

## FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA O PROBLEMA DE DIFUSÃO DO CALOR BIDIMENSIONAL

*Roberto Pettres; Luiz Alkimin de Lacerda.*

**Palavras-Chave:** Elementos de Contorno, Equação da Difusão do Calor, Solução Fundamental.

### 1 INTRODUÇÃO

Os primeiros registros que tratam da origem do Método dos Elementos de Contorno (MEC) datam do ano de 1823, em uma publicação do matemático norueguês Niels Henrik Abel sobre o problema da *tautócrona* ('tempo igual') (Simmons, 1987). Nesse trabalho, Abel se retrata ao método como técnica baseada em equações integrais para resolução de problemas baseados em equações diferenciais parciais. Tal método recebeu atenção de diversos pesquisadores e foram necessárias mais oito décadas de estudos para que o método recebesse a primeira teoria clássica das equações integrais desenvolvida por Fredholm em 1903 (Jacobs, 1979).

Ainda no século XX, diversos autores utilizaram a técnica de equações integrais e oportunizaram importantes contribuições para a evolução do método, sendo denominado Método dos Elementos de Contorno a partir dos trabalhos de Brebbia (1978), o qual apresentou uma formulação baseada em equações integrais e em técnicas de resíduos ponderados.

A vantagem da aplicação desse método está associada à dimensão do sistema de equações, sendo menor do o sistema obtido em outras formulações como no caso do Método dos Elementos Finitos ou Método das Diferenças Finitas, sendo reduzido por utilizar apenas valores do contorno em sua formulação.

Neste trabalho é apresentada a formulação do MEC para solução da *Equação da Difusão do Calor* em sua forma bidimensional para análise de uma placa quadrada sob condições de contorno específicas.

### 2 MODELO BIDIMENSIONAL

O modelo matemático neste estudo é a *Equação da Difusão do Calor*:

$$\nabla^2 u(X, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u(X, t)}{\partial t}, \quad X \in \Omega, \quad X = (x, y) \quad (1)$$

O modelo geométrico é uma placa quadrada com aresta igual a  $L$  (Figura ) e difusividade térmica  $\alpha$  sob a seguinte condição de contorno:

$$u(X, t) = 10, \quad X \in \Gamma' \quad (2)$$

Onde  $u$  é o potencial e a derivada  $q$  (fluxo) em relação à direção  $n$  normal ao contorno é dada por:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (3)$$

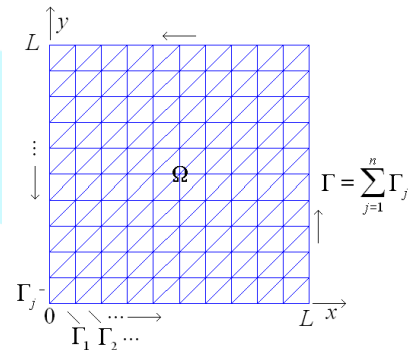


Figura 1 - Modelo geométrico com a discretização do contorno em 40 elementos lineares e o domínio em 200 células triangulares constantes.

De acordo com Greenberg (1971), a solução fundamental para o operador adjunto laplaciano denotada por  $u^*$ , resultante de uma fonte unitária e pontual é:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4)$$

Onde  $r = |X - \xi|$  é a distância entre o ponto campo  $X$  e o ponto de colocação  $\xi$  da fonte unitária.

Conhecida a solução fundamental, a sua derivada em relação à direção normal ao contorno é denotada por  $q^*$  e calculada como:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5)$$

### 3 FORMULAÇÃO COM O MEC

A equação integral clássica do Método dos Elementos de Contorno é:

$$\begin{aligned}
 C(\xi)u(\xi, t) &= \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X, t) d\Gamma - \\
 &+ \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X, t) d\Gamma + \\
 &- \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u(X, t)}{\partial t} u^*(\xi, X) d\Omega
 \end{aligned} \quad (6)$$

O termo  $C(\xi)$  é dado por:

$$C(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \notin \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi \text{ é ponto de contorno suave} \\ 1, & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases} \quad (7)$$

Adotando-se diferenças finitas para aproximar a derivada temporal do potencial presente na eq.(6), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 C(\xi) u(\xi, t + \Delta t) &= \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X, t + \Delta t) d\Gamma - \\
 &+ \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X, t + \Delta t) d\Gamma + \\
 &- \frac{1}{\alpha \Delta t} \int_{\Omega} u(X, t + \Delta t) u^*(\xi, X) d\Omega + \\
 &+ \frac{1}{\alpha \Delta t} \int_{\Omega} u(X, t) u^*(\xi, X) d\Omega
 \end{aligned} \quad (8)$$

