Função de Transferência

Objetivo

- Estudo das características de estabilidade e causalidade de Sistemas Lineares Invariantes ao Tempo Contínuo - SLITC's;
- Desenvolver scripts para definir os elementos de um SLITC a partir da Função de Transferência;

Fundamentação Teórica

Polos e Zeros

A forma mais comumente encontrada da Transformada de Laplace na engenharia é uma razão de polinômios em *s* (forma expandida):

$$X(s) = \frac{b_{N-M}s^{N} + b_{N-M-1}s^{M-1} + \cdots + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_N} \quad (1)$$

É comum também encontrarmos $X(s)$ expresso como produto de termos (forma fatorada) que envolvem as raízes dos polinômios do numerador e do denominador:

$$X(s) = B_M \frac{\prod_{k=1}^{M}(s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - p_k)} \quad (2)$$

Os valores z_k, as raízes do polinômio do numerador, são chamados de ***zeros*** de $X(s)$. Os valores p_k, as raízes do polinômio do denominador, são chamados de ***polos*** de $X(s)$. Representamos os zeros no plano-*s* com o símbolo “o” e os polos com o símbolo “x” (veja Figura-1). As localizações de polos e zeros no plano-*s* caracterizam completamente um SLITC. A constante B_M é denominada fator de ganho se $X(s)$ for a Função de Transferência do SLITC.

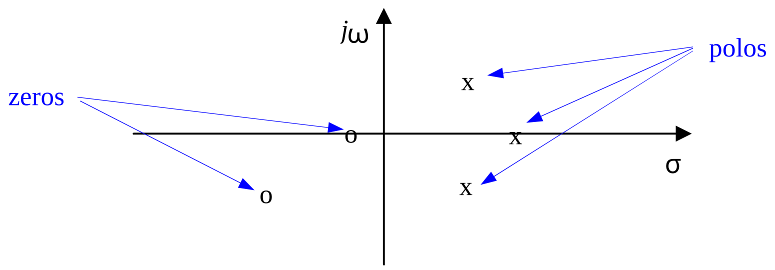

Figura 1 – Plano *s*.

Causalidade e Estabilidade

A ***Resposta ao Impulso***, ***h*(*t*),** de um SLITC pode ser obtida pela Transformação de Laplace Inversa da ***Função de Transferência***, ***H*(*s*)**. Para obter uma transformada inversa única, devemos conhecer a RDC ou ter algum conhecimento a respeito da ***Resposta ao Impulso***. A descrição de um SLITC em termos de equação diferencial não possui esta informação. Daí para se calcular a ***Resposta ao Impulso*** devemos ter um conhecimento adicional das características do sistema. As relações entre os polos, os zeros e as características do sistema podem proporcionar este conhecimento adicional.

A ***Resposta ao Impulso*** de um sistema **causal** é igual a zero para $t < 0$. Portanto, se soubermos que um sistema é causal, a resposta ao impulso será determinada a partir da função de transferência usando-se as Transformadas Inversas de Laplace unilateral direita.

Um polo em $s = p_k$ no semiplano esquerdo (SPE) do plano s, $\mathrm{Re}(p_k) < 0$, contribui com um termo exponencialmente decrescente para a ***Resposta ao Impulso***, enquanto que um polo no semiplano direito (SPD) do plano s, $\mathrm{Re}(p_k) > 0$, contribui com um termo exponencialmente crescente para a ***Resposta ao Impulso***. Estas relações estão ilustradas na Figura 2.

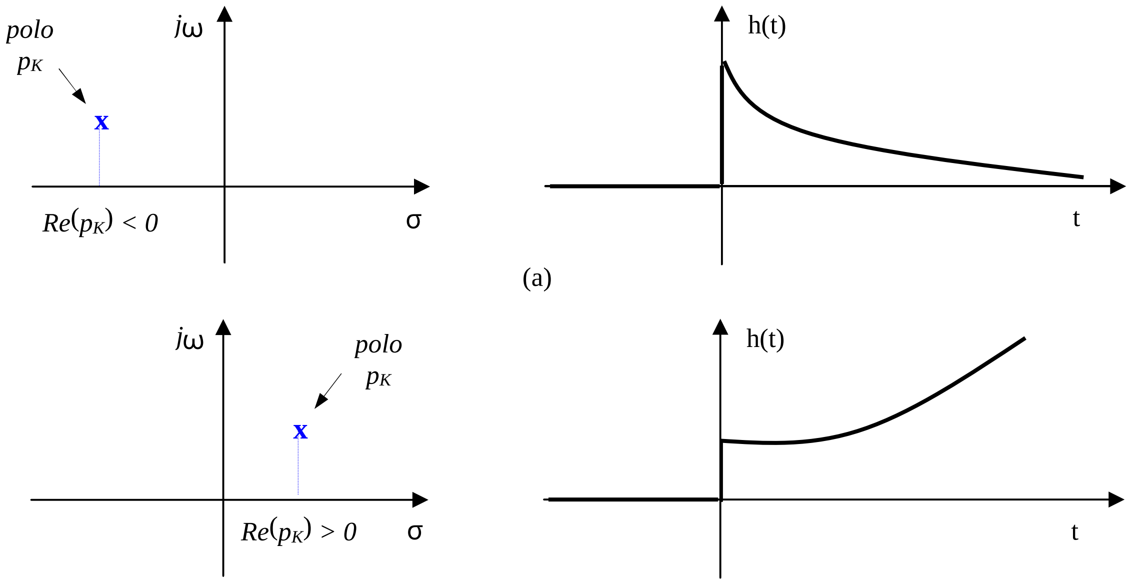

Figura 2 – Relação entre a localização do pólo e a resposta ao impulso de um sistema causal.

