

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE
TRANSFERÊNCIA UTILIZANDO COMO
ENTRADA UM DEGRAU**

Dárcio dos Santos Silva

Francisco Villarreal Alvarado

Orientador

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Co-orientador

Dissertação submetida à Universidade
Estadual Paulista – UNESP, Câmpus
de Ilha Solteira, para obtenção do título
de Mestre em Engenharia Elétrica.

Ilha Solteira – SP, fevereiro de 2008.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

S586i	<p>Silva, Dárcio dos Santos. Identificação de funções de transferência utilizando como entrada um degrau / Dárcio dos Santos Silva. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2008 118 p. : il.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2008</p> <p>Orientador: Francisco Villarreal Alvarado Co-orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira Bibliografia: p. 107-108</p> <p>1. Identificação. 2. Função de transferência. 3. Entrada degrau.</p>
-------	--



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Identificação de Funções de Transferência Utilizando como Entrada um Degrau

AUTOR: DÁRCIO DOS SANTOS SILVA

ORIENTADOR: Prof. Dr. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina

Data da realização: 29 de fevereiro de 2008.


Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO

À Joana e ao Daniel
meus pais

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ.

Agradeço aos meus orientadores professores Villarreal e Marcelo Teixeira pelo auxílio fundamental e que tornaram possível a realização desta pesquisa.

A todos os professores do departamento de matemática, especialmente os professores Marcelo Reicher, Ernandes e Paulo Hiratsuka, que são grandes influenciadores do meu pensamento acadêmico e ao professores do departamento de engenharia elétrica de Ilha Solteira.

Aos professores Edvaldo e Zé Paulo pelas valiosas sugestões na banca de Qualificação e também ao Adílson pela gentileza.

Gostaria de agradecer aos amigos que fiz no decorrer da vida: O pessoal do Parque Boa Esperança, o pessoal de Santa Clara, o pessoal do lab. externo do departamento (especialmente Carlos Febres) e aos moradores da Ala 08 do alojamento de Ilha Solteira, no qual tive o prazer de conviver nos últimos seis anos. Especialmente aos amigos Sanderson (*Dank!* Embora eu prefira uma palavra que não tem tradução e pertence somente à nossa língua vernácula: Saudade!), Leonardo e também ao Cássio (São-paulino sofredor), com os quais tive o prazer de conhecer na época da graduação.

Agradeço a tia Armênia e as minhas primas Eliane e Viviane pela disposição em ajudar.

Finalmente, e não menos importante, gostaria de agradecer especialmente à Joana (minha mãe) e ao Daniel (meu pai) que tornaram possível, mais do que eu mesmo, a finalização desta etapa da minha vida com êxito. Acredito que a maior parte dos créditos deve ser depositada aos dois e, quando penso em tudo que ambos fizeram por mim, posso parafrasear (e guardando as devidas proporções) um cientista que causou um dos maiores impactos na história da Ciência para elucidar minha (pequena) história...

“Sempre estive apoiado no ombro de gigantes”!

Sir Isaac Newton (1643- 1727)

RESUMO

O objetivo do trabalho consiste em estudar e implementar um método de identificação de modelos de funções de transferência que utiliza como entrada de teste um degrau e que foi proposto inicialmente em Kosaka (2005) e compreende duas fases: obtenção de dados referentes à saída do sistema após a aplicação da entrada degrau e a composição de um sistema matricial formado por uma matriz de Toeplitz a partir desses dados. Na solução deste sistema matricial, estima-se os parâmetros da função de transferência do sistema. Neste estudo é proposta uma generalização do método de identificação, descrito em Kosaka, para funções de transferências instáveis. Esse novo método tem como base a multiplicação, no domínio do tempo, da saída da planta $y(t)$ por uma função exponencial do tipo e^{-at} , sendo a um número real positivo. A constante “ a ” deve ser suficientemente grande, de modo que $y(t)e^{-at} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Com esse procedimento o método identifica uma função de transferência estável ($G(s+a)$) e então é identificada a função de transferência da planta ($G(s)$). Os resultados da avaliação mostram que o método generalizado e proposto para funções de transferência instáveis também pode ser aplicado em funções de transferência estáveis. O método generalizado fornece melhores resultados quando é comparada a resposta ao degrau da função de transferência estimada pelo método generalizado com a resposta ao degrau do método proposto originalmente por Kosaka em relação à resposta ao degrau da função de transferência da planta com ruído branco na saída.

Palavras-chave: Identificação, função de transferência, entrada degrau.

ABSTRACT

The objective of this work is to study and implement a method of identifying models of transfer functions which uses as input one step and that was initially proposed in Kosaka (2005). This method comprises two phases: obtaining data relating to the output of the system after application of the step and the composition of a system matrix composed of by a Toeplitz matrix from these data. With the solution of this matrix system, it is estimated the parameters of the transfer function of the system. In this study is proposed a generalization of the identification method, described in Kosaka, for unstable transfer functions. This new method is based on the multiplication in time domain of the plant's output $y(t)$ by an exponential function of the type e^{-at} , where a is a positive real number. The constant " a " must be large enough so that $y(t)e^{-at} \rightarrow 0$ when $t \rightarrow \infty$. With this procedure the method identifies a stable transfer function ($G(s+a)$) and then is identified the transfer function of the plant ($G(s)$). The results of the evaluation showed that the method widespread and proposed for unstable transfer functions can also be applied to stable transfer functions. The generalized method showed better results when compared with the step response of the transfer functions estimated by the method with the step response of the transfer function estimated by the method originally proposed by Kosaka (2005), regarding the step response of the transfer function of the plant with white noise in the output.

Keywords: Identification, transfer function, step input.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Elementos de um diagrama de blocos	27
Figura 2 Ponto de soma	27
Figura 3 Exemplo de uma resposta ao degrau de um sistema instável	28
Figura 4 Diagrama de blocos do método estudado para um sistema em malha aberta estável e de primeira ordem	30
Figura 5 Diagrama de blocos do método estudado para um sistema em malha aberta estável de primeira ordem com um zero.....	31
Figura 6 Diagrama de blocos do método estudado para uma FT estável de ordem dois	34
Figura 7 Diagrama de blocos do método proposto por Kosaka para FT's estáveis	38
Figura 8 Diagrama de blocos do método proposto para FT's instáveis	54
Figura 9 Configuração do <i>solver equation</i>	59
Figura 10 Diagrama de blocos utilizado na simulação 1	60
Figura 11 Diagrama de blocos utilizado na simulação 2	61
Figura 12 Resposta ao degrau das FT's identificadas estáveis e de ordem superior ou igual à ordem da FT da planta.....	64
Figura 13 Resposta ao degrau das FT's identificadas estáveis com ordem inferior à ordem da FT da planta	64
Figura 14 Resposta ao degrau das FT's identificadas estáveis	65

Figura 15 Comparação da resposta ao degrau entre modelo reduzido com ordem 2 e um zero identificado pelo método proposto por Kosaka (2005) e o modelo reduzido com retenção do pólo mais lento	66
Figura 16 Diagrama de blocos do método proposto para FT instável da simulação 3.....	67
Figura 17 Resposta ao degrau da FT $G_p(s+1)$ esperada e da FT $G_e(s+1)$ identificada pelo método generalizado	68
Figura 18 Resposta ao degrau dos modelos reduzidos e estáveis identificados pelo método generalizado na simulação 3	69
Figura 19 Diagrama de blocos do método generalizado para FT instável da simulação 4	70
Figura 20 Resposta ao degrau de $G_e(s+4)$ da simulação 4 e de $G_p(s+4)$.52	71
Figura 21 Carro protótipo	72
Figura 22 Diagrama de blocos do sistema de rastreamento	73
Figura 23 Entrada degrau e sinal do sonar	74
Figura 24 Sinal filtrado e sinal aproximado	74
Figura 25 Sinal de $G(s+a)/(s+a)$ na simulação 5	75
Figura 26 Resposta ao degrau de $G_e(s+a)$	75
Figura 27 Comparação entre o sinal de saída com a função de transferência estimada pelo método generalizado para funções instáveis e o sinal de saída (real) da planta	76
Figura 28 Comparação entre a resposta ao degrau do protótipo (real) em malha fechada e a resposta ao degrau do modelo identificado	76
Figura 29 Sinal de $G_e(s+a)/(s+a)$ utilizando diferentes constantes “a”	78

Figura 30 Resposta ao degrau para FT estável da simulação 6 utilizando o método proposto para funções instáveis e $a = 0,2$	79
Figura 31 Resposta ao degrau para FT estável da simulação 6 utilizando o método proposto para funções instáveis e $a = 0,5$	80
Figura 32 Resposta ao degrau para FT estável da simulação 6 utilizando o método proposto para funções instáveis e $a = 1$	80
Figura 33 Diagrama de blocos do método generalizado proposto para FT's instáveis com ruído somado à saída da planta na simulação.....	85
Figura 34 Sinal de $G_p(s)$ da simulação 8 com ruído branco	85
Figura 35 Resposta ao degrau das FT's estimadas na simulação 8 na presença de ruído e utilizando $a = 0,5$ e $a = 1$	87
Figura 36 Resposta ao degrau das FT's estáveis identificadas pelo método proposto por Kosaka considerando-se o ruído branco	90
Figura 37a Resposta ao degrau das FT's estáveis com pelo menos um zero e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-3} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis	92
Figura 37b Resposta ao degrau das FT's estáveis com numerador constante e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-3} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis	93
Figura 38a Resposta ao degrau das FT's estáveis com pelo menos um zero e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-2} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis	95

Figura38b Resposta ao degrau das FT's estáveis com numerador constante e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-2} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis	96
Figura 39 Comparação da resposta ao degrau entre as FT's identificadas pelo método generalizado proposto para FT's instáveis (a) e as FT's identificadas pelo método proposto por Kosaka (b) na simulação 11.1	99
Figura 40 Resposta ao degrau das FT's identificadas pelo procedimento adotado para FT's instáveis na simulação 11.2 com ruído somado à saída da planta	99
Figura 41 Comparação da resposta ao degrau entre as FT's identificadas pelo método generalizado proposto para FT's instáveis (a) e as FT's identificadas pelo método proposto por Kosaka (b) na simulação 11.3	100
Figura 42a Resposta ao degrau das FT's identificadas pelo método generalizado proposto utilizando $a = 3$ e $a = 4$ com ruído na saída da planta	102
Figura 42b Resposta ao degrau das FT's identificadas pelo método generalizado proposto utilizando $a = 5$, $a = 6$ e $a = 10$ com ruído na saída da planta	102
Figura 43 Sinais com ruído branco somado à saída da planta	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Sistema de equações de modelo com pólos e zeros cancelados	47
Tabela 2	Resultados da identificação sem conhecimento prévio da ordem da planta	62
Tabela 3	Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s)$ conforme a Tabela 2.....	63
Tabela 4	Modelo reduzido de ordem dois com um zero.....	65
Tabela 5	Modelos reduzidos para $G_e(s+1)$ identificados pelo método na simulação 3.....	69
Tabela 6	Modelos reduzidos para $G_e(s)$ da simulação 3.....	70
Tabela 7	Parâmetros encontrados utilizando-se outros valores para "a" na simulação 4.....	72
Tabela 8	Comparação entre a função de transferência identificada pelo método ($G_e(s+a)$) e a função de transferência da planta ($G_p(s+a)$) utilizando diversas constantes "a"....	78
Tabela 9	Erros obtidos com as constantes que resultaram em FT's estáveis na simulação 6 .	79
Tabela 10	Funções de transferência $G_e(s+1)$ identificadas pelo método proposto para funções instáveis e sem o conhecimento prévio da ordem da planta.....	81
Tabela 11	Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s+1)$ conforme a Tabela 10.....	82
Tabela 12	Erro utilizando o método proposto para funções de transferência instáveis na função de transferência estável da simulação 7.....	83
Tabela 13	Erro utilizando o método proposto por Kosaka (2005) segundo os parâmetros obtidos na simulação 2 (Tabela 2).....	83

Tabela 14 Funções de transferência identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis utilizando diversas constantes “ a ”, e as funções de transferência identificadas pelo método proposto por Kosaka.....	86
Tabela 15 Erro das respostas ao degrau nas funções de transferência identificadas na simulação 8.....	87
Tabela 16 Resultados encontrados na presença de ruído branco com potência de 0,001 utilizando o método proposto por Kosaka.....	89
Tabela 17 Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s)$ conforme a Tabela 16.....	90
Tabela 18 Resultados encontrados na presença de ruído branco com potência de 0,001 utilizando o método proposto para FT's instáveis e $a = 1$	91
Tabela 19 Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s+a)$ conforme a Tabela 18.....	92
Tabela 20 Resultados encontrados na presença de ruído branco com potência 10^{-2} utilizando o método proposto para FT's instáveis e $a = 1$ na simulação 10.....	94
Tabela 21 Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s+a)$ conforme a Tabela 20.....	95
Tabela 22 Erro na resposta ao degrau das funções de transferência das simulações 9 e 10....	97
Tabela 23 Comparação entre o método proposto por Kosaka e o procedimento adotado para funções de transferência instáveis utilizado para FT's estáveis.....	98
Tabela 24 Erro na resposta ao degrau das funções de transferência identificadas ($G_e(s+a)$) utilizando diversas constantes “ a ” na simulação 12.....	101

SIMBOLOGIA E ABREVIACÕES

Observação: Neste trabalho, matrizes são indicadas por letras em negrito.

Simbologia

- $Y(s)$ Saída da planta no domínio s ;
- $y(\infty)$ Sinal de saída da planta em regime permanente;
- $G(s)$ Transformada de Laplace de $g(t)$;
- $\frac{1}{s}$ Entrada degrau;
- $\det(A)$ Determinante da matriz A ;
- $G_p(s)$ Função de transferência da planta;
- $G_e(s)$ Função de transferência estimada (identificada)
- $L\{g(t)\}$ Transformada de Laplace da função $g(t)$;
- $L^{-1}\{G(s)\}$ Transformada inversa de Laplace da função $G(s)$;
- \mathcal{C} Conjunto dos números complexos;
- \mathbb{R}^n Espaço vetorial $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n vezes);
- $\langle \cdot \rangle$ Produto interno usual do \mathbb{R}^n ;
- $\| \cdot \|$ Norma euclidiana;
- \forall Para qualquer;
- t Transposição de vetores ou matrizes;
- $P_{1,2}$ Pólos conjugados da função de transferência;
- $\dot{\mathbf{x}}(t)$ derivada do vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ em relação ao tempo;
- $Z_{1,2}$ Zeros conjugados da função de transferência;
- $*$ Multiplicação.

Abreviações

BIBO Entrada limitada-saida limitada (*bounded input-bounded output*);

Cf. Conferir;

e.g. Exemplo genérico;

FT Função de transferência (FT's no plural);

MCP Método clássico de Padé;

SLIT Sistema linear e invariante no tempo;

SISO Uma saída-uma entrada (*single input-single output*);

TVF Teorema do valor final.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	20
Justificativa e objetivo	21
CAPITULO 1	
REVISÃO DA LITERATURA	23
1.1 Conceitos Básicos	23
1.1.1 Modelagem Matemática	23
1.1.2 Invariância no Tempo	24
1.1.3 Concentração de Parâmetros e Parâmetros Distribuídos	24
1.1.4 Tipos de Modelos	25
1.1.4.1 Modelos Dinâmicos e Modelos Estáticos	25
1.1.4.2 Modelos Contínuos e Modelos Discretos.....	25
1.1.4.3 Modelos Determinísticos e Modelos Estocásticos.....	25
1.1.4.4 Modelos Paramétricos e Não Paramétricos.....	26
1.2 Diagrama de Blocos.....	26
1.3 Sinal de Teste para Entrada e Redução de Modelos.....	27

CAPITULO 2

PROCEDIMENTO PARA IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA	29
2.1 Identificando Funções de Transferência Estáveis de Ordem Um	29
2.2 Identificando Funções de Transferência Estáveis de Ordem Dois	33
2.3 Identificando Funções de Transferência Estáveis de Ordem n	37
2.3.1 Redução da Ordem do Modelo e o Método Clássico de Padé (MCP)	47
2.4 Exemplos	49
2.5 Identificando Funções de Transferência Instáveis	52

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA, RESULTADOS E CONCLUSÕES.....	56
3.1 Metodologia	56
3.1.1 Planejamento da Ação	56
3.1.2 Sinais de Teste para Entrada	57
3.1.3 Propriedades da Transformada de Laplace e o Teorema do Valor Final.....	57
3.1.4 Validação do Modelo	58
3.2 Resultados.....	58
3.2.1 Parâmetros Encontrados para Sistemas Estáveis	58
3.2.2 Parâmetros Encontrados para Sistemas Instáveis	66
3.2.3 Parâmetros Encontrados para Sistemas Estáveis Utilizando o Método Proposto para Sistemas Instáveis	77
3.2.4 Parâmetros Encontrados em Sistemas com Ruído	84
3.2.5 Conclusões	103
3.3 Conclusão Geral.....	105

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....	107
APÊNDICE A	109
APÊNDICE B	113

INTRODUÇÃO

A busca por um modelo matemático que represente sistemas e fenômenos observados é um antigo desafio do homem. Mesmo considerando-se as novas técnicas de modelagem, o desafio de tal busca continua (AGUIRRE, 2000).

A partir da década de 90, houve uma necessidade crescente de desenvolver formas para obter modelos matemáticos a partir de dados observados e não unicamente das equações que descrevem o fenômeno físico do processo. Este fato deve-se, principalmente, à complexidade crescente dos sistemas em questão, inviabilizando, em muitos casos, a possibilidade de obter as suas equações básicas, procedimento conhecido como modelagem baseada na física ou modelagem fenomenológica. Outro fator importante na mudança de foco ocorrida nos anos 90 foi o menor custo e o melhor desempenho dos computadores. Devido a estes fatos, a aquisição e o processamento de dados passaram a ser feitos diretamente dos sistemas e, a partir de então, o desenvolvimento de modelos matemáticos coerentes com os dados tomou força. Este procedimento é conhecido como modelagem empírica ou identificação de sistemas.

Recentemente, a maior capacidade de coletar dados sobre a dinâmica do sistema que está sendo observado, tornou o uso de técnicas de identificação desejável e, em última instância, necessárias em quase todas as áreas do conhecimento, como por exemplo, em sistemas de controle automático.

A identificação busca a determinação de um modelo de um sistema dinâmico partindo da observação da entrada e da saída do sistema (AGUIRRE, 2000), (LANDAU, 1990). O conhecimento do modelo matemático é fundamental para o projeto e implementação de um sistema de controle de alto desempenho. Na maioria das situações práticas é necessária

a implementação de uma metodologia para a identificação direta desses modelos dinâmicos partindo de dados experimentais.

