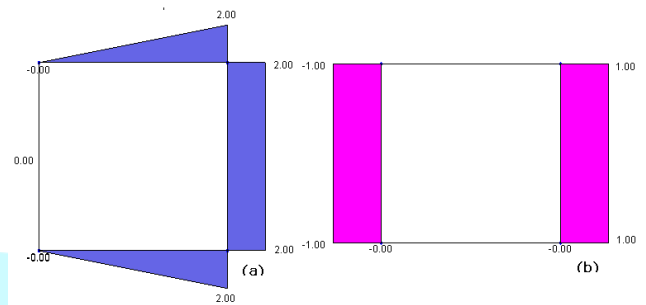


Figura 7 – Solução analítica para a *Equação de Laplace* de acordo com as condições de contorno dadas. (a) Potenciais u . (b) Fluxos q .

Na Tabela 1 são apresentadas as soluções obtidas para os potenciais em um ponto pertencente ao domínio do problema, variando-se a quantidade de elementos do contorno:

Nº de Elementos	Ponto	MEC	Análítica
4	(1, 1)	0.85	1.00
16	(1, 1)	0.98	1.00
64	(1, 1)	0.99	1.00
256	(1, 1)	1.00	1.00

Tabela 1 – Resultados potenciais para um ponto do domínio

4 CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos com a aplicação do MEC foi possível verificar que com o aumento no número de elementos no contorno a solução numérica tende à solução analítica. Nos modelos numéricos utilizados, a convergência da solução foi obtida com 256 elementos, atingindo o valor analítico exato para os potenciais no contorno e em um ponto do domínio. Os resultados obtidos neste trabalho comprovam a potencialidade do MEC e a eficácia do aplicativo *Elementos de Contorno Constantes* para análise de problemas potenciais bidimensionais.

REFERÊNCIAS

- Beer, G. Watson, J.O. *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. Wiley, England, 1994.
- Brebbia, C. A. Dominguez, J. *Boundary Elements An Introduction Course*. Bath Press, Great Britain, 1989.
- Greenberg, M. D. *Application of Green's Functions in Science and Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- Press, W. H. et al. *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. 3rd Edition – Cambridge University Press, New York, 2007.
- Stephenson, G. *An Introduction to Partial Differential Equations for Science Students*. Longman, England, 1970.