Assim, se sabemos que um <u>sistema é estável</u>, a resposta ao impulso será absolutamente integrável, o que implica a existência da Transformada de Fourier, ou seja, a RDC inclui o eixo $j\omega$ do plano s. Este conhecimento é suficiente para determinar de maneira única a Transformada de Laplace Inversa da ***Função de Transferência***.

Comandos Matlab para Descrição de SLITCs

O Matlab possui uma caixa de ferramentas (*toolbox*) chamada ***Control System*** que possui funções para relacionar as diversas representações dos SLITCs: *Função de Transferência*, *Polos e Zeros*, *Variáveis de Estado*, e outras. Todas elas baseiam-se em objetos SLITCs que representam as diferentes formas de descrição dos sistemas.

A definição do objeto ***Função de Transferência*** é feita pelo comando **H=tf(b,a).** Este comando cria um objeto **H** do tipo SLITC cuja Função de Transferência possui polinômios no numerador e no denominador definidos pelos vetores ***b*** e ***a***, respectivamente. Os coeficientes em ***b*** e ***a*** são ordenados em potências decrescentes de s. O comando **H=zpk(z,p,k)** cria um objeto SLITC representado na forma *zero-polo-ganho*.

Os zeros e os polos são descritos pelos vetores ***z*** e ***p***, respectivamente, e o ganho pelo escalar ***k***.

Os comandos **tzero(H)** e **pole(H)** encontram os zeros e os polos do objeto ***H*** que representa o SLITC, enquanto **pzmap(H)** produz um gráfico da localização de polos e zeros do sistema ***H***. Dentre outras funções que se aplicam diretamente aos objetos SLITCs, temos **freqresp(H,w)** para determinar a ***Resposta em Freqüência*** na faixa de frequências determinada pelo parâmetro ***w***, **step(H)** para determinar a resposta ao degrau, **impulse(H)** para determinar a resposta ao impulso e **lsim(H,x,t)** para simular a saída do sistema em resposta a uma entrada ***x*(*t*)** especificada.

Seja um SLITC descrito por uma ***Função de Transferência*** com zeros em $s = 0$, $s = \pm j10$, polos em $s = -0{,}5 \pm j5$, $s = -3$ *e* $s = -4$ e ganho 2. Vamos mostrar o mapa de polos e zeros no plano-*s*, e traçar também a ***Resposta em Frequência*** do mesmo SLITC.

```
% DESCRIÇÃO DE UM SLITC
%
% Variáveis dos polos, zeros e ganho do sistema

z = [0, j*10, -j*10]; p = [-0.5+j*5, -0.5-j*5, -3, -4]; g = 2;
disp(' '); disp('>>>> Criando o objeto SLITC...'); disp(' ');
Hzpk = zpk(z,p,g)

% Plotando polos e zeros no plano s
pzmap(Hzpk);
title(' Mapa de Polos e Zeros do SLITC '); grid on
xlabel('Real(s)'); ylabel('Imag(s)');
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR...'); disp(' ');
pause

% Calculando a função de transferência
Hft = tf(Hzpk)
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause

% Plotando o gráfico da Resposta em Frequência
w = [0:0.1:20];     % faixa de frequências desejada
Hrf = freqresp(Hft,w);
modHrf = abs(squeeze(Hrf)); % módulo da resp. freq.
figure; plot(w,modHrf); title('Magnitude da Resposta em Frequência');
xlabel('Frequência'); ylabel('Amplitude'); grid

% Plotando zeros e polos
Z = tzero(Hft)
P = pole(Hft)
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR...'); disp(' ');
pause

% Simulando o sistema no tempo para uma entrada x(t) senoidal
figure
```

```
t = 0:0.01:10; x = 5*sin(2*pi*100*t + pi/4);
lsim(Hft,x,t)
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR...'); disp(' ');
pause

% Simulando o sistema no tempo para uma entrada degrau
figure
step(Hft,t)
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR...'); disp(' ');
pause

% Simulando o sistema no tempo para uma entrada impulso
figure
impulse(Hft,t)
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR...'); disp(' ');
pause
```

EXERCÍCIOS

1) Desenvolva um script para definir um objeto SLITC para um sistema representado pela ***Função de Transferência*** dada por:

$$H(s) = \frac{5s + 7}{s^2 + 4s - 4}$$

Mostre a magnitude da ***Resposta em Freqüência*** deste sistema e a localização dos polos e zeros. Faça a simulação no domínio do tempo para o sinal rampa $x(t) = t$, com t de 0 a 50 seg. O que podemos concluir sobre a estabilidade desse sistema. Justifique.

2) Construa um script para analisar sistemas no domínio da freqüência. O script deve disponibilizar um menu com as seguintes opções:

   a) Dados de entrada para representação do sistema (***função de transferência***):
      Opção 1: entrada dos coeficientes do numerador e do denominador;
      Opção 2: entrada dos zeros, polos e ganho do sistema;
   b) Cálculo dos Polos, Zeros (caso a Opção 1 tenha sido escolhida)
   c) Exibição do Mapa de Polos e Zeros;
   d) Análise da Estabilidade do Sistema;
   e) Gráfico da magnitude da ***Resposta em Frequência*** × frequência (Hz);
   f) Simulação temporal: a saída do SLITC para uma entrada definida pelo usuário.

Observação: Caso o usuário escolha a opção de simulação, solicite o tempo máximo para o qual a saída será calculada (admita que a simulação inicie sempre no tempo zero).