#### 4 RESULTADOS

Resolvendo-se a equação integral (8) para uma condição inicial de potencial nulo no tempo  $t_0$ , eq.(9), e aplicando-se  $\alpha$  igual a 0,05, 0,5 1,0, tem-se os resultados apresentados na Figura 2:

$$u(X, 0) = 0, \quad X \in \Omega \quad (9)$$

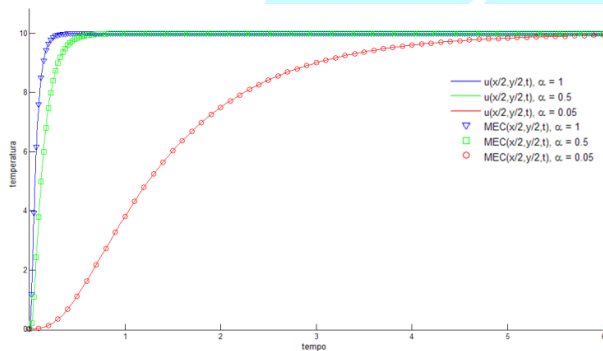


Figura 2 – Comparação entre a solução analítica e o MEC no ponto central da placa quadrada.

Na mesma figura são apresentados os resultados analíticos para o problema apresentado, cuja expressão é dada por (Carrer *et al.*, 2011):

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \bar{u} - \\
 &+ \frac{16\bar{u}}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha \pi^2 (m^2 + n^2) t}{L^2}}}{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)
 \end{aligned} \quad (10)$$

para  $m$  e  $n$  ímpares.

Observa-se que a solução numérica do MEC corresponde à solução analítica, comprovando a eficácia do MEC.

Na Figura 3 é ilustrado o processo de difusão do calor ao longo do tempo para o domínio do problema em instantes

de tempo específicos para o caso em que a difusividade térmica ( $\alpha$ ) é igual a 1,0.

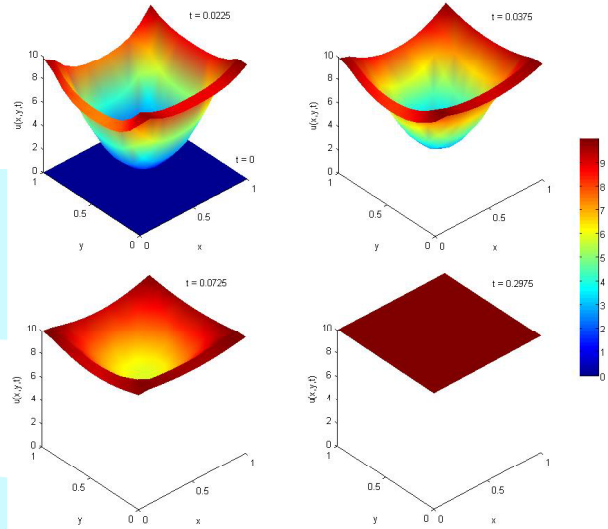


Figura 3 – Solução no domínio para diferentes tempos e  $\alpha = 1,0$ . A partir da Figura 3 é possível verificar a gradual elevação da temperatura do domínio até o equilíbrio final com a temperatura prescrita no contorno. Resultados similares foram verificados para os casos em  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,5$ .

#### 5 CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos com a aplicação do MEC foi possível verificar que o uso de elementos lineares de contorno associado ao uso de células triangulares constantes traz resultados satisfatórios em relação à solução analítica. Esses resultados comprovam a eficácia do MEC e motiva o emprego da solução fundamental independente do tempo para análise de problemas potenciais bidimensionais transientes.

#### REFERÊNCIAS

- Brebbia, C. A. Dominguez, J. *Boundary Elements An Introduction Course*. Bath Press, Great Britain, 1989.
- Carrer, J. A. M. Oliveira, M. F. Vanzuit, R. J. MANSUR, W. J. Transiente heat conduction by the boundary element method D-BEM approaches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V.89, N. 7, pp 897-913, 2011.
- Greenberg, M. D. *Application of Green's Functions in Science and Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- Jacobs, D. *The State of the Art in Numerical Analysis*, Academic Press, New York, USA, 1979.
- Simmons, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica – Volume 2*. McGraw Hill, 1987.