

# ANÁLISE DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO COM FONTE VARIÁVEL NO TEMPO A PARTIR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Roberto Pettres, Luiz Alkimin de Lacerda.

**Palavras-Chave:** Método dos Elementos de Contorno, Equação da Difusão, Solução Fundamental Independente do Tempo.

## 1 INTRODUÇÃO

Os primeiros registros que tratam da origem do Método dos Elementos de Contorno (MEC) datam do ano de 1823, em uma publicação do matemático norueguês Niels Henrik Abel sobre o problema da *tautócrona* ('tempo igual') (Simmons, 1987). Nesse trabalho, Abel se retrata ao método, como técnica baseada em equações integrais para resolução de problemas baseados em equações diferenciais parciais. Tal método recebeu atenção de diversos pesquisadores e foram necessárias mais oito décadas de estudos para que o método recebesse a primeira teoria clássica das equações integrais desenvolvida por Fredholm em 1903 (Jacobs, 1979). Ainda no século XX, diversos autores utilizaram a técnica de equações integrais e oportunizaram importantes contribuições para a evolução do método, sendo denominado Método dos Elementos de Contorno a partir dos trabalhos de Brebbia em 1978 (Brebbia, 1978), o qual apresentou uma formulação baseada em equações integrais e em técnicas de resíduos ponderados. Atualmente, o MEC vem sendo empregado para solucionar um número cada vez maior de problemas em mecânica dos sólidos, eletromagnetismo entre outros, e em determinadas formulações, acaba contando com o acoplamento de outros métodos numéricos, como o Método de Diferenças Finitas (MDF) (Kreyszig, 2006). Dessa forma, acoplado ao MEC, emprega-se nesse trabalho o MDF para solucionar a equação da difusão de calor com um termo fonte variável no tempo contando com uma solução fundamental independente do tempo. Ao final do trabalho apresentam-se os resultados obtidos.

## 2 MODELO UNIDIMENSIONAL

O modelo matemático escolhido para este estudo é *Equação da Difusão com termo fonte* (eq.1).

$$\alpha^2 \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} - F(t) \quad (1)$$

O modelo geométrico é uma barra de comprimento igual a  $L$  sob as seguintes condições de contorno (eq.2):

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \hat{u}; & u(L, t) &= \hat{u}; \\ q(0, t) &= \hat{q}; & q(L, t) &= \hat{q}. \end{aligned} \quad (2)$$

Onde  $u$  é o potencial. A condição inicial é dada por (eq.3):

$$u(x, 0) = 0 \quad (3)$$

## 3 FORMULAÇÃO COM MEC

A partir do modelo matemático e do modelo geométrico obtêm-se a equação resultante denominada formulação inversa de resíduos ponderados:

$$\begin{aligned} \int_0^L u \frac{d^2 w}{dx^2} dx + w \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=0}^{x=L} - \hat{u} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \frac{1}{\alpha^2} \frac{d\hat{u}}{dt} w dx \\ - \int_0^L F(x, t) w dx + \left( \hat{u} - \hat{u} \right) w \Big|_{x=0}^{x=L} + \left( \hat{q} - \hat{q} \right) w \Big|_{x=L}^{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Utilizando e aplicando as propriedades da função *Delta de Dirac* (Kreyszig, 2006) para igualar ao diferencial presente no primeiro integrando da (eq.4), pode-se obter o efeito no ponto campo  $x$  de uma fonte concentrada aplicada no ponto fonte  $\xi$ . Então, substituindo (eq.5):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\delta(\xi, x) \quad (5)$$

na (eq.4), obtêm-se a equação:

$$-\int_0^L \bar{u} \delta(\xi, x) dx - \int_0^L \frac{1}{\alpha^2} \frac{d\bar{u}}{dt} w dx - \int_0^L F(x, t) w dx + \quad (6)$$

$$\bar{u} w \Big|_{x=L} + \hat{u} w \Big|_{x=0} + \hat{q} w \Big|_{x=L} - \bar{q} w \Big|_{x=0} = 0$$

No Método dos Elementos de Contorno, a função de ponderação  $w$  é a solução do problema singular equivalente, isto é, é a função de Green (Greenberg, 1971) para o operador diferencial. Assim,  $w = u^*(\xi, x)$ , denominada solução fundamental, pode ser interpretada como o efeito, no ponto campo  $x$  de uma fonte concentrada aplicada no ponto fonte  $\xi$ . Para o caso unidimensional, a solução fundamental (Vladimirov, 1979) é dada por:

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2} \quad (7)$$

Substituindo a (eq.7) na (eq.6), obtêm-se:

$$\bar{u}(\xi, x) = -\int_0^L \frac{1}{\alpha^2} \frac{d\bar{u}}{dt} w dx - \int_0^L F(x, t) w dx \quad (8)$$

$$+ \bar{u} w \Big|_{x=L} + \hat{u} w \Big|_{x=0} + \hat{q} w \Big|_{x=L} - \bar{q} w \Big|_{x=0}$$

Fazendo  $\bar{u} = u(x, t)$  e  $\bar{q} = q(x, t)$  em (eq.8) e definindo as condições de contorno essenciais de acordo com a (eq.9), obtêm-se a equação constituinte do MEC (eq.10) para o problema proposto.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (9)$$

$$u(\xi, t) = -\frac{1}{\alpha^2} \int_0^L \frac{du(x, t)}{dt} \frac{|x - \xi|}{2} dx \quad (10)$$

$$- \int_0^L F(x, t) \frac{|x - \xi|}{2} dx + \frac{|x - \xi|}{2} q(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L}$$

No primeiro integrando da equação 10 está presente uma derivada temporal. Como a solução fundamental utilizada nesse trabalho é independente do tempo, faz-se necessário o emprego de alguma técnica ou modelo numérico para o processo de avanço no tempo.