Sendo uma aproximação experimental para a determinação da dinâmica do sistema (AGUIRRE, 2000), (LANDAU, 1990), uma identificação completa é constituída por quatro estágios (LANDAU, 1990):

1. Aquisição da informação referente à entrada/saída do sistema sob um protocolo experimental;
2. Escolha da estrutura do modelo;
3. Estimação dos parâmetros do modelo;
4. Validação do modelo identificado.

O primeiro estágio diz respeito basicamente ao tipo de entrada que será utilizada na identificação. O segundo estágio trata da ordem da função de transferência e essa escolha depende de fatores como o tipo de sistema que está sendo identificado, e.g., sistema mecânico, sistema pneumático, etc. O terceiro estágio refere-se ao procedimento (algoritmo) e no quarto verifica-se se o modelo identificado corresponde (ao comportamento dinâmico) do modelo real.

Considere que a função de transferência de uma planta, $G_p(s)$, apresenta um número de pólos n maior ou igual ao número dos seus zeros. Então a ordem desta planta é n .

A simplificação ou redução de ordem de modelos visa técnicas que permitam um modelo reduzido $R(s)$ de ordem $m < n = \text{ordem } G_p(s)$ e que $R(s)$ se aproxime de $G_p(s)$. Em outras palavras, deseja-se que a transformada inversa de Laplace de $R(s)$, $L^{-1}\{R(s)\} = r(t) \approx g(t) = L^{-1}\{G_p(s)\}$ (no caso de uma resposta ao impulso) ou ainda, $L^{-1}\{R(s)/s\} \approx L^{-1}\{G_p(s)/s\}$, para a resposta ao degrau unitário (AGUIRRE, 2000).

Logo, um modelo de ordem reduzida é aquele que tem um comportamento dinâmico próximo (parecido) àquele do qual deriva.

Justificativa e objetivo

Com a queda do custo do *hardware* e a crescente demanda por métodos de identificação de sistemas, o objetivo do presente trabalho é estudar o método de identificação de funções de transferência (FT's) proposto por Kosaka (2005), tornando o método mais

facilmente compreendido (especialmente por alunos de graduação em engenharia elétrica, mecânica, de controle e automação, entre outros). Busca-se, também, a generalização do método para FT's instáveis, já que o método proposto por Kosaka exige que a função seja estável.

Alguns modelos são extremamente complexos e, em alguns casos, trabalhar com um modelo cuja função de transferência de ordem reduzida possua um comportamento temporal (dinâmico) próximo à função de transferência da qual deriva deve ser levada em consideração. Este estudo também busca obter a redução de ordem de uma FT, *a priori*, desconhecida.

O trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: No Capítulo 1, são apresentados algumas definições e conceitos básicos, como, por exemplo, a definição de modelos determinísticos e modelos paramétricos, o diagrama de blocos e alguns sinais de entrada para teste, especialmente a entrada degrau, e trata-se também da redução de modelos e os principais trabalhos referentes ao tipo de sinal de teste e modelos reduzidos. No Capítulo 2 destaca-se o método de identificação para FT's estáveis proposto por Kosaka (2005) acrescido de uma ilustração através do diagrama de blocos. Nesse capítulo, inicialmente trata-se de funções de transferência de primeira ordem e de segunda ordem para, no decorrer do capítulo, além de apresentar, familiarizar o leitor com o método de identificação proposto por Kosaka (2005) para FT's de ordem n . Nesse capítulo encontra-se também a generalização do método proposta para a identificação de FT's instáveis, pois o método proposto por Kosaka exige a estabilidade da FT. No Capítulo 3, a princípio, é abordada a metodologia da pesquisa e, posteriormente, são mostrados, através de simulações e também através de uma implementação prática, os resultados decorrentes desse estudo. Ainda no capítulo 3, são feitas algumas comparações entre o método proposto por Kosaka (2005) e a generalização do método proposta para funções de transferência instáveis. No final do capítulo, encontram-se as conclusões decorrentes das simulações e da implementação realizada e também a conclusão geral do trabalho. Posteriormente é listada a bibliografia consultada durante o trabalho e que dá embasamento teórico ao mesmo. No final, encontram-se os apêndices com alguns conceitos e resultados relevantes para a pesquisa.

CAPÍTULO 1

REVISÃO DA LITERATURA

1.1 Conceitos Básicos

Nesta parte do texto, definiremos como modelo a representação matemática de um sistema. Por ser uma formulação matemática do sistema, espera-se que o modelo seja representativo das principais características do sistema real. No contexto de identificação, o modelo é um equacionamento que é obtido a partir de dados da entrada/saída de um fenômeno observado para representar matematicamente o sistema (fenômeno) real.

1.1.1 Modelagem Matemática

Um modelo matemático de um sistema (fenômeno) real é uma representação matemática a partir de algumas características observadas em tal sistema (fenômeno). Assim, um modelo matemático é apenas uma representação aproximada, uma vez que não existe o modelo do sistema (fenômeno), e sim uma família de modelos com características, formas e desempenhos variados e estes modelos estão associados ao interesse e circunstâncias particulares. Por exemplo, em problemas de controle ótimo, é vantajoso o uso de representações no espaço de estados. Já para a análise da resposta transitória ou de resposta em frequência de sistemas com uma entrada e uma saída, lineares e invariantes no tempo,

pode ser mais conveniente a representação através de funções de transferência. Também é possível melhorar a precisão de um modelo matemático aumentando sua complexidade. Porém, deve existir um “contrato” entre a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados da análise da resposta deste modelo. Dessa forma, quando não for necessária uma complexidade (precisão) extrema, é preferível a obtenção de um modelo matemático simplificado.

Na obtenção de um modelo matemático razoavelmente simples, normalmente ignora-se certas propriedades físicas do sistema (fenômeno), como, por exemplo, a massa de uma mola que pode ser desprezada em operações de baixa frequência. Entretanto, tal massa torna-se uma propriedade importante em altas frequências (OGATA, 1998).

1.1.2 Invariância no Tempo

Um sistema invariante no tempo significa que o comportamento do sistema modelado não se altera com o tempo. Isto não significa que as variáveis do sistema têm valores fixos e, sim, que a evolução temporal do sistema é determinada por uma lei, comumente conhecida por dinâmica do sistema. Dessa forma, invariante no tempo significa que a dinâmica da evolução temporal do sistema permanece inalterável.

1.1.3 Concentração de Parâmetros e Parâmetros Distribuídos

A concentração de parâmetros pressupõe que as variáveis de interesse variam com o tempo e não no espaço, ou seja, descrevem o comportamento do sistema num único ponto do espaço, cujo modelo pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias.

Por outro lado, sistemas a parâmetros distribuídos podem ser descritos por equações diferenciais parciais, descrevendo o sistema tanto no tempo quanto no espaço em que o observamos.

1.1.4 Tipos de Modelos

Aqui é feita uma breve apresentação dos tipos de modelos mais utilizados.

1.1.4.1 Modelos Dinâmicos e Modelos Estáticos

Um modelo estático não leva em consideração a relação (dependência) temporal entre suas variáveis e pode ser utilizado quando a dinâmica é muito rápida ou muito lenta em relação à escala de tempo de interesse.

Se a evolução temporal de um sistema é desejada, deve-se optar por um modelo que leva em consideração tal relação temporal entre suas variáveis, como os modelos dinâmicos.

1.1.4.2 Modelos Contínuos e Modelos Discretos

Modelos contínuos representam a evolução do sistema continuamente no tempo, enquanto que modelos discretos representam a evolução do sistema em “instantes” do tempo.

1.1.4.3 Modelos Determinísticos e Modelos Estocásticos

Modelos determinísticos não levam em consideração as incertezas presentes no problema real. Enquanto que os modelos estocásticos consideram tais incertezas, ocasionando, assim, uma variável aleatória na sua saída, e não um número determinístico.

Como consequência, os modelos determinísticos são mais afetados pelos efeitos causados por ruídos, pois os métodos estocásticos utilizam ferramentas mais adequadas para o tratamento dos ruídos (AGUIRRE, 2000). De uma forma geral, pode-se dizer que os termos “determinístico” e “estocástico” dizem respeito à forma como o ruído é tratado no método de identificação.

A maior parte dos modelos determinísticos fornece modelos contínuos, em detrimento da maioria dos estocásticos, que resultam em modelos discretos no tempo.

1.1.4.4 Modelos Paramétricos e Não Paramétricos

Embora a distinção entre modelos paramétricos e não paramétricos não seja totalmente aceita, nesta pesquisa são considerados paramétricos aqueles modelos que contêm parâmetros (coeficientes) que os determinam. Modelos não paramétricos serão aqueles modelos que não têm parâmetros e sim representações gráficas, e.g., Resposta ao Degrau, Resposta em Frequência, etc. Dessa forma, os termos “paramétrico” e “não paramétrico” referem-se, essencialmente, ao tipo de modelo resultante, ou ainda à forma como se apresenta o método de identificação.

1.2 Diagrama de Blocos

Um sistema de controle pode ser constituído por certo número de componentes. Para mostrar as funções desempenhadas por cada componente costuma-se usar uma representação pictórica chamada diagrama de blocos.

Ao contrário de uma representação matemática abstrata, o diagrama tem a vantagem de indicar mais realisticamente os fluxos de sinal do sistema real e trata-se de um método potente para a análise de sistemas (YOUNKIN, 2003).

Cada bloco é um símbolo da operação matemática sobre o sinal de entrada que produz o sinal de saída. As funções de transferência são introduzidas nos blocos que são conectados por setas para indicar o sentido de fluxo de sinais.

Outra vantagem no uso do diagrama de blocos reside no fato de que é possível avaliar a contribuição de cada componente para o desempenho global do sistema (YOUNKIN, 2003).

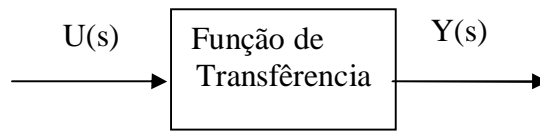


Figura 1- Elementos de um diagrama de blocos.

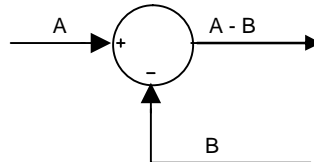


Figura 2- Ponto de soma.

Um bloco pode ser conectado em série somente se a saída do bloco não for afetada pelo bloco seguinte. Se houver quaisquer efeitos de carregamento entre os componentes é necessário combinar esses componentes num único bloco equivalente, cuja FT é simplesmente o produto das FT's individuais (OGATA, 1998), (YOUNKIN, 2003).

1.3 Sinal de Teste para Entrada e Redução de Modelos

A Resposta ao Degrau, o Método dos Mínimos Quadrados (APÊNDICE A) e a Resposta em Freqüência são amplamente utilizados como métodos de identificação *off-line* (AGUIRRE, 2000), (KOSAKA, 2005), (LANDAU, 1990).

Um sinal de entrada do tipo *M-sequency* (*Maximum Lenght Sequency*) causa ressonância em uma planta mecânica, com resultados apresentando altos níveis de ruído ou vibração (KOSAKA, 2005, p. 125).

Z. Wang e H.Unbchauen, citados por Kosaka (2005, p. 125), afirmam que outro fator importante reside no fato de que os métodos mencionados, excetuando-se a entrada em degraú, não possibilitam a aquisição de um modelo reduzido diretamente dos dados referentes à entrada/saída do sistema.

Para De Moor, Moonen, Vandenbergue e Vandewalle, Ljung, Viberg, Van Overshee e De Moor, Verhaegen e Dewilde, citados por Kosaka (2005, p. 125), outros métodos utilizados na redução de modelos, e.g., os baseados no Subespaço, necessitam obter

uma matriz de Hankel suficientemente grande para a redução de ordem do modelo, além da utilização do método dos mínimos quadrados na obtenção de alguns parâmetros do sistema em questão.

Conforme R.G. Hakvoort, R.J. P. Schrama e P.M.J. Van den Hof, Z. Zang, R. R. Bitmead e M. Gevers, citados por Kosaka (2005, p. 126), deseja-se que os servossistemas apresentem um erro pequeno na modelagem em baixas frequências. Porém, segundo B. Wahlberg e L. Ljung, citados por Kosaka (2005, p. 126), o método dos mínimos quadrados tende a reduzir o erro apenas em altas frequências.

Outra forma utilizada para a redução do modelo é a que “mantém” os pólos mais lentos de uma FT, ou seja, no modelo de ordem reduzida, os pólos mais próximos do eixo imaginário no plano complexo são mantidos, enquanto os pólos que encontram-se mais afastados do eixo imaginário são descartados. Entretanto, tal técnica pode não ser a mais adequada, pois os pólos mais lentos podem não ser os dominantes, dificultando a escolha baseada no critério de distância do eixo imaginário (AGUIRRE, 2000).

Outro método conhecido para a redução da ordem do modelo é o Método Clássico de Padé (MCP) e seus derivados, e.g., Método de Padé em torno de duas frequências (MPDF), que utiliza os parâmetros de Markov do modelo original e o Método de Padé em torno de duas frequências com retenção de pólos (MPDFRP), proposto por Shamash e citado por Aguirre (2000).

Para sistemas instáveis, ou seja, para sistemas com FT's que possuem pólos com parte real positiva, a saída resultante não é limitada (OGATA, 1998), dificultando a interpretação dos dados referentes à entrada/saída do sistema como ilustrado na Figura 3, onde observa-se

que a resposta ao degrau da função de transferência instável $G(s) = \frac{1}{s-1}$ tende a crescer indefinidamente quando o tempo aumenta.

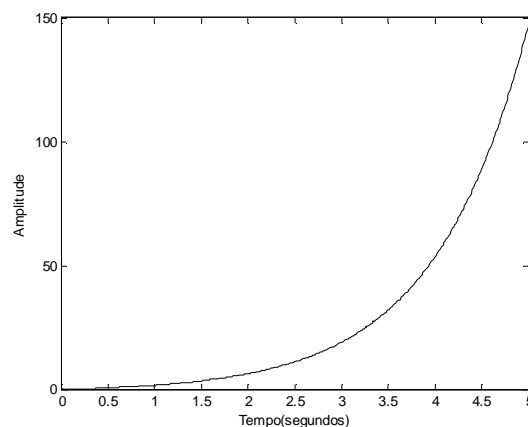


Figura 3 – Exemplo de uma resposta ao degrau de um sistema instável.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTO PARA IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Neste capítulo, é apresentado o método de identificação de funções de transferência proposto por Kosaka (2005). Primeiro, trata-se do método para FT's estáveis de primeira ordem na Seção 2.1. Logo após para FT's estáveis de segunda ordem na Seção 2.2 e de ordem arbitrária na seção 2.3, onde propõe-se, também, um diagrama de blocos. São então apresentados vários exemplos na Seção 2.4. Finalmente, é proposta uma generalização do método para FT's instáveis na Seção 2.5, uma vez que o método proposto por Kosaka (2005) trata apenas de sistemas com funções de transferências estáveis.

2.1 Identificando Funções de Transferência Estáveis de Ordem Um

Um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) com uma entrada e uma saída (SISO) é representado por

$$Y_1(s) = G(s)U(s), \quad (2.1)$$

sendo que $Y_1(s)$ é a saída do sistema, $U(s) = \frac{1}{s}$ a entrada degrau unitário e $G(s)$ a FT estável definida por

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1s + a_0}. \quad (2.2)$$

Considerando o diagrama de blocos (Figura 4), por (2.1), (2.2) e utilizando o Teorema do Valor Final (TVF) (demonstrado no Apêndice A) tem-se:

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_1(s) = \frac{b_0}{a_0} = G(0). \quad (2.3)$$

Por outro lado, note que a estabilidade de $G(s)$ assegura que $a_0 \neq 0$. Assim, de (2.2) e (2.3),

$$G(s) = \frac{G(0)}{\frac{a_1}{a_0}s + 1}. \quad (2.4)$$

Fazendo $\frac{a_1}{a_0} = a'_1$, pode-se reescrever (2.4):

$$G(s) = \frac{G(0)}{a'_1s + 1}. \quad (2.5)$$

Na Figura 4 é apresentado o diagrama de blocos que mostra como obter o sinal $Y_1(s)$ que será utilizado na identificação.

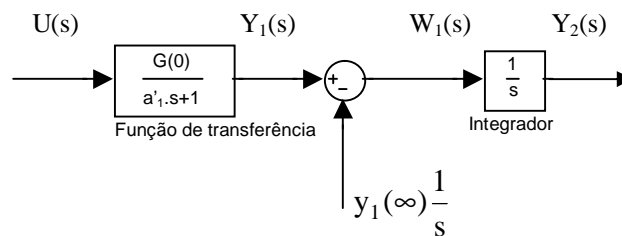


Figura 4 - Diagrama de blocos do método estudado para um sistema em malha aberta estável e de primeira ordem.

O coeficiente a'_1 que aparece em (2.5) pode ser identificado como descrito a seguir.

Através da Figura 4 e da álgebra de diagrama de blocos (OGATA, 1998) tem-se,

$$W_1(s) = Y_1(s) - \frac{y_1(\infty)}{s}.$$

De (2.3) e (2.5) vem

$$W_1(s) = \frac{1}{s} [G(s) - G(0)],$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{G(0)}{a_1 s + 1} - G(0) \right],$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{G(0) - G(0)(a_1 s + 1)}{a_1 s + 1} \right],$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{-G(0)a_1 s}{a_1 s + 1} \right],$$

$$W_1(0) = -G(0)a_1'. \quad (2.6)$$

Novamente utilizando a Figura 4, o TVF e (2.6), vem

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_2(s) = W_1(0) = -G(0)a_1'. \quad (2.7)$$

De (2.3) tem-se o valor de $G(0) = y_1(\infty)$ e de (2.6) o valor de $W_1(0) = y_2(\infty)$.

As fórmulas (2.3) e (2.7) permitem a determinação do valor de a_1' em:

$$a_1' = \frac{W_1(0)}{-G(0)} = \frac{-y_2(\infty)}{y_1(\infty)}.$$

Considere $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$, uma FT estável, $U(s) = \frac{1}{s}$ e o diagrama de blocos na

Figura 5.

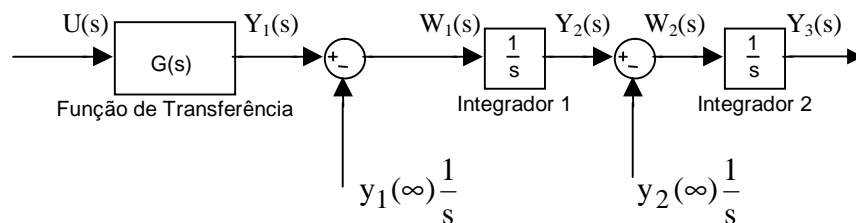


Figura 5 – Diagrama de blocos do método estudado para um sistema em malha aberta estável de primeira ordem com um zero.

Note que a estabilidade de $G(s)$ assegura que $a_0 \neq 0$. Sendo $G(0) = \frac{b_0}{a_0}$, fazendo

$$\begin{cases} \frac{b_1}{a_0} = b'_1, \\ \frac{a_1}{a_0} = a'_1, \end{cases}$$

obtém-se

$$G(s) = \frac{b'_1 s + G(0)}{a'_1 s + 1}. \quad (2.8)$$

De (2.3), (2.8) e da Figura 5 vem

$$W_1(s) = \frac{1}{s} [G(s) - G(0)],$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_1 s + G(0)}{a'_1 s + 1} - G(0) \right],$$

$$W_1(s) = \left[\frac{b'_1 - G(0)a'_1}{a'_1 s + 1} \right]. \quad (2.9)$$

$$W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1. \quad (2.10)$$

Novamente utilizando a Figura 5 e o TVF, pois $G(s)$ foi suposta estável, então

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1. \quad (2.11a)$$

Na expressão (2.11a) têm-se duas incógnitas (b'_1 e a'_1) e apenas uma equação. Continuando o processo de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, através do diagrama da Figura 5:

$$W_2(s) = Y_2(s) - \frac{y_2(\infty)}{s},$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} [W_1(s) - y_2(\infty)],$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} [W_1(s) - W_1(0)].$$

De (2.9)-(2.10) segue

$$W_2(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_1 - G(0)a'_1 - W_1(0)(a'_1 s + 1)}{a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_1 - G(0)a'_1 - W_1(0)a'_1 s - b'_1 + G(0)a'_1}{a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{-W_1(0)a'_1 s}{a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_2(s) = \left[\frac{-W_1(0)a'_1}{a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_2(0) = -W_1(0)a'_1.$$

Utilizando novamente o TVF e o diagrama de blocos:

$$y_3(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_3(s) = W_2(0) = -W_1(0)a'_1. \quad (2.11b)$$

Dessa forma, de (2.11a) e (2.11b) tem-se um sistema linear de equações do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$, sendo que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -G(0) \\ 0 & -W_1(0) \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} W_1(0) \\ W_2(0) \end{bmatrix}.$$

Supondo $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, tem-se a solução para $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$.

Observe que $\det(\mathbf{A}) = -W_1(0)$. Assim, de (2.10), $\det(\mathbf{A}) = -W_1(0) = -(b'_1 - G(0)a'_1) \neq 0$

se e somente se o pólo de $G(s)$ em (2.8), que é igual a $\frac{-1}{a'_1}$, não for igual ao zero de $G(s)$. Ou

seja, não pode ocorrer o cancelamento de pólo com o zero e, assim, a planta deve ser controlável e observável (CHEN, 1999)¹.

2.2 Identificando Funções de Transferência Estáveis de Ordem Dois.

Considere $G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$, estável, $U(s) = \frac{1}{s}$ e o diagrama de blocos da Figura

6.

¹ Na seção 2.3 será abordada a questão da observabilidade e controlabilidade.

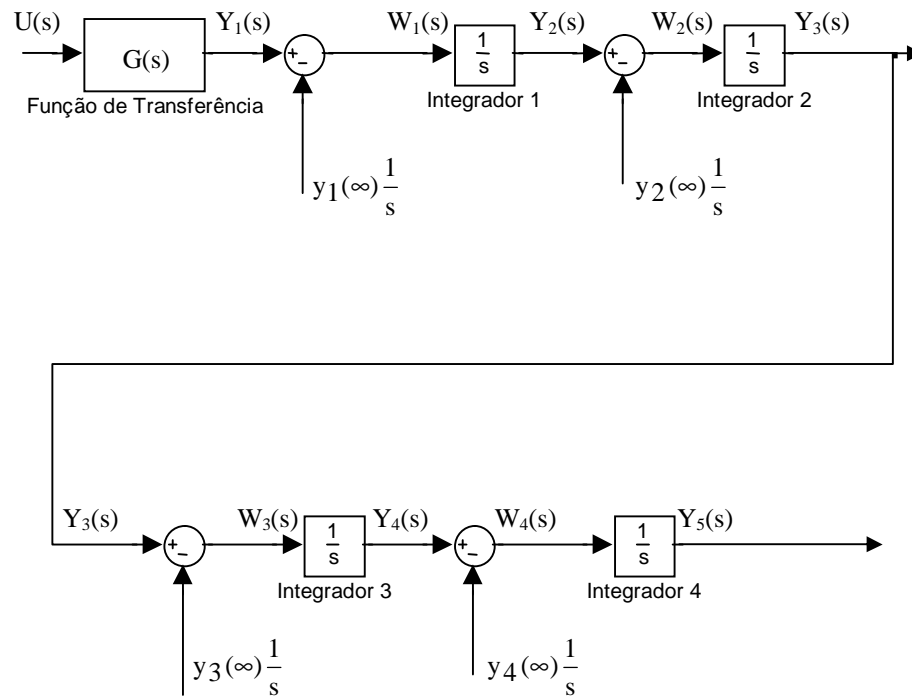


Figura 6 – Diagrama de blocos do método estudado para uma FT estável de ordem dois.

Observando que $a_0 \neq 0$ devido à estabilidade de $G(s)$ e fazendo

$$\begin{cases} \frac{b_i}{a_0} = b'_j, j = 1, 2, & G(0) = \frac{b_0}{a_0}, \\ \frac{a_j}{a_0} = a'_i, i = 1, 2, \end{cases} \quad (2.12)$$

tem-se

$$G(s) = \frac{b'_2 s^2 + b'_1 s + G(0)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1}. \quad (2.13)$$

De (2.3), (2.12), (2.13) e da Figura 6 vem:

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_2 s^2 + b'_1 s + G(0)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} - G(0) \right],$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_2 s^2 + b'_1 s + G(0) - G(0)(a'_2 s^2 + a'_1 s + 1)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_2 s^2 + b'_1 s - G(0)(a'_2 s^2 + a_1 s)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_1(s) = \left[\frac{b'_2 s + b'_1 - G(0)(a'_2 s + a_1)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} \right], \quad (2.14)$$

$$W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1. \quad (2.15)$$

Utilizando a Figura 6 e aplicando o TVF obtém-se

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_2(s) = W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1. \quad (2.16)$$

Da Figura 6 e da álgebra de diagrama de blocos segue

$$W_2(s) = Y_2(s) - \frac{y_2(\infty)}{s},$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} [W_1(s) - y_2(\infty)],$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} [W_1(s) - W_1(0)].$$

De (2.14) e (2.15) vem

$$W_2(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_2 s + b'_1 - G(0)(a'_2 s + a_1) - W_1(0)(a'_2 s^2 + a'_1 s + 1)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_2 s + b'_1 - G(0)(a'_2 s + a_1) - W_1(0)(a'_2 s^2 + a'_1 s) - b'_1 + G(0)a'_1}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} \right],$$

$$W_2(s) = \left[\frac{b'_2 - G(0)a'_2 - W_1(0)(a'_2 s + a'_1)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} \right], \quad (2.17)$$

$$W_2(0) = b'_2 - G(0)a'_2 - W_1(0)a'_1. \quad (2.18)$$

Aplicando o TVF e utilizando a Figura 6 tem-se

$$y_3(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_3(s) = W_2(0) = b'_2 - G(0)a'_2 - W_1(0)a'_1. \quad (2.19)$$

Novamente através da Figura 6 tem-se

$$W_3(s) = Y_3(s) - \frac{y_3(\infty)}{s},$$

$$W_3(s) = \frac{1}{s} [W_2(s) - W_2(0)].$$

De (2.17) e (2.18) segue

$$W_3(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{b'_2 - G(0)a'_2 - W_1(0)(a'_2s + a'_1) - W_2(0)(a'_2s^2 + a'_1s) - b'_2 + G(0)a'_2 + W_1(0)a'_1}{a'_2s^2 + a'_1s + 1} \right],$$

$$W_3(s) = \left[\frac{-W_1(0)a'_2 - W_2(0)(a'_2s + a'_1)}{a'_2s^2 + a'_1s + 1} \right], \quad (2.20)$$

$$W_3(0) = -W_1(0)a'_2 - W_2(0)a'_1. \quad (2.21)$$

Utilizando a Figura 6 e aplicando o TVF, obtém-se:

$$y_4(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_4(s) = W_3(0) = -W_1(0)a'_2 - W_2(0)a'_1.$$

Analogamente, da Figura 6 vem

$$W_4(s) = Y_4(s) - \frac{y_4(\infty)}{s}.$$

$$W_4(s) = \frac{1}{s} [W_3(s) - W_3(0)].$$

De (2.20) e (2.21) segue

$$W_4(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{-W_1(0)a'_2 - W_2(0)(a'_2s + a'_1) - W_3(0)(a'_2s^2 + a'_1s) + W_1(0)a'_2 + W_2(0)a'_1}{a'_2s^2 + a'_1s + 1} \right].$$

$$W_4(s) = \left[\frac{-W_2(0)a'_2 - W_3(0)(a'_2s + a'_1)}{a'_2s^2 + a'_1s + 1} \right],$$

$$W_4(0) = -W_2(0)a'_2 - W_3(0)a'_1. \quad (2.22)$$

Levando em conta a Figura 6 e aplicando o TVF tem-se

$$y_5(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_5(s) = W_4(0) = -W_2(0)a'_2 - W_3(0)a'_1.$$

De (2.16), (2.18), (2.21) e (2.22), tem-se o sistema linear matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, sendo que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -G(0) & 0 \\ 0 & 1 & -W_1(0) & -G(0) \\ 0 & 0 & -W_2(0) & -W_1(0) \\ 0 & 0 & -W_3(0) & -W_2(0) \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} W_1(0) \\ W_2(0) \\ W_3(0) \\ W_4(0) \end{bmatrix}.$$

Note que o sistema matricial tem solução se $[W_2(0)]^2 \neq W_1(0)W_3(0)$, pois esta condição assegura que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e assim $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ é a solução do sistema.

2.3 Identificando Funções de Transferência Estáveis de Ordem n

$$\text{Considere (2.1) com } G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{K} + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \mathbf{K} + a_1 s + a_0}, n \geq m, \quad (2.23)$$

onde $G(s) = \frac{m(s)}{n(s)}$, com

$$m(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{K} + b_1 s + b_0, \quad n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \mathbf{K} + a_1 s + a_0$$

e as seguintes hipóteses para a aplicação do método:

R1: $G(s)$ é uma FT estável;

$$\text{R2: } U(s) = \frac{1}{s};$$

R3: $m(s)$ e $n(s)$ são coprimos entre si.

Note que a hipótese R3 exige que $m(s)$ e $n(s)$ não possuam raízes em comum, ou seja, se para $\lambda_i, \kappa_j \in \mathcal{C}$, $m(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, m$ e $n(\kappa_j) = 0, j = 1, \dots, n$, então $\lambda_i \neq \kappa_j$, para todo i e para todo j .

Considere adicionalmente o diagrama da Figura 7 (SILVA, 2007).

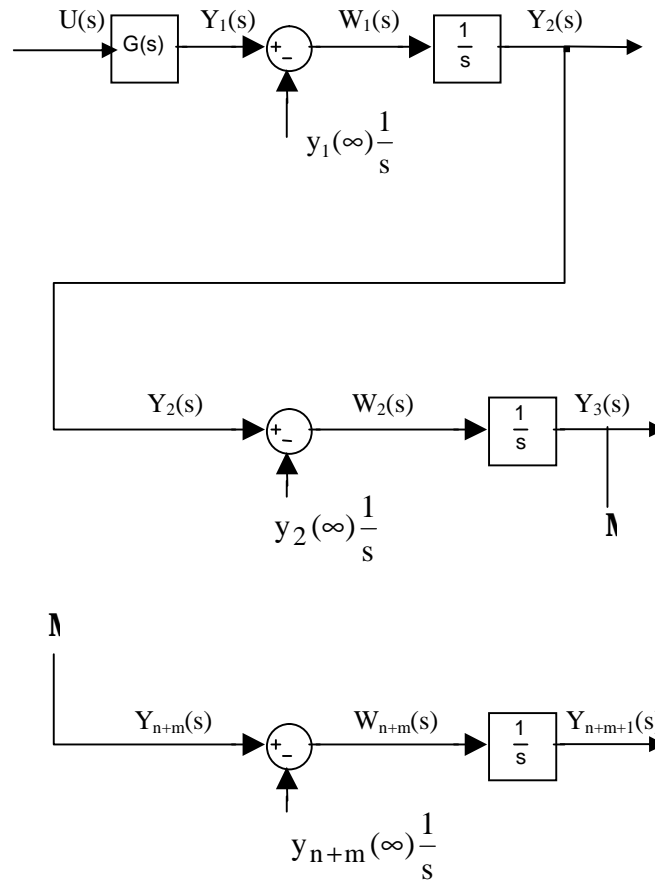


Figura 7 – Diagrama de blocos do método proposto por Kosaka para FT's estáveis.
b

Por R1 e utilizando o TVF tem-se:

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_1(s) = \frac{b_0}{a_0} = G(0). \quad (2.24)$$

Note que a condição R1 assegura que $a_0 \neq 0$.

Fazendo

$$\begin{cases} \frac{b_i}{a_0} = b'_i, i = 1, \mathbf{L}, m, \\ \frac{a_j}{a_0} = a'_j, j = 1, \mathbf{L}, n, \end{cases} \quad (2.25)$$

e utilizando (2.24) e (2.25), pode-se reescrever (2.23) na forma:

$$G(s) = \frac{(b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{L} + b'_1 s) + G(0)}{(a'_n s^n + \mathbf{L} + a'_1 s) + 1}. \quad (2.26)$$

Do diagrama da Figura 7 vem

$$W_1(s) = Y_1(s) - \frac{y_1(\infty)}{s},$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} [G(s) - G(0)]. \quad (2.27)$$

De (2.24) e (2.26) tem-se

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{(b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{L} + b'_1 s) + G(0)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} - G(0) \right],$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{(b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{L} + b'_1 s) + G(0) - G(0)(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) - G(0)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} \right],$$

$$W_1(s) = \left[\frac{(b'_m s^{m-1} + b'_{m-1} s^{m-2} + \mathbf{L} + b'_1) - G(0)(a'_n s^{n-1} + \mathbf{K} + a'_1)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} \right], \quad (2.28)$$

$$W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1. \quad (2.29)$$

Novamente utilizando a Figura 7 e o TVF, pois $G(s)$ foi suposta estável, obtém-se

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_2(s) = W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1. \quad (2.30)$$

Analogamente tem-se

$$W_2(s) = Y_2(s) - \frac{y_2(\infty)}{s},$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} [W_1(s) - y_2(\infty)],$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s} [W_1(s) - W_1(0)]. \quad (2.31)$$

De (2.27) e (2.28) segue

$$W_2(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{(b'_m s^{m-1} + b'_{m-1} s^{m-2} + \mathbf{L} + b'_1) - G(0)(a'_n s^{n-1} + \mathbf{K} + a'_1)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} - W_1(0) \right]$$

$$= \frac{1}{s} \left[\frac{(b'_m s^{m-1} + b'_{m-1} s^{m-2} + \mathbf{L} + b'_1) - G(0)(a'_n s^{n-1} + \mathbf{K} + a'_1) - W_1(0)(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) - b'_1 + G(0)a'_1}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} \right]$$

$$= \left[\frac{(b'_m s^{m-2} + b'_{m-1} s^{m-3} + \mathbf{L} + b'_2) - G(0)(a'_n s^{n-2} + \mathbf{K} + a'_2) - W_1(0)(a'_n s^{n-1} + \mathbf{K} + a'_1)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} \right]. \quad (2.32)$$

$$W_2(0) = b'_2 - G(0)a'_2 - W_1(0)a'_1. \quad (2.33)$$

Utilizando novamente o TVF e o diagrama de blocos tem-se

$$y_3(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_3(s) = W_2(0) = b'_2 - G(0)a'_2 - W_1(0)a'_1. \quad (2.34)$$

Generalizando (2.24), (2.30) e (2.34) através da Figura 7 e do TVF, para $1 \leq i \leq n + m + 1$, tem-se:

$$y_{i+1}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_{i+1}(s) = W_i(0),$$

sendo que [Apêndice A]:

Para $1 \leq i \leq m$:

$$W_i(0) = b'_i - G(0)a'_i - W_1(0)a'_{i-1} - \mathbf{L} - W_{i-1}(0)a'_1, \quad (2.35)$$

para $m < i \leq n$:

$$W_i(0) = -G(0)a'_i - W_1(0)a'_{i-1} - \mathbf{L} - W_{i-1}(0)a'_1, \quad (2.36)$$

para $n < i \leq n + m$:

$$W_i(0) = -W_{i-n}(0)a'_n - W_{i-(n-1)}(0)a'_{n-1} - \mathbf{L} - W_{i-1}(0)a'_1. \quad (2.37)$$

Fazendo-se $n + m = N$, $G(0) = W_0(0)$ e usando (2.35)-(2.37), tem-se o sistema matricial do tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}^{m \times m} & -W_0(0) & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ & -W_1(0) & -W_0(0) & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ & -W_2(0) & -W_1(0) & \mathbf{O} & 0 \\ & \mathbf{M} & -W_2(0) & \mathbf{O} & -W_0(0) \\ \mathbf{0}^{n \times m} & & \mathbf{M} & \mathbf{O} & -W_1(0) \\ & & & & -W_2(0) \\ & & & & \mathbf{M} \\ & -W_{N-1}(0) & -W_{N-2}(0) & \mathbf{L} & -W_m(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ \mathbf{M} \\ b'_m \\ \dots \\ a'_1 \\ \mathbf{M} \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(0) \\ W_2(0) \\ \mathbf{M} \\ W_N(0) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Note que para $i = 1, \dots, N$ e $j = m+1, \dots, N$, $a(i, j) \in \mathbf{A}$, tem-se

$$a(i, j) = \begin{cases} a(i+1, j+1), \\ -W_{i-j+m}(0), & \text{se } i-j+m \geq 0, \\ 0, & \text{se } i-j+m < 0. \end{cases}$$

Então os coeficientes da FT são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} B_i \\ A_i \end{bmatrix} = A^{-1} [W_i(0)], \quad (2.39)$$

onde $B_i \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$, $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$, $W_i(0) \in \mathfrak{R}^{N \times 1}$, sendo:

$$B_i = (b'_1, \dots, b'_m)^t,$$

$$A_i = (a'_1, \dots, a'_n)^t,$$

$$W_i(0) = (W_1(0), \dots, W_N(0))^t.$$

Particionando A tem-se

$$A = \begin{bmatrix} I^{m \times m} & | & A_2 \\ \mathbf{0}^{n \times m} & | & A_1 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -W_m(0) & \mathbf{K} & -G(0) & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ & & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ & \mathbf{O} & & & & 0 \\ \mathbf{M} & -W_m(0) & & \mathbf{L} & -G(0) & \\ & & & & & \mathbf{M} \\ & & & \mathbf{O} & & \\ -W_{N-1}(0) & \mathbf{L} & & & -W_m(0) & \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

com $A_1(i, j) = -W_m(0)$, para $i = j$, ou seja, A_1 tem a forma de uma matriz de Toeplitz e, invertendo a ordem das linhas de A_1 obtém-se a matriz de Hankel (BARNETT, 1996).

De (2.40), se o $\det(A_1) \neq 0$ então $\det(A) \neq 0$ (LIMA, 2001).

Para provar que a matriz A que aparece em (2.38) é uma matriz não singular, será provado que A_1 é não singular. Dessa forma, serão introduzidas a representação em espaço de estado e as definições de matriz de observabilidade e matriz de controlabilidade que serão utilizadas para provar que A_1 é inversível.

Inicialmente suponha, sem perda de generalidade, $m = n$ em (2.41), obtendo (2.41a).

$$A_1 = \begin{bmatrix} -W_m(0) & -W_{m-1}(0) & \mathbf{L} & -W_1(0) \\ & & & -W_2(0) \\ & \mathbf{O} & & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & -W_m(0) & & \\ & & & \mathbf{M} \\ & & \mathbf{O} & \\ -W_{N-1}(0) & -W_{N-2}(0) & \mathbf{L} & -W_m(0) \end{bmatrix} \quad (2.41a)$$

Uma FT é a relação da entrada $U(s)$ com a saída $Y_1(s)$, ou seja

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}, \quad (2.42)$$

cuja representação em espaço de estado é dada a seguir.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t), \end{cases} \quad (2.43)$$

onde

$\mathbf{x}(t)$ é um vetor de estado (n -dimensional);

$\mathbf{y}(t)$ é um vetor de saída (m -dimensional);

$u(t)$ é o sinal de controle;

\mathbf{P} é uma matriz $n \times n$;

\mathbf{B} é uma matriz $n \times 1$;

\mathbf{C} é uma matriz $m \times n$.

Um sistema é dito observável se todo vetor de estado $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação da saída $\mathbf{y}(t)$ durante um intervalo de tempo finito.

Uma condição necessária e suficiente para que o sistema seja completamente observável é que a matriz $m \times m$

$$[\mathbf{C} \ \mathbf{M}\mathbf{P}\mathbf{C} \ \dots \ \mathbf{M}\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{C}]^t \quad (2.43a)$$

possua posto n .

Um sistema é dito controlável em um tempo t_0 se for possível projetar um controle de sinal que irá transferir um estado inicial para um estado final qualquer em um intervalo de tempo finito.

O sistema dado pelas equações (2.43) é controlável se e somente se os vetores \mathbf{B} , \mathbf{PB} , \dots , $\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{B}$ são linearmente independentes, ou seja, quando a matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{PB} & \dots & \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.43b)$$

tem posto n .

Aplicando a transformada de Laplace em (2.43) e considerando $x(0) = 0$, vem

$$\begin{cases} s\mathbf{I}\mathbf{X}(s) = \mathbf{P}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s), \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (2.45)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s). \quad (2.46)$$

De (2.42), (2.45) e (2.46), segue que

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (2.47)$$

Agora, observe que, pela série de Taylor

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{P}) = (-\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-2}s - \mathbf{P}^{-3}s^2 - \dots)(s\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I},$$

e assim, de (2.47),

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(-\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-2}s - \mathbf{P}^{-3}s^2 - \dots)\mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{G}(s) = (-\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}) - \mathbf{C}\mathbf{P}^{-2}\mathbf{B}s - \mathbf{C}\mathbf{P}^{-3}\mathbf{B}s^2 - \dots \quad (2.49)$$

$$\mathbf{G}(0) = (-\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}). \quad (2.50)$$

De (2.27), tem-se

$$\mathbf{W}_1(s) = \frac{1}{s} [-\mathbf{G}(0) + \mathbf{G}(s)].$$

De (2.49)-(2.50)

$$\mathbf{W}_1(s) = \frac{1}{s} [-(-\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}) + (-\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}) - \mathbf{C}\mathbf{P}^{-2}\mathbf{B}s - \mathbf{C}\mathbf{P}^{-3}\mathbf{B}s^2 - \dots],$$

$$W_1(s) = -CP^{-2}B - CP^{-3}Bs - CP^{-4}Bs^2 - \dots, \quad (2.51)$$

$$W_1(0) = -CP^{-2}B. \quad (2.52)$$

De (2.31), vem

$$W_2(s) = \frac{1}{s}[-W_1(0) + W_1(s)].$$

De (2.51)-(2.52), tem-se

$$W_2(s) = \frac{1}{s}[(CP^{-2}B) + (-CP^{-2}B) - CP^{-3}Bs - CP^{-4}Bs^2 - \dots]$$

$$W_2(s) = -CP^{-3}B - CP^{-4}Bs - CP^{-5}Bs^2 - \dots \quad (2.53)$$

$$W_2(0) = -CP^{-3}B. \quad (2.53a)$$

Generalizando (2.52) e (2.53a), tem-se

$$W_k(0) = -CP^{-(k+1)}B, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad N = n+m \quad (2.54)$$

De (2.41a) e (2.54), tem-se

$$A_I = \begin{bmatrix} CP^{-(n+1)}B & CP^{-n}B & \mathbf{K} & CP^{-2}B \\ CP^{-(n+2)}B & \mathbf{O} & & CP^{-3}B \\ \mathbf{M} & CP^{-(n+1)}B & & \mathbf{M} \\ & & \mathbf{O} & \\ CP^{-2n}B & CP^{-(2n-1)}B & \mathbf{L} & CP^{-(n+1)}B \end{bmatrix}. \quad (2.55a)$$

Note que $A_I(i, j) = CP^{-(n+1+i-j)}B$.

Invertendo a ordem das linhas em (2.55a) ou seja $A_I(i, j) = A_I(n - i + 1, j)$, $i=1, \dots, n$, tem-se

$$A_1 = \begin{bmatrix} CP^{-2n}B & CP^{-(2n-1)}B & \mathbf{K} & CP^{-(n+1)}B \\ & & \mathbf{N} & \\ \mathbf{M} & CP^{-(n+1)}B & \mathbf{M} & \\ & \mathbf{N} & & \\ CP^{-(n+1)}B & CP^{-n}B & \mathbf{L} & CP^{-2}B \end{bmatrix}. \quad (2.55b)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} C \\ CP \\ CP^2 \\ \mathbf{M} \\ CP^{n-1} \end{bmatrix} P^{-2n} \begin{bmatrix} B & PB & P^2B & \mathbf{L} & P^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (2.56a)$$

Por R3, (2.56a) é controlável e observável. Logo (2.41) é não singular. (CHEN, 1999).

Analogamente, supondo $m = n-1$, de (2.41a), vem

$$A_1 = \begin{bmatrix} -W_m(0) & -W_{m-1}(0) & \mathbf{L} & -G(0) \\ & & & -W_1(0) \\ & \mathbf{O} & & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & -W_m(0) & & \\ & & & \mathbf{M} \\ & & \mathbf{O} & \\ -W_{N-1}(0) & -W_{N-2}(0) & \mathbf{L} & -W_m(0) \end{bmatrix}.$$

Por (2.50) e (2.54) tem-se

$$A_I = \begin{bmatrix} CP^{-n}B & CP^{-(n-1)}B & \mathbf{K} & CP^{-1}B \\ CP^{-(n+1)}B & \mathbf{O} & & CP^{-2}B \\ \mathbf{M} & CP^{-n}B & & \mathbf{M} \\ & & \mathbf{O} & \\ CP^{-(2n-1)}B & CP^{-2n}B & \mathbf{L} & CP^{-n}B \end{bmatrix},$$

e invertendo-se a ordem das linhas como em (2.55b)

$$A_I = \begin{bmatrix} CP^{-(2n-1)}B & CP^{-2n}B & \mathbf{K} & CP^{-n}B \\ & & & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & CP^{-n}B & & \mathbf{M} \\ & \mathbf{N} & & \\ CP^{-n}B & CP^{-(n-1)}B & \mathbf{L} & CP^{-1}B \end{bmatrix},$$

$$A_I = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CP} \\ \mathbf{CP}^2 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{CP}^{n-1} \end{bmatrix} P^{-(2n-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{PB} & \mathbf{P}^2\mathbf{B} & \mathbf{L} & \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (2.56b)$$

Novamente, por R3, (2.56b) é controlável e observável. Logo (2.41) é não singular. (CHEN, 1999).

$$\text{Por exemplo, considere } G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{s+1}{(s+1)^3}$$

a FT a ser identificada.

Note que, neste caso, $m(s) = s+1$ e $n(s) = (s+1)^3$ possuem o fator $(s+1)$ em comum.

De (2.24), (2.35)-(2.37), obtém-se $G(0)$, $W_1(0)$, $W_2(0)$, $W_3(0)$ e $W_4(0)$, como sendo, respectivamente, 1, -2, 3, -4 e 5.

Utilizando (2.38), obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}.$$

ou seja, o sistema não possui solução única. Note que $\det(A) = 0$ e isto ocorreu devido ao fato de $m(s)$ e $n(s)$ não satisfazerem R3, pois não são polinômios coprimos entre si.

Portanto, não é possível identificar uma FT para um sistema cuja planta possui pelo menos um fator em comum no numerador e no denominador. Ainda considerando a mesma função de transferência e fazendo o cancelamento do fator comum, têm-se os resultados na Tabela 1, onde 2 é a ordem da FT da planta e o respectivo sistema matricial onde se verifica que o $\det(A) \neq 0$.

Tabela 1- Sistema de equações de modelo com pólos e zeros cancelados.

Numerador	Denominador	pólos	sistema matricial
			$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
1	$s^2 + 2s + 1$	$P_1 = -1$ $P_2 = -1$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2.3.1 Redução da Ordem do Modelo e o Método Clássico de Padé (MCP)

Uma questão importante que surge quanto ao método estudado é quantas iterações serão necessárias, ou seja, da Figura 7, qual o valor de n e m tal que o procedimento adotado seja preciso em relação à ordem, a princípio desconhecida, de um sistema, ou ainda, que os parâmetros do modelo identificado tenham comportamento dinâmico semelhante aos do modelo da planta.

Suponha que se queira um modelo reduzido de $G(s)$ em (2.23) da forma

$$R(s) = \frac{b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{K} + b'_1 s + b'_0}{a'_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \mathbf{K} + a'_1 s + a'_0}, m \leq n.$$

É fácil ver que $R(s)$ tem $m+n+2$ coeficientes desconhecidos. De forma a determinar de modo único, tais incógnitas deve-se impor $m+n+2$ restrições. No MCP, $m+n+1$ restrições são tomadas. A restrição que falta é ou $b_0=1$ ou $b_m=1$. Para determinar $R(s)$, o seguinte conjunto de restrições deve ser resolvido a fim de determinar os coeficientes $a'_j, j=1, \mathbf{L}, n$ e $b'_i, i=1, \mathbf{L}, m$. (AGUIRRE, 2000):

$$\begin{aligned} 1 &= b'_m, \\ c_0 &= \frac{b'_0}{a'_0}, \\ c_k &= \frac{b'_k - \sum_{j=1}^k a'_j c_{k-j}}{a_0}, k=1, 2, \mathbf{L}, m+n, \end{aligned} \quad (2.57a)$$

onde c_k , são conhecidos como coeficientes de Padé e são obtidos de $G(s)$ como em (2.57b).

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{b_0}{a_0}, \\ c_k &= \frac{b_k - \sum_{j=1}^k a_j c_{k-j}}{a_0}, k=1, 2, \mathbf{L}, m+n, \end{aligned} \quad (2.57b)$$

$b_k = 0$ para $k > m$, e $a_j = 0$ para $j > n$.

Observe que das equações (2.57b), $c_k, k=1, 2, \dots, m+n$, são obtidos através da função de transferência da planta e de (2.57a) esses mesmos coeficientes são utilizados na obtenção dos coeficientes do modelo de ordem reduzida $R(s)$. Note também que as equações (2.35)-(2.37) tem a forma (2.57b).

Dessa forma, a escolha da ordem do modelo identificado, ou seja, de n e m no método de identificação proposto por Kosaka (2005) é idêntico ao proposto por Padé e citado por Aguirre (2000).

Neste caso, o método proposto por Kosaka (2005) trabalha sem o conhecimento prévio da FT do sistema. Já o método de Padé envolve o conhecimento explícito da FT.

2.4 Exemplos

Exemplo 1: Com o conhecimento prévio da ordem do sistema.

Inicialmente considera-se $G(s)$ em (2.23) como

$$\frac{2s + 3}{4s^2 + 2s + 1}. \quad (\text{E 2.1})$$

Neste caso tem-se $n = 2$ e $m = 1$, onde n é a ordem e m o número de zeros da planta.

De (2.24) tem-se

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_1(s) = \frac{b_0}{a_0} = G(0) = 3. \quad (\text{E 2.2})$$

De (E 2.2) e por (2.35):

$$y_2(\infty) = W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1 = 2 - 3 * 2 = -4. \quad (\text{E 2.3})$$

De (E 2.3) e por (2.36):

$$y_3(\infty) = W_2(0) = -G(0)a'_2 - W_1(0)a'_1 = -3 * 4 + 4 * 2 = -4. \quad (\text{E 2.4})$$

De (E 2.4) e por (2.37):

$$y_4(\infty) = W_3(0) = -W_1(0)a'_2 - W_2(0)a'_1 = 4 * 4 + 4 * 2 = 24. \quad (\text{E 2.5})$$

Depois de obtidos os valores de $G(0)$, $W_1(0)$, $W_2(0)$ e $W_3(0)$ em (E 2.2)-(E 2.5), como sendo, respectivamente, 3, -4, -4 e 24 tem-se, de (2.38):

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Por (3.39):

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} W_1(0) \\ W_2(0) \\ W_3(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,42857 & 0,32143 \\ 0 & 0,14286 & 0,10714 \\ 0 & -0,14286 & 0,14286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 24 \end{bmatrix},$$

cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Neste caso a FT identificada do sistema é dada por

$$G(s) = \frac{b'_1 s + G(0)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} = \frac{2s + 3}{4s^2 + 2s + 1},$$

coincidindo com a FT da planta.

Exemplo 2: Considere $G(s)$ do exemplo 1 e, adicionalmente, que não há qualquer informação referente à ordem da FT a ser identificada.

Supondo que $G(s)$ não tem nenhum zero, ou seja, $G(s) \neq 0, \forall s \in \mathcal{C}$, tem-se $m = 0$. Adicionalmente, suponha que $n = 2$. Neste caso tem-se:

De (E 2.2):

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) = \frac{b_0}{a_0} = G(0) = 3.$$

De (2.36) e (E 2.3):

$$y_2(\infty) = W_1(0) = -G(0)a'_1 = -4.$$

De (2.37) e (E 2.4):

$$y_3(\infty) = W_2(0) = -G(0)a'_2 - W_1(0)a'_1 = -4.$$

Por (2.38):

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

De (2.39):

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3333 & 0 \\ -0,4444 & -0,3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3333 \\ 3,1111 \end{bmatrix}.$$

Utilizando (2.26), a FT do sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{G(0)}{a'_2 s^2 + a'_1 s + 1} = \frac{3}{3,1111 s^2 + 1,3333 s + 1}.$$

Supondo $n=1$ e $m=1$.

De (E 2.2):

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) = \frac{b_0}{a_0} = G(0) = 3.$$

De (2.35) e (E 2.3):

$$y_2(\infty) = W_1(0) = b'_1 - G(0)a'_1 = -4.$$

De (2.36) e (E 2.4):

$$y_3(\infty) = W_2(0) = -W_1(0)a'_1 = y_3(\infty) = -4.$$

Por (2.38):

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Por (2.39):

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix},$$

obtendo-se assim

$$G(s) = \frac{b'_1 s + G(0)}{a'_1 s + 1} = \frac{-7s + 3}{-s + 1}.$$

Observa-se que $G(s)$ com $n = m = 1$ é instável.

Portanto não é possível, através deste método de identificação, encontrar uma FT estável de ordem um com um zero.

2.5 Identificando Funções de Transferência Instáveis

Considerando $G(s) = L\{g(t)\}$ em (2.23), a transformada de Laplace de $e^{-at}g(t)$ será dada por (OGATA, 1998):

$$L\{e^{-at}g(t)\} = \int_0^{\infty} [g(t) e^{-at}] e^{-st} dt,$$

$$L\{e^{-at}g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t) e^{-(s+a)t} dt,$$

$$L\{e^{-at}g(t)\} = G(s+a), \tag{2.58}$$

$$L\{e^{-at}g(t)\} = G_n(s).$$

Utilizando o SLIT descrito por (2.1), ou seja

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

$$\text{com } U(s) = \frac{1}{s}.$$

de (2.58), tem-se

$$Y(s+a) = \frac{G(s+a)}{s+a} = L\{y(t) e^{-at}\}. \tag{2.59}$$

Tomando uma nova saída $Y_n(s)$, sendo que:

$$Y_n(s) = \frac{s+a}{s} L\{ y(t) e^{-at} \}, \quad (2.60)$$

com $a > 0$ suficientemente grande de modo que

$$\int_0^{\infty} y(t) e^{-at} dt < \infty, \quad (2.61)$$

tem-se

$$Y_n(s) = \frac{s+a}{s} \frac{G(s+a)}{s+a} = \frac{G(s+a)}{s}. \quad (2.62)$$

Aplicando o TVF em (2.62)

$$y_n(\infty) = G(a) = G_n(0). \quad (2.63)$$

Note que a condição (2.61) exige que a saída $y_n(t)$ seja limitada. Uma vez que a entrada degrau unitário é limitada e tem-se uma saída limitada, pelo corolário do Teorema da Bibo estabilidade a função de transferência $G(s+a)$ possui todos os pólos com parte real negativa, ou seja, $G(s+a)$ é estável (CHEN, 1999). Logo, basta aplicar o método estudado para FT's estáveis.

A Figura 8 mostra o diagrama de blocos do método proposto para FT's instáveis.

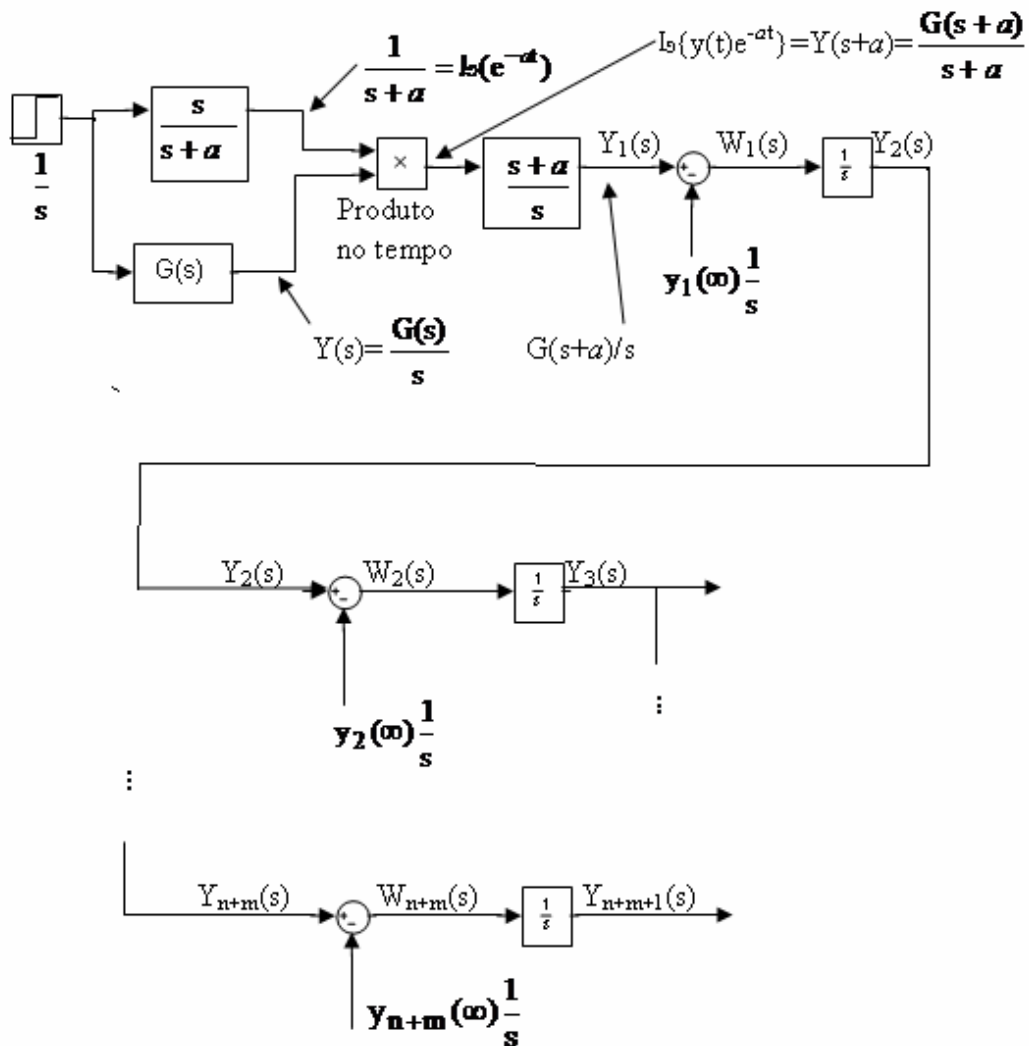


Figura 8 – Diagrama de blocos do método proposto para FT's instáveis.

Observe que $Y_1(s)$ é dada por (2.62).

Exemplo 3: Considere

$$G(s) = \frac{3s+5}{2s^2+3s} = \frac{0,6s+1}{0,4s^2+0,6s} \quad (\text{E 2.6})$$

uma FT a ser identificada.

Note que $G(s)$ possui um pólo na origem.

Por (2.60) e $a = 1$, de (E 2.6), vem

$$G(s+1) = \frac{3s+8}{2s^2+7s+5} = \frac{0,6s+1,6}{0,4s^2+1,4s+1}, \quad (\text{E 2.7})$$

sendo ela uma FT com pólos estáveis.

De (E 2.7), (2.24) e (2.35)-(2.37) obtém-se:

$$G(1) = 8/5; W_1(0) = -41/25; W_2(0) = 207/125 \text{ e } W_3(0) = -1039/625.$$

Por (2.38):

$$\begin{bmatrix} 1 & -8/5 & 0 \\ 0 & 41/25 & -8/5 \\ 0 & -207/125 & 41/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41/25 \\ 207/125 \\ -1039/625 \end{bmatrix}.$$

De (2.39):

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 328/5 & 64 \\ 0 & 41 & 40 \\ 0 & 207/5 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -41/25 \\ 207/125 \\ -1039/625 \end{bmatrix},$$

cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 7/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}.$$

$$G(s+a) = \frac{0,6s+1,6}{0,4s^2+1,4s+1}.$$

$$G(s) = \frac{0,6s+1}{0,4s^2+0,6s},$$

coincidindo com (E 2.6).

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA, RESULTADOS E CONCLUSÕES

3.1 Metodologia

Nesse capítulo apresenta-se, na Seção 3.1, a metodologia empregada partindo do embasamento teórico inicial. Na Seção 3.2.1, apresenta-se a coleta de dados para validação do método proposto por Kosaka (2005), passando pelos problemas enfrentados durante a pesquisa e suas respectivas soluções e resultados obtidos. Na Seção 3.2.2, é verificada a validação do método proposto por Kosaka (2005) e agora generalizado para funções de transferência instáveis. Na Seção 3.2.3, é realizada uma comparação entre o método proposto por Kosaka (2005) e o procedimento adotado para a aplicação do método em FT's instáveis, ambos aplicados em funções de transferência estáveis. Na Seção 3.2.4, será verificado o desempenho dos métodos levando em consideração a presença de ruído branco na saída da planta. Finalmente têm-se as conclusões na Seção 3.2.5, baseadas nos resultados obtidos. Na Seção 3.3, encontra-se a conclusão geral desta pesquisa.

3.1.1 Planejamento da Ação

A ação inicial consistiu basicamente de uma busca na literatura que elucidasse, especialmente:

1. Seleção dos vários tipos de sinais de teste disponíveis e suas principais características.
2. Propriedades da Transformada de Laplace que, de alguma forma, contribuam com o desenvolvimento de um método de identificação.
3. Embasamento teórico.
4. Pesquisa na literatura científica mundial sobre o tema proposto.

3.1.2 Sinais de Teste para Entrada

A princípio, foi escolhida a entrada degrau unitário, uma vez que a mesma podia ser obtida facilmente e possui características relevantes para a identificação de sistemas, como a atenuação do ruído a partir do momento em que o degrau é aplicado (KOSAKA, 2005).

Na primeira etapa da pesquisa, sistemas de primeira ordem e de sistemas com ordem dois, considerando-se a aplicação da entrada rampa após a aplicação da entrada degrau.

3.1.3 Propriedades da Transformada de Laplace e o Teorema do Valor Final

Após a escolha do tipo de entrada que deve ser aplicada (entrada degrau), o TVF que relaciona o comportamento de $sG(s)$ nas vizinhanças de $s = 0$ ao comportamento estacionário de $g(t)$, onde $G(s) = L\{g(t)\}$, é uma FT estável, estudou-se a generalização do método para FT's de ordem n . Entretanto, não seria possível aplicar o método para uma FT instável.

Para solucionar o problema da instabilidade, recorre-se a uma função exponencial estável que, multiplicada pela função temporal cuja saída é ilimitada, resulta num sistema novo estável. Assim, tem-se $L\{e^{-at}y(t)\} = Y(s+a)$, onde $Y(s)$ é instável e a é uma constante tal que $Y(s+a)$ é limitada.

3.1.4 Validação do Modelo

Sob o embasamento teórico, as FT's estudadas são generalizadas em relação à sua ordem. Estudou-se, dessa forma, um método recursivo capaz de identificar FT's de qualquer ordem e que são, inclusive, instáveis.

Restava ainda, segundo Landau (1990), o quarto estágio de uma identificação completa: a validação do modelo.

O método determinístico proposto por Kosaka (2005) e a generalização do método proposta para funções de transferência instáveis deveriam, *a priori*, identificar a FT da planta com exatidão, como visto no capítulo anterior. Entretanto, nos dados coletados em qualquer experimento real haverá ruído (AGUIRRE, 2000). Dessa forma, com o uso do *software* Matlab 7 release 14 (MATSUMOTO, 2003) são realizados uma série de testes, ou coleta de dados, através do ambiente Simulink (MATSUMOTO, 2002) com a utilização do diagrama de blocos cujo objetivo é verificar a validade do modelo identificado.

3.2 Resultados

3.2.1 Parâmetros Encontrados para Sistemas Estáveis

Para todas as simulações o *solver equation* é configurado como na Figura 9, sendo que:

Type: refere-se ao tipo de intervalo para integração - variável ou fixo. O fixo considera um tempo de integração constante, e.g., $T = 0,001$ segundos. Nas simulações adota-se variável.

Solver: Método empregado para resolver uma EDO (Equação Diferencial Ordinária). É empregado o ODE 45.

Para a resposta ao degrau há uma variação no intervalo em que os gráficos foram plotados apenas para tentar evidenciar algumas diferenças entre as curvas, quando isso foi possível, pois várias curvas são praticamente idênticas, sendo que a prioridade foi dada ao

tempo de estabelecimento no caso do método proposto por Kosaka (2005), e quando $G_e(s+a)/(s+a) < 10^{-4}$, no caso do método generalizado para FT's instáveis.

Considere $G_p(s)$ a FT da planta a ser identificada e $G_e(s)$ a FT estimada (identificada). (m, n) refere-se à ordem “n” de uma função de transferência com “m” zeros.

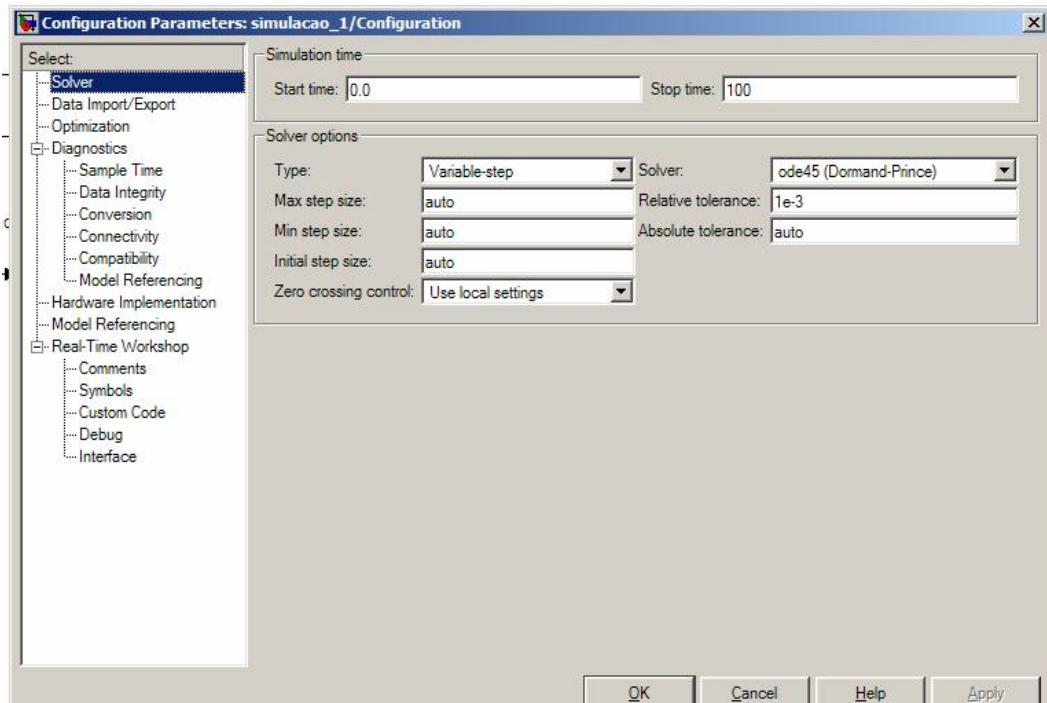


Figura 9- Configuração do *solver equation*.

Nesta seção o objetivo é verificar a validade do método proposto por Kosaka (2005) para funções de transferência estáveis. Na simulação 1 é previamente utilizada a informação referente à ordem da planta. Na simulação 2 supõe-se não estar disponível tal informação. Ainda na simulação 2 será tratada a questão de redução do modelo da planta e é realizada uma comparação entre o modelo reduzido utilizando o método proposto por Kosaka e o modelo reduzido com retenção de pólo.

Simulação 1 Seja

$$G_p(s) = \frac{3s + 1}{2s^2 + 2s + 1},$$

uma função de transferência estável a ser identificada.

Através do diagrama de blocos da Figura 10, obtém-se $G(0)$, $W_1(0)$, $W_2(0)$ e $W_3(0)$, respectivamente, 1, 1, -4 e 6. observando-se que o tempo de simulação foi de 100 segundos.

De (2.38), vem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

De (2.39):

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & -4/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$[b'_1 \quad a'_1 \quad a'_2]^t = [3 \quad 2 \quad 2]^t.$$

De (2.13), tem-se

$$G_c(s) = \frac{3s+1}{2s^2+2s+1},$$

coincidindo com a FT da planta $G_p(s)$.

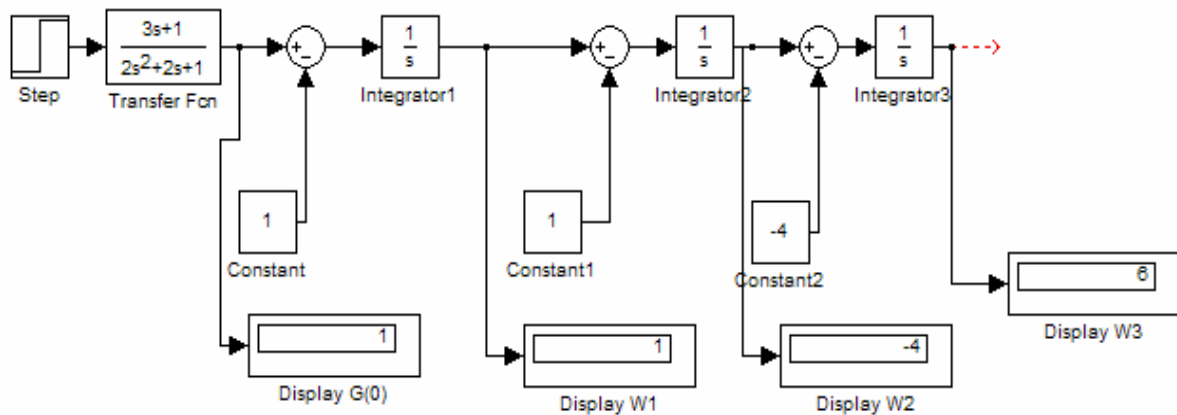


Figura 10- Diagrama de blocos utilizado na simulação 1.

Simulação 2: Seja

$$G_p(s) = \frac{2,25s + 0,6000}{0,05s^3 + 0,5s^2 + 1,45s + 1},$$

a FT a ser identificada. Supondo não disponível a informação referente à ordem da FT, será utilizado ordem 3 e 4, respectivamente, para o numerador e o denominador e também o diagrama da Figura 11 para obtenção de $G(0)$, $W_1(0)$ - $W_7(0)$, observando que o valor no bloco *constant 3* é 0,6001. O tempo de simulação foi de 10 segundos. Os resultados encontram-se nas Tabelas 2 e 3.

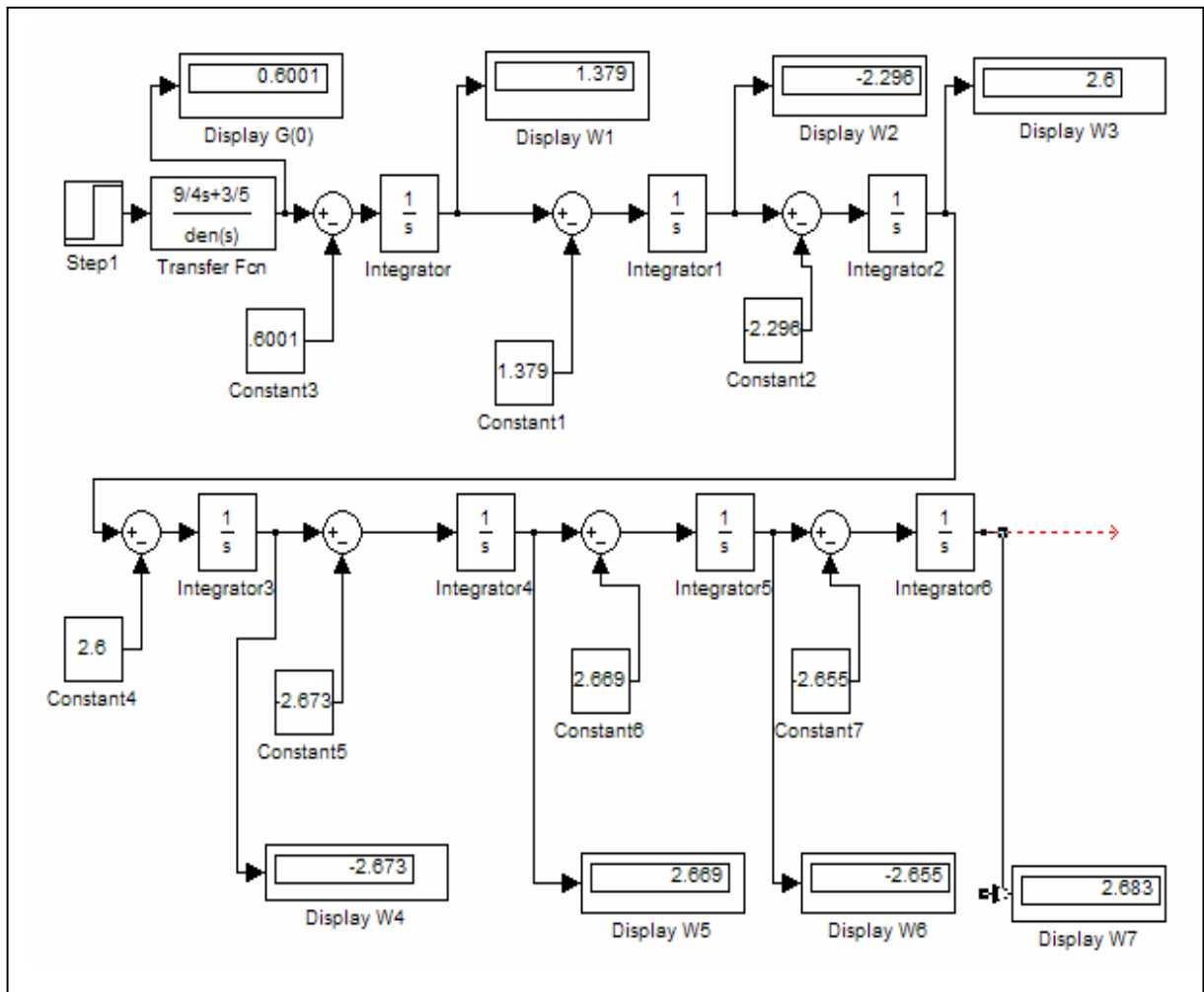


Figura 11- Diagrama de blocos utilizado na simulação 2.

Tabela 2 - Resultados da identificação sem conhecimento prévio da ordem da planta.

(m,n)	Numerador	Denominador
(3,4)	$-0,3206s^3 + 5,694s^2 + 3,791s + 0,6001$	$0,04863s^4 + 1,133s^3 + 4,08s^2 + 4,019s + 1$
(2,4)	$82,94s^2 + 19,9s - 0,6001$	$1,75s^4 + 18,49s^3 + 52,89s^2 + 35,47s - 1$
(1,4)	$2,247s + 0,6001$	$0,0001713s^4 + 0,04736s^3 + 0,5022s^2 + 1,446s + 1$
(0,4)	$0,6001$	$127,5s^4 - 34,05s^3 + 9,107s^2 - 2,298s + 1$
(3,3)	$-0,312s^3 + 3,297s^2 + 3,15s + 0,6001$	$0,6025s^3 + 2,539s^2 + 2,951s + 1$
(2,3)	$-0,00812s^2 + 2,245s + 0,6001$	$0,04554s^3 + 0,497s^2 + 1,443s + 1$
(1,3)	$2,247s + 0,6001$	$0,0474s^3 + 0,5022s^2 + 1,446s + 1$
$G_p(s+a)$	$2,25s + 0,6$	$0,05s^3 + 0,5s^2 + 1,5s + 1$
(0,3)	$0,6001$	$34,05s^3 - 9,107s^2 + 2,298s - 1$
(2,2)	$-0,2069s^2 + 2,192s + 0,6001$	$0,3693s^2 + 1,354s + 1$
(1,2)	$2,244s + 0,6001$	$0,5142s^2 + 1,441s + 1$
(0,2)	$0,6001$	$9,107s^2 - 2,298s + 1$
(1,1)	$2,378s + 0,6001$	$1,665s + 1$
(0,1)	$0,6001$	$2,298s - 1$

Tabela 3 – Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s)$ conforme a Tabela 2.

(m,n)	Zeros	Pólos
(3,4)	$Z_1= 18,4067$; $Z_2= -0,3807$ $Z_3= - 0,2671$	$P_1= -19,1426$; $P_2= -2,7551$ $P_3= -1,0244$; $P_4= -0,3806$
(2,4)	$Z_1= -0,2671$; $Z_2= 0,0271$	$P_1= -6,2579$; $P_2= -3,3232$ $P_3= -1,0145$; $P_4= 0,0271$
(1,4)	$Z_1= -0,2671$	$P_1= -265,5195$; $P_2= -6,6491$ $P_3= -3,2579$; $P_4= -1,0149$
(0,4)	não possui zero	$P_{1,2}= 0,243 \pm 0,1949j$ $P_{3,4}= -0,1095 \pm 0,2623j$
(3,3)	$Z_1= 11,464$; $Z_2= -0,6283$ $Z_3= -0,2671$	$P_1= -2,5477$; $P_2= -1,0405$ $P_3= -0,6261$
(2,3)	$Z_1= 276,7084$; $Z_2= -0,2671$	$P_1= -6,6395$; $P_2= -3,2586$ $P_3= -1,0149$
(1,3)	$Z_1= -0,2671$	$P_1= -6,2563$; $P_2= -3,3238$ $P_3= -1,0145$
$G_p(s+a)$	$Z_1=-0,2666$	$P_1= -5$; $P_2= -4$ $P_3= -1$
(0,3)	não possui zero	$P_{1,2}= -0,0319 \pm 0,296j$ $P_3= 0,3313$
(2,2)	$Z_1=10,8617$; $Z_2= -0,2671$	$P_1= -2,6417$; $P_2= -1,0249$
(1,2)	$Z_1= -0,2674$	$P_1= -1,5405$; $P_2= -1,2625$
(0,2)	não possui zero	$P_{1,2}= 0,1262 \pm 0,364j$
(1,1)	$Z_1= -0,2523$	$P_1= -0,6006$
(0,1)	não possui zero	$P_1=0,4352$

Note que os modelos reduzidos identificados de ordem 1, 2, 3 e 4, que não possuem zeros são instáveis. Ou seja, através do método proposto por Kosaka (2005), não é possível identificar modelos reduzidos de FT's com essas ordens e que tenham uma resposta ao degrau parecida com a resposta ao degrau da planta real. Para as funções de transferência identificadas e estáveis ver Figuras 12-14 para resposta ao degrau. Para ordem 4 com 2 zeros ocorreu o cancelamento de um pólo com um zero.

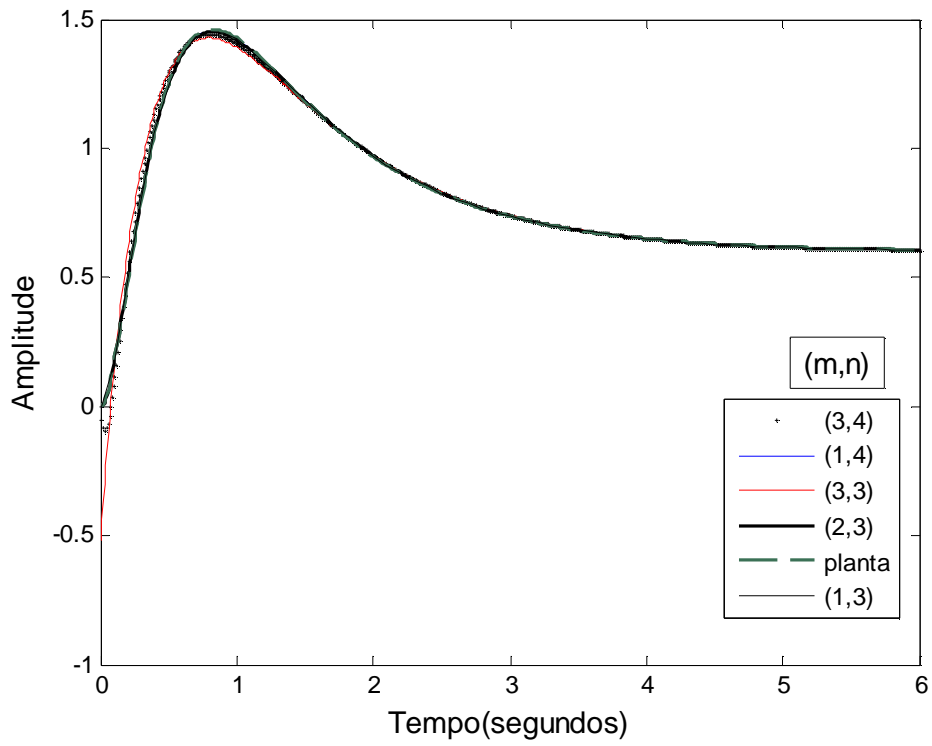


Figura 12- Resposta ao degrau das FT's identificadas estáveis e de ordem superior ou igual à ordem da FT da planta.

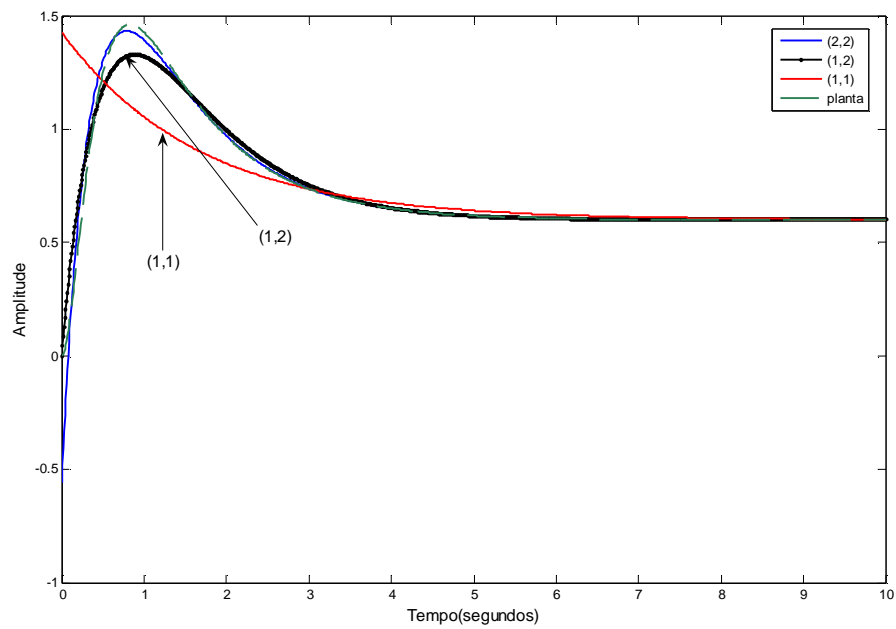


Figura 13- Resposta ao degrau das FT's identificadas estáveis com ordem inferior à ordem da FT da planta.

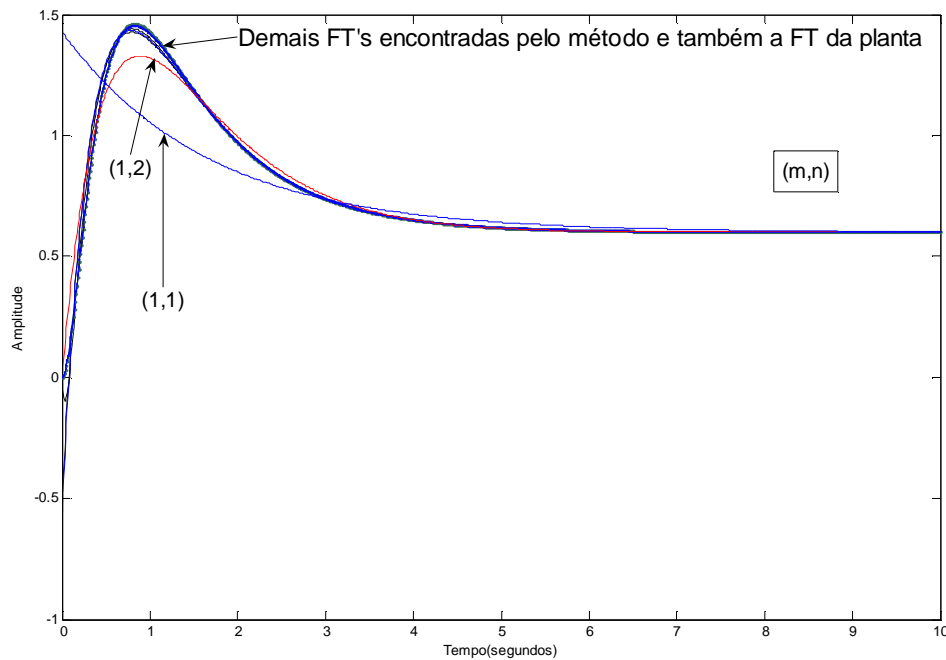


Figura 14- Resposta ao degrau das FT's identificadas estáveis.

Note que as FT's identificadas com ordem superior ou igual a dois praticamente apresentam a mesma resposta ao degrau, como mostra a Figura 12, sendo estas respostas praticamente idênticas à resposta ao degrau da planta.

Para a comparação entre os modelos reduzidos de ordem $(m, n) = (1, 2)$, utilizando-se a retenção de pólos (que mantém os pólos mais lentos, ou seja, os pólos mais próximos à origem do plano complexo) e o método proposto por Kosaka (2005), ver Tabela 4 e Figura 15.

Tabela 4- Modelo reduzido de ordem dois com um zero.

	Numerador	Denominador	Pólos	Zero
planta	$2,25s + 0,6$	$0,05s^3 + 0,5s^2 + 1,45s + 1$	$P_1 = -5$ $P_2 = -4$ $P_3 = -1$	$Z = -0,266$
método proposto	$2,247s + 0,6001$	$0,5142s^2 + 1,441s + 1$	$P_1 = -1,5405$ $P_2 = -1,2625$	$Z = -0,266$
retenção de pólo	$11,25s + 3$	$0,25s^2 + 1,25s + 1$	$P_1 = -4$ $P_2 = -1$	$Z = -0,266$

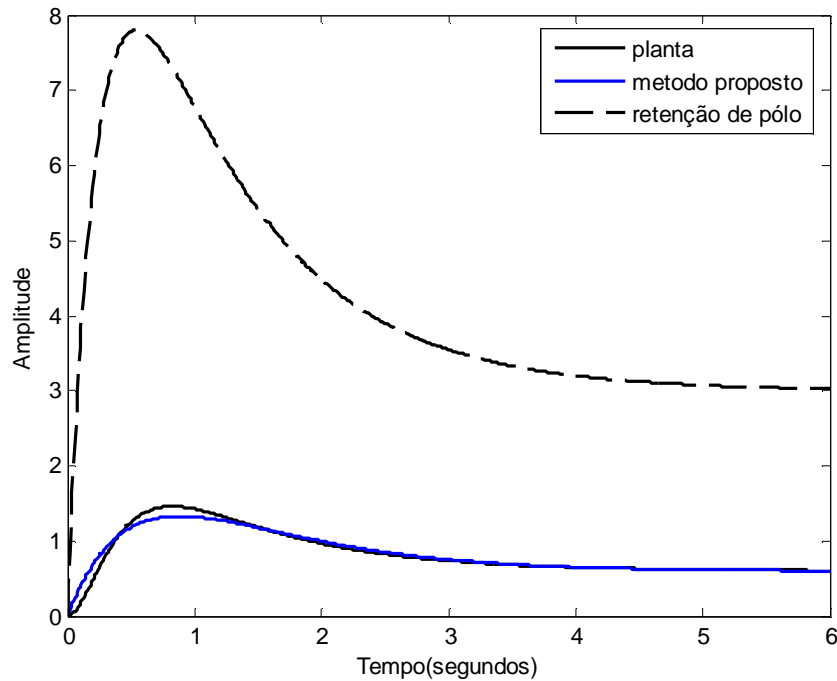


Figura 15- Comparação da resposta ao degrau entre modelo reduzido com ordem 2 e um zero identificado pelo método proposto por Kosaka (2005) e o modelo reduzido com retenção do pólo mais lento.

Note que a FT identificada pelo método proposto por Kosaka (2005) apresenta uma resposta ao degrau semelhante (próxima) à resposta ao degrau da FT da planta quando comparada com a resposta apresentada pelo método de retenção do pólo mais lento.

3.2.2 Parâmetros Encontrados para Sistemas Instáveis

Nesta seção o objetivo é verificar a validade do procedimento proposto para FT's instáveis. Na simulação 3 é previamente utilizada a informação referente à ordem da FT instável da planta ($G_p(s)$) a partir da qual é identificada uma nova FT estável $G_e(s+a)$ da qual deriva um conjunto de modelos de ordem reduzida, sendo que, a partir desses modelos reduzidos determina-se os modelos reduzidos da planta instável. Na simulação 4, além de utilizar a informação referente à ordem da planta, são realizados vários testes para diferentes valores da constante "a". A simulação 5 é realizada a partir de um experimento real – e sujeito a ruídos externos – com uma FT instável.

Simulação 3: Seja $G_p(s) = \frac{3s + 5}{2s^2 + 3s}$,

como em (E 2.1) uma FT instável a ser identificada.

$$\text{Observe que } G_p(s+1) = \frac{0,6s + 1,6}{0,4s^2 + 1,4s + 1}.$$

A Figura 16 mostra como obter os valores $G(1)$, $W_1(0)$, $W_2(0)$ e $W_3(0)$, observando-se que o tempo de simulação é de 10 segundos e $a = 1$.

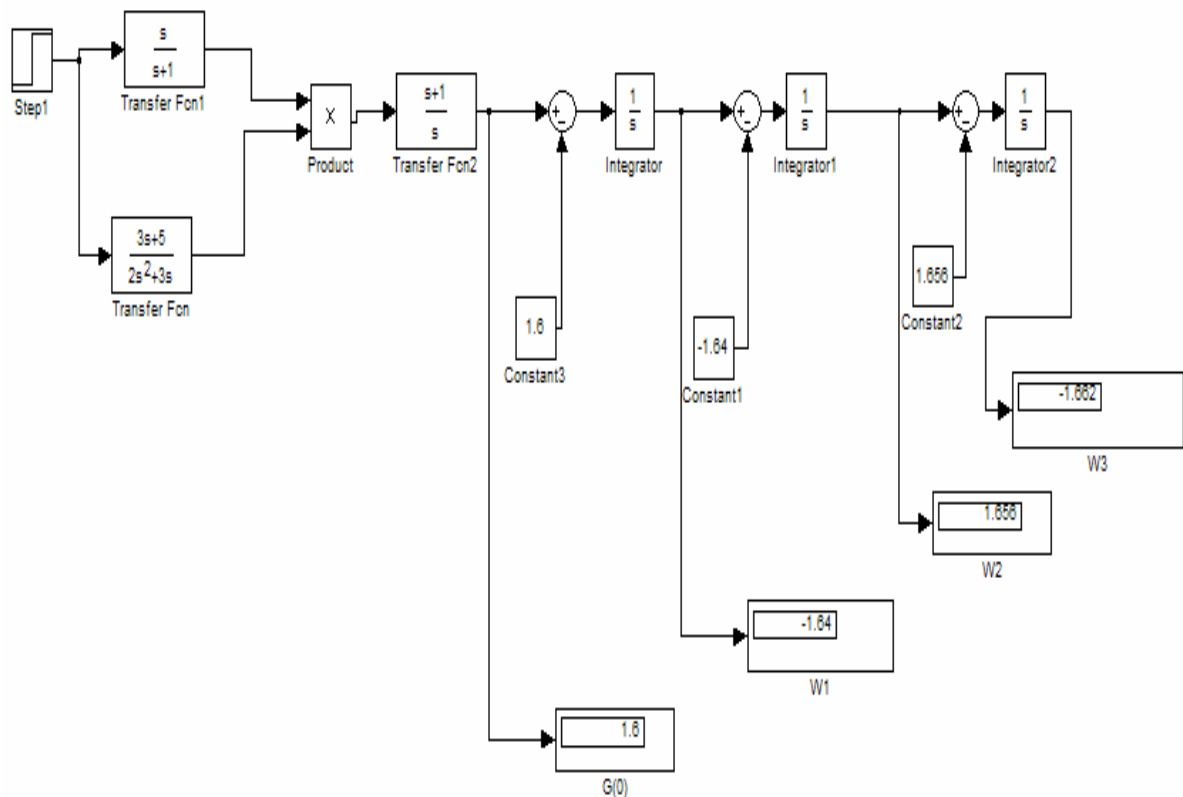


Figura16- Diagrama de blocos do método proposto para FT instável da simulação 3.

Note que o valor da constante $a = 1$ encontra-se nos blocos *Transfer Fcn1* e *Transfer Fcn2*.

De (2.38), $G(1)$, $W_1(0)$ - $W_3(0)$ e Figura 16, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,6 & 0 \\ 0 & 1,64 & -1,6 \\ 0 & -1,656 & 1,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,64 \\ 1,656 \\ -1,662 \end{bmatrix}.$$

De (2.39)

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 65,6 & 64 \\ 0 & 41 & 40 \\ 0 & 41,4 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,64 \\ 1,656 \\ -1,662 \end{bmatrix},$$

cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6256 \\ 1,416 \\ 0,416 \end{bmatrix}.$$

$$G_e(s+1) = \frac{0,6256s + 1,6}{0,416s^2 + 1,416s + 1},$$

$$G_e(s) = \frac{0,6256s + 0,975}{0,4164s^2 + 0,5836s}.$$

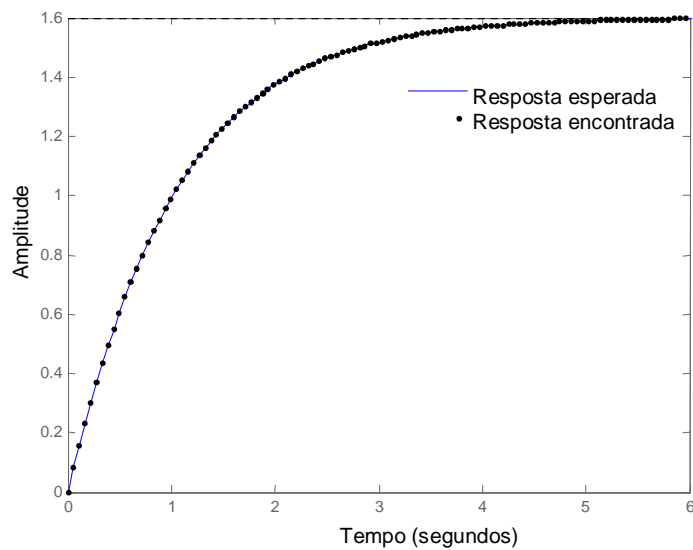


Figura 17- Resposta ao degrau da FT $G_p(s+1)$ esperada e da FT $G_e(s+1)$ identificada pelo método generalizado.

Tabela 5- Modelos reduzidos para $G_e(s+1)$ identificados pelo método na simulação 3.

(m,n)	Numerador	Denominador	Pólos	Zeros
$G_p(s+1)$ esperado	$0,6s + 1,6$	$0,4s^2 + 1,4s + 1$	$P_1 = -2,5$ $P_2 = -1$	$Z_1 = -2,667$
(1,2) $G_e(s+1)$	$0,6256s + 1,6$	$0,4164s^2 + 1,416s + 1$	$P_1 = -2,3999$ $P_2 = -1,0007$	$Z_1 = -2,56$
(0,2) $G_e(s+1)$	$1,6$	$0,01563s^2 + 1,025s + 1$	$P_1 = -64,609$ $P_2 = -0,9906$	não possui zeros
(1,1) $G_e(s+1)$	$-0,02439s + 1,6$	$1,01s + 1$	$P_1 = -0,9903$	$Z_1 = 65,6007$
(0,1) $G_e(s+1)$	$1,6$	$1,025s + 1$	$P_1 = -0,9756$	não possui zeros

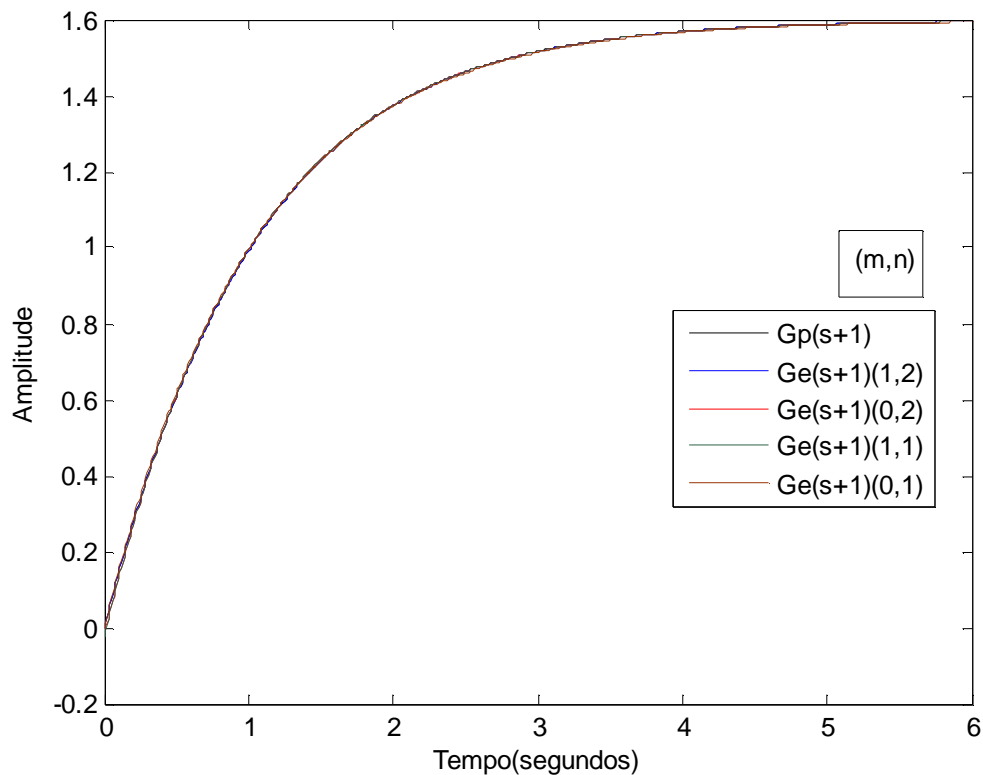


Figura 18- Resposta ao degrau dos modelos reduzidos e estáveis identificados pelo método generalizado na simulação 3.

Note que as respostas ao degrau apresentam comportamento temporal praticamente idêntico. A partir dos modelos identificados na Tabela 5 chega-se aos modelos na Tabela 6.

Tabela 6- Modelos reduzidos para $G_e(s)$ da simulação 3.

(m,n)	Numerador	Denominador	Pólos	Zeros
$G_p(s)$	$0,6s + 1$	$0,4s^2 + 0,6s$	$P_1 = -1,5$ $P_2 = 0$	$Z_1 = -1,667$
$G_e(s)$ (1,2)	$0,625s + 0,975$	$0,4164s^2 + 0,5836s$	$P_1 = -1,4015$ $P_2 = 0$	$Z_1 = -1,56$
$G_e(s)$ (0,2)	$1,6$	$0,01563s^2 + 0,9938s - 0,0094$	$P_1 = -63,609$ $P_2 = 0,0095$	não possui zero
$G_e(s)$ (1,1)	$-0,02439s + 1,6243$	$1,01s - 0,01$	$P_1 = 0,0097$	$Z_1 = 66,59$
$G_e(s)$ (0,1)	$1,6$	$1,025s - 0,025$	$P_1 = 0,0244$	não possui zero

Simulação 4: Considere $G_p(s) = \frac{3}{2s-5}$,

uma FT instável a ser identificada.

A Figura 20 mostra como obter os valores $G(4)$ e $W_1(0)$, observando-se que o tempo de simulação é de 10 segundos e a constante utilizada para estabilizar a saída $y_n(t)$ é $a = 4$ (blocos *Transfer Fcn1* e *Transfer Fcn2*).

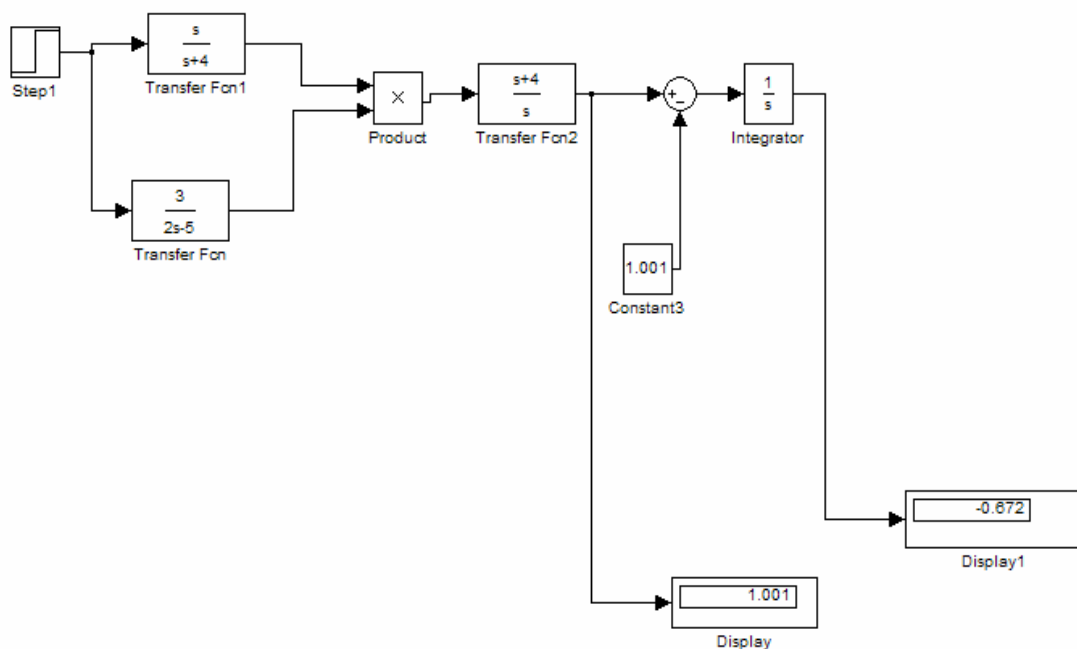


Figura 19- Diagrama de blocos do método generalizado para FT instável da simulação 4.

De (2.24), (2.35), (2.38),(2.39), (2.58)-(2.63) e da figura 20 tem-se:

$$G_e(s+a) = \frac{1,001}{0,6713s+1},$$

$$G_e(s) = \frac{3,003}{2,0139s - 5,055}.$$

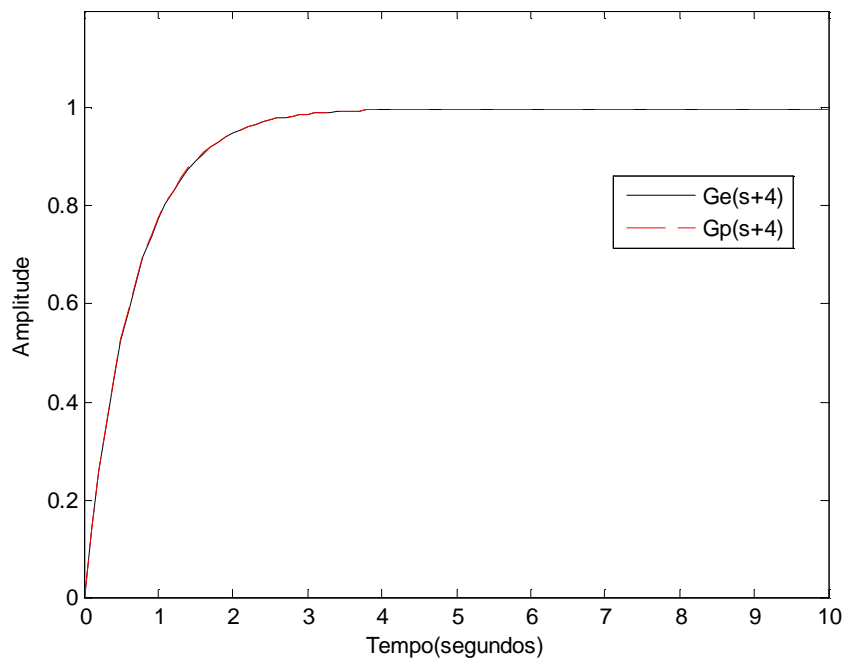


Figura 20 – Resposta ao degrau de $G_e(s+4)$ da simulação 4 e de $G_p(s+4)$.

Na Tabela 7 encontram-se os parâmetros encontrados utilizando-se outros valores para a constante a . Para os valores $G(a)$, ... , $W_{n+m}(0)$ desta simulação e das próximas simulações ao longo do texto, confira Apêndice B.

Tabela 7 - Parâmetros encontrados utilizando-se outros valores para “a” na simulação 4.

a		numerador	denominador	pólos
3	$G_p(s+3)$	3	$2s+1$	-0,5
	$G_e(s+3)$	3,001	$1,976s+1$	-0,506
4,5	$G_p(s+4,5)$	0,75	$0,5s+1$	-2
	$G_e(s+4,5)$	0,7504	$0,5001s+1$	-1,99
5	$G_p(s+5)$	0,6	$0,4s+1$	-2,5
	$G_e(s+5)$	0,6003	$0,4001s+1$	-2,49
6	$G_p(s+6)$	0,428	$0,2857s+1$	-3,5
	$G_e(s+6)$	0,4288	$0,2868s+1$	-3,48
10	$G_p(s+10)$	0,2	$0,133s+1$	-7,5
	$G_e(s+10)$	0,2	$0,1315s+1$	-7,6

Simulação 5: Para esta simulação foi aplicado o método generalizado para FT's instáveis na implementação laboratorial de um carro protótipo controlado automaticamente, que utiliza transdutor ultra-sônico (Figura 21) (CÂNDIDO, 2007)².

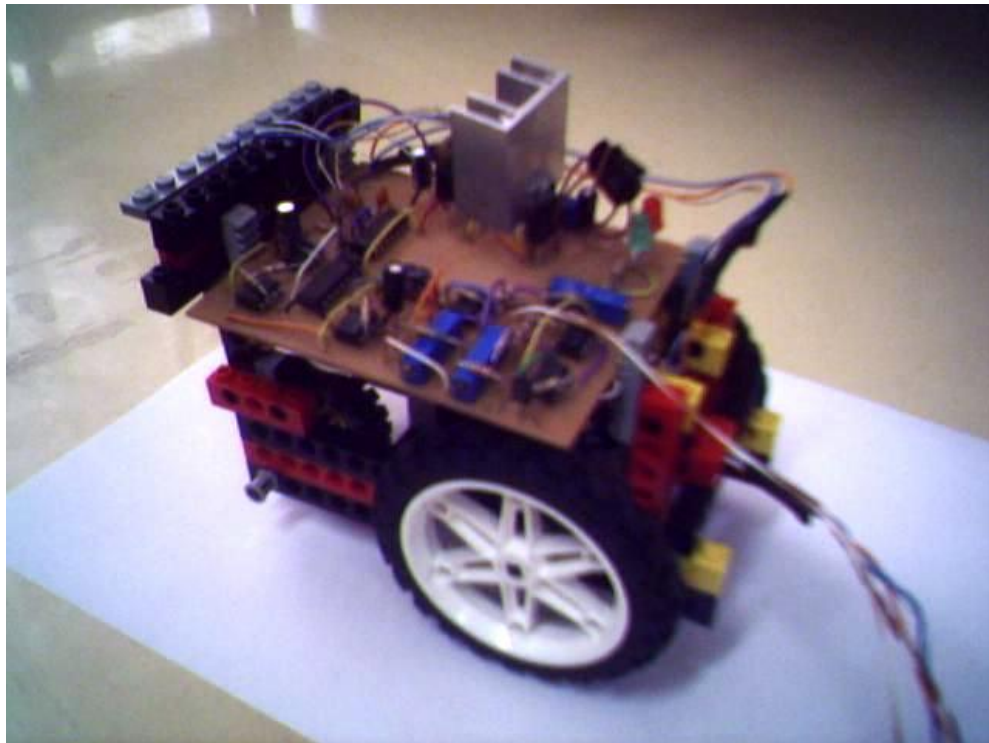


Figura 21- Carro protótipo.

² Todos os dados desta simulação foram adquiridos por Cândido (2007, p. 23-35).

O sistema está realimentado e apresenta um comportamento estável (Figura 22). No entanto, utilizando um controlador com ganho K_r ele é super amortecido, não sendo possível determinar sua função de transferência. Uma solução seria aumentar K_r . Porém, para um aumento que tornasse o sistema subamortecido, haveria uma saturação do amplificador. Dessa forma, retira-se a realimentação da planta, tornando o sistema instável (com um pólo na origem) e, através do método proposto para sistemas instáveis, estima-se a função de transferência da planta, cujo modelo genérico é dado por $G_p(s) = \frac{K}{s(s+c)}$ do bloco carro e motor de corrente contínua. Ou seja, nesta identificação procura-se o valor de K e c .

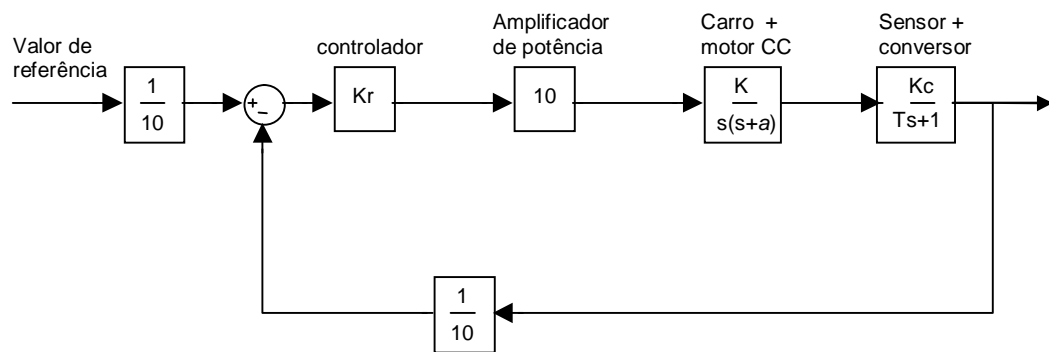


Figura 22 - Diagrama de blocos do sistema de rastreamento.

Segundo Cândido, as principais dificuldades encontradas na identificação da FT foram:

Problemas na aquisição de dados: devido às características de construção interna do sonar, o protótipo deixa de responder ao sinal enviado (Figura 23). A solução utilizada foi desprezar as informações obtidas no intervalo de tempo no qual o sonar opera incorretamente.

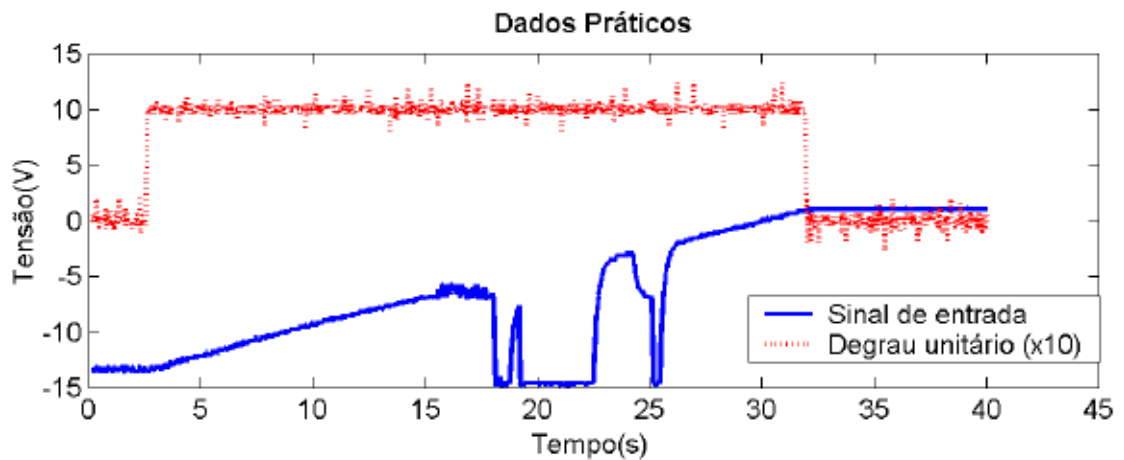


Figura 23 - Entrada degrau e sinal do sonar.

Note que entre 15 e 26 segundos, o sinal do sonar “se perde” (curva azul na Figura 23). Dessa forma, entre aproximadamente 13 segundos e 26 segundos, os dados foram desprezados (Figura 24). Para solucionar o problema, os dados corrompidos da saída do sonar foram desprezados e substituídos por uma interpolação de dados.

Problemas com ruídos externos: durante a aquisição de dados pelo osciloscópio ou ainda durante a aquisição das informações do osciloscópio digital para o computador, há a presença aleatória do ruído, interferindo na identificação do sinal real. A solução encontrada foi utilizar um programa que simula um filtro digital passa baixa de grau 25 (filtro digital com 25 pólos que deixa passar as baixas frequências) (Figura 24). Observe que o sinal prático representa a saída real.

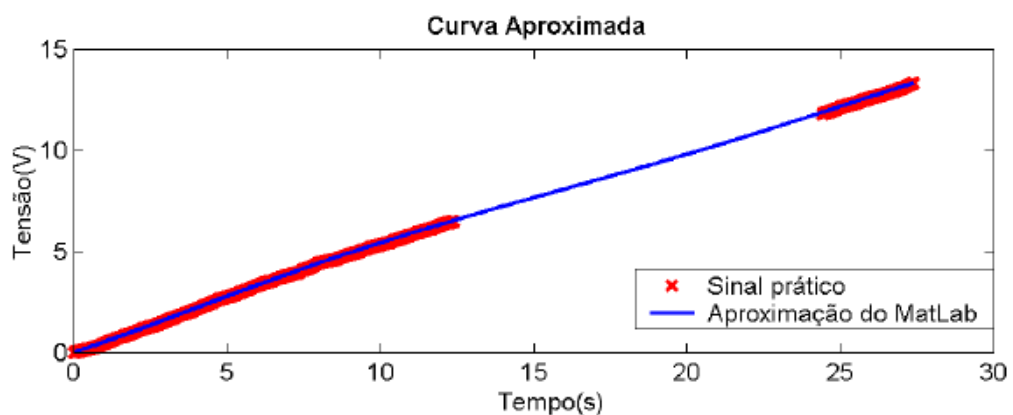


Figura 24 - Sinal filtrado e sinal aproximado.

Problemas com o tempo de simulação: embora para a aplicação do método seja exigido um tempo de simulação tendendo ao infinito, na prática o tempo de aquisição de dados é limitado. Foi considerado que o sistema estava em regime permanente quando $G(s+a)/(s+a) < 10^{-4}$.

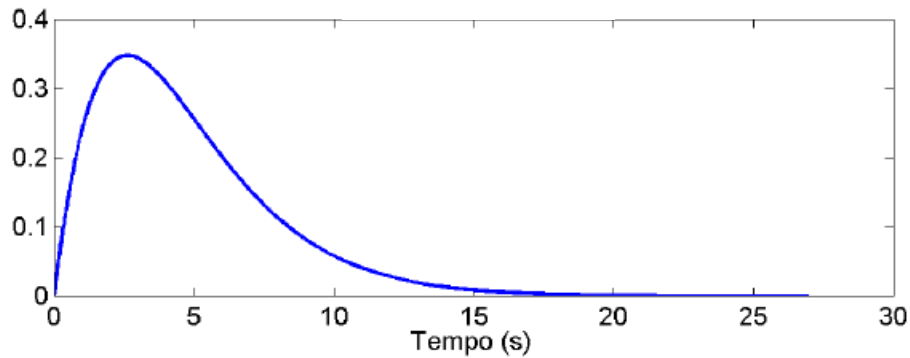


Figura 25 - Sinal de $G(s+a)/(s+a)$ na simulação 5.

Problemas na escolha da constante a : para grandes valores da constante a , podemos atenuar muito rapidamente $G(s+a)/(s+a)$, perdendo informações práticas adquiridas. Por outro lado, para pequenos valores da constante a , pode não ser possível limitar a saída em um tempo de simulação fixo. A solução adotada foi aplicar o método generalizado diversas vezes utilizando valores diferentes de “ a ” em cada uma das aplicações, até que fosse encontrado um erro absoluto mínimo (máxima diferença, ponto a ponto, entre o dado prático e o teórico). A constante a que tornou essa diferença mínima foi 0,45 (Figura 27) obtendo-se $G_e(s+a)$ como ilustrado na Figura 26.

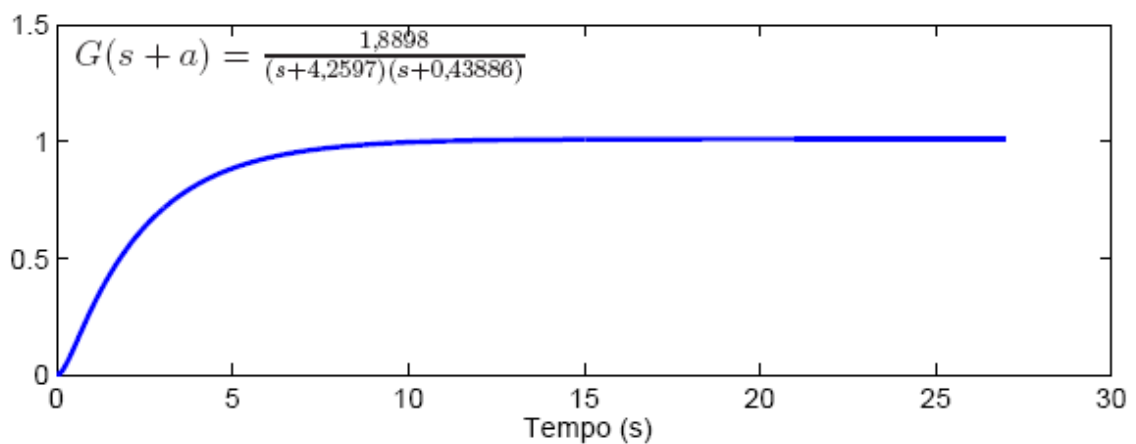


Figura 26 - Resposta ao degrau de $G_e(s+a)$.

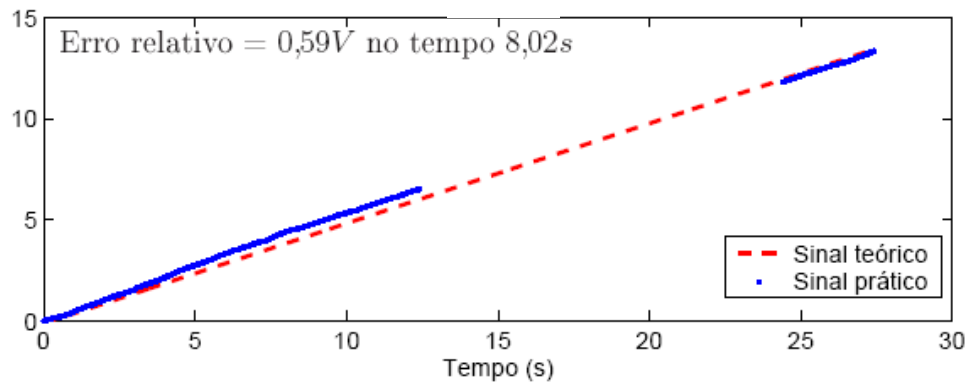


Figura 27 – Comparação entre o sinal de saída com a função de transferência estimada pelo método generalizado para funções instáveis e o sinal de saída (real) da planta.

Note que há uma boa aproximação entre o sinal teórico estimado (identificado) pelo método generalizado para funções de transferência instáveis e o sinal prático (real).

Finalmente, após as etapas anteriormente descritas, obteve-se

$$G_e(s) = \frac{18,12}{s(s + 3,82)}.$$

Para a verificação da validade do modelo estimado, comparou-se a resposta ao degrau do sistema realimentado (Figura 22) com a resposta ao degrau do modelo identificado (Figura 28).

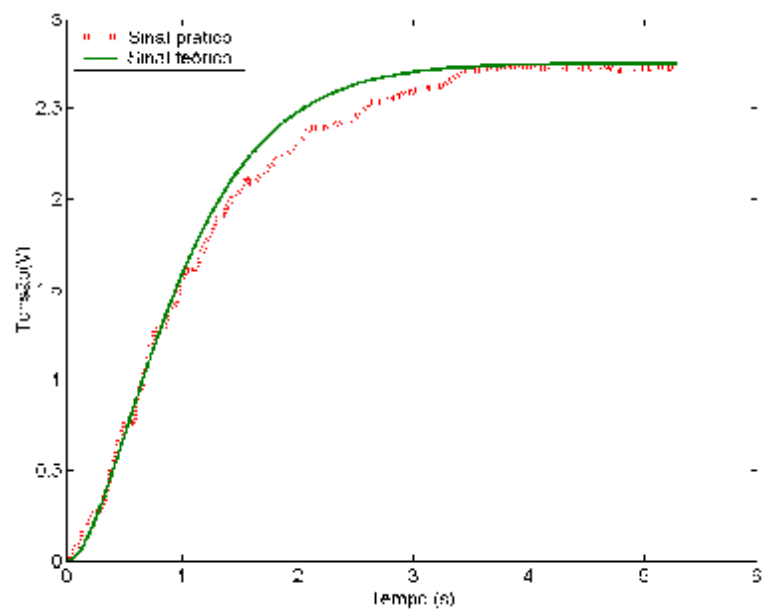


Figura 28 – Comparação entre a resposta ao degrau do protótipo (real) em malha fechada e a resposta ao degrau do modelo identificado.

Note que as respostas ao degrau apresentam um comportamento parecido e o erro em regime permanente é muito pequeno. Portanto, conclui-se que o procedimento adotado para a identificação de FT's instáveis estimou um modelo satisfatório para o sistema do carro protótipo controlado automaticamente.

3.2.3 Parâmetros Encontrados para Sistemas Estáveis Utilizando o Método Proposto para Sistemas Instáveis

Nesta seção o objetivo é fazer uma comparação entre o procedimento proposto por Kosaka (2005) e o procedimento proposto para funções instáveis, sendo esse utilizado na identificação de FT's estáveis. Para isso são retomadas as FT's das simulações 1 e 2 para as simulações 6 e 7, respectivamente.

Simulação 6: Considere $G_p(s) = \frac{3s+1}{2s^2+2s+1}$,

sendo ela uma FT estável (Cf. simulação 1 para utilização do método proposto por Kosaka).

Na figura 29 encontram-se as diferentes constantes “a” utilizadas na identificação, nas Figuras 30-32 a resposta ao degrau, na Tabela 8 os modelos identificados pelo método generalizado para FT's instáveis para cada constante a e na Tabela 9 o erro da resposta ao degrau da FT identificada em relação à FT da planta, sendo que:

$$\text{erro} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [L^{-1}(G_p(s+a)\frac{1}{s}) - L^{-1}(G_e(s+a)\frac{1}{s})]^2,$$

t_f = tempo de simulação, $G_p(s+a)$ a FT a ser identificada e $G_e(s+a)$ a FT identificada pelo método generalizado para FT's instáveis³. O tempo de simulação foi de 30 segundos para $a = 0,2$, de 20 segundos para $a = 0,5$ e de 10 segundos para as demais constantes.

³ O erro assim definido será utilizado em todas as simulações ao longo do texto.

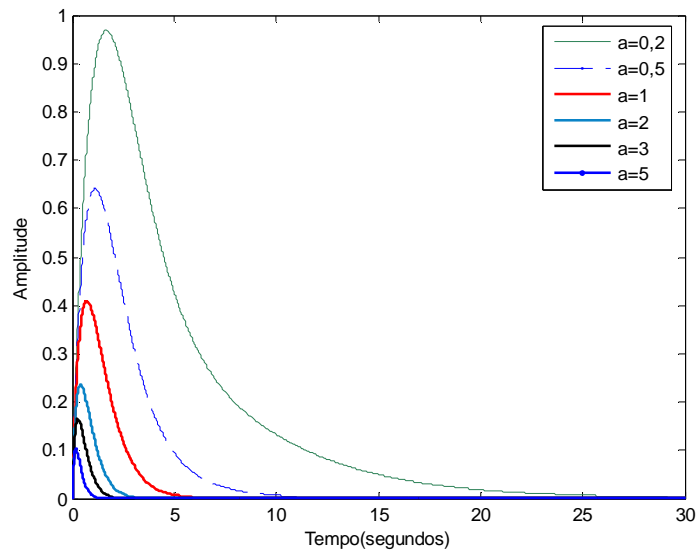


Figura 29- Sinal de $G_e(s+a)/(s+a)$ utilizando diferentes constantes “a”.

Tabela 8- Comparação entre a função de transferência identificada pelo método ($G_e(s+a)$) e a função de transferência da planta ($G_p(s+a)$) utilizando diversas constantes “a”.

a		Numerador	Denominador	Pólos	Zero
0,2	$G_p(s+a)$	$2,02s + 1,081$	$1,351s^2 + 1,89s + 1$	$P_{1,2} = -0,7 \pm 0,5j$	$Z_1 = -0,53$
	$G_e(s+a)$	$2,2s + 1,081$	$1,384s^2 + 2,09s + 1$	$P_{1,2} = -0,75 \pm 0,38j$	$Z_1 = -0,48$
0,5	$G_p(s+a)$	$1,2s + 1$	$0,8s^2 + 1,6s + 1$	$P_{1,2} = -1 \pm 0,5j$	$Z_1 = -0,83$
	$G_e(s+a)$	$1,193s + 1$	$0,796s^2 + 1,593s + 1$	$P_{1,2} = -0,99 \pm 0,5j$	$Z_1 = -0,83$
1	$G_p(s+a)$	$0,6s + 0,8$	$0,4s^2 + 1,2s + 1$	$P_{1,2} = -1,5 \pm 0,5j$	$Z_1 = -1,33$
	$G_e(s+a)$	$0,6002s + 0,8$	$0,4001s^2 + 1,2s + 1$	$P_{1,2} = -1,49 \pm 0,49j$	$Z_1 = -1,33$
2	$G_p(s+a)$	$0,23s + 0,53$	$0,15s^2 + 0,7s + 1$	$P_{1,2} = -2,5 \pm 0,5j$	$Z_1 = -2,33$
	$G_e(s+a)$	$-1,17s - 0,5385$	$-0,601s^2 - 3,071s - 1$	$P_1 = 5,4$ $P_2 = -0,3$	$Z_1 = -0,49$
3	$G_p(s+a)$	$0,12s + 0,4$	$0,08s^2 + 0,56s + 1$	$P_{1,2} = -3,5 \pm 0,5j$	$Z_1 = -3,33$
	$G_e(s+a)$	$0,05s - 0,4$	$0,03s^2 - 0,12s - 1$	$P_1 = -3,91$ $P_2 = 7,89$	$Z_1 = 7,6$
5	$G_p(s+a)$	$0,04s + 0,26$	$0,032s^2 + 0,36s + 1$	$P_{1,2} = -5,5 \pm 0,5j$	$Z_1 = -5,33$
	$G_e(s+a)$	$1,53s + 0,26$	$1,01s^2 + 6,03s + 1$	$P_1 = -5,77$ $P_2 = -0,17$	$Z_1 = -0,17$

Observe que $G_e(s+a)$, para $a = 2, 3$ os modelos são instáveis, ou seja, devem ser descartados como modelos da planta. Com $a = 5$ ocorreu um cancelamento de pólo com um zero e a ordem da FT da planta (ordem 2 com um zero) foi fixada para esta simulação.

Tabela 9 – Erros obtidos com as constantes que resultaram em FT's estáveis na simulação 6.

a	erro
0,2	$4,284 \cdot 10^{-5}$
0,5	$2,774 \cdot 10^{-8}$
1	$1,33 \cdot 10^{-9}$
Utilizando o método proposto por Kosaka	0 (com tempo de simulação de zero a 100)

Note que o melhor resultado é obtido com a utilização do método proposto por Kosaka (2005). Entretanto, quando foi utilizado o método generalizado proposto para FT's instáveis com constantes $a = 0,2$, $a = 0,5$ e $a = 1$, os resultados também foram satisfatórios, apresentando uma resposta ao degrau praticamente idêntica à resposta ao degrau da $G_p(s + a)$ (Figuras 30-32). Portanto, o método generalizado pôde ser utilizado na simulação 6 e apresentou um resultado satisfatório.