### 3.1 Modelo Numérico de Avanço no Tempo

Várias abordagens têm sido propostas para a aplicação do MEC em problemas parabólicos, onde se emprega como solução do problema singular equivalente, uma solução independente do tempo. Nesse tipo de formulação, faz-se necessário o emprego de métodos de marcha no tempo, em razão da integral que contém o termo diferencial no

tempo. Entre os métodos comumente utilizados, acoplado ao MEC, está o Método de Diferenças Finitas (MDF).

O MDF visa obter a taxa de variação de uma grandeza de um instante para o seguinte, sendo uma aproximação para o valor da derivada no ponto quanto  $\Delta t$  torna-se extremamente pequeno. Desta forma, a derivada no tempo presente na (eq.10) é aproximada pelo quociente da variação dos potenciais pelo intervalo de tempo correspondente, conforme (eq.11).

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \quad (11)$$

Substituindo a (eq.11) na (eq.10), tem-se:

$$u(\xi, t) = -\frac{1}{\alpha^2} \int_0^L \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \frac{|x - \xi|}{2} dx \quad (12)$$

$$- \int_0^L F(x, t) \frac{|x - \xi|}{2} dx + \frac{|x - \xi|}{2} q(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L}$$

Discretizando em células o domínio do problema e assumindo que as variações em cada qual são lineares (Figura 1), pode-se montar um sistema linear para determinar a solução do problema a partir das funções de aproximação dadas por (eq.13 e eq.14):

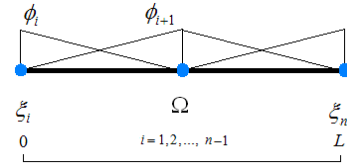


Figura 1 – Discretização do domínio em células lineares.

$$\phi_i = 1 - \frac{\xi}{\Delta\Omega} \quad (13)$$

$$\phi_{i+1} = \frac{\xi}{\Delta\Omega} \quad (14)$$

### 3.2 Implementação Computacional

A formulação proposta foi implementada no *software* Matlab R2011®, utilizando duas células lineares para discretização do domínio, visando à obtenção da solução com o menor esforço computacional.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

A análise numérica foi realizada utilizando os parâmetros  $L = 1$ ,  $\alpha^2 = 1.5$  (condutividade),  $\Delta t = 0.0833$  (critério de estabilidade, Wrobel, 1981) em 100 passos de avanço no tempo, sendo calculado o coeficiente  $R^2$  para identificar a correlação entre as soluções ilustradas pela Figura 2:

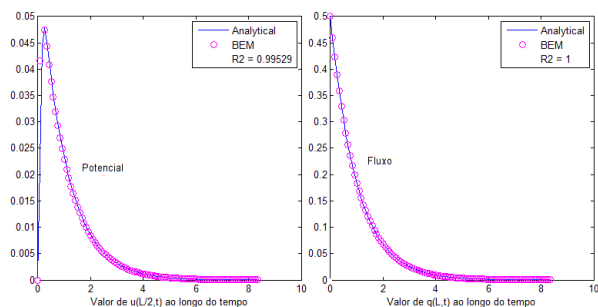


Figura 2 – Comparação entre a solução analítica e o MEC para os potenciais e fluxos ao longo do tempo.

## 5 CONCLUSÃO

Os resultados demonstraram que para o problema proposto, a relação apresentada na (eq.12) produz resultados precisos para os valores de fluxo,  $R^2=1$ , e para os valores potenciais,  $R^2=0.99529$ . Analisando ambos os resultados, observa-se que a resposta do modelo apresenta grande precisão quando são analisados pontos pertencentes ao contorno (onde são obtidos os fluxos), pois trata apenas de valores de contorno, como sugere o nome do método, já para o potencial calculado em um ponto do domínio, o modelo apresenta um pequeno erro. Esse tipo de erro está relacionado ao tamanho do incremento de tempo  $\Delta t$ , do tipo de função de aproximação utilizada para as células e suas dimensões (comprimento), necessitando de um intervalo de tempo específico para o processo de difusão de calor em toda a extensão da célula. Assim, os resultados obtidos neste trabalho comprovam a potencialidade do MEC e a eficácia da solução fundamental independente do tempo para o problema de difusão.

## REFERÊNCIAS

- Brebbia, C. A. *The boundary element method for engineers*. Pentech Press, London, 1978.
- Greenberg, M. D. *Application of Green's Functions in Science and Engineering*. P. Hall, New Jersey, 1971.
- Jacobs, D. *The State of the Art in Numerical Analysis*, Academic Press, New York, USA, 1979.
- Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics 9th Edition*. Wiley, Ohio, 2006.
- Simmons, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica – Volume 2*. McGraw Hill, 1987.
- Vladimirov, V. S. *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Nauka Publishers, Moscow, 1979.
- Wrobel, L. C. *Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method*, U.K. Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1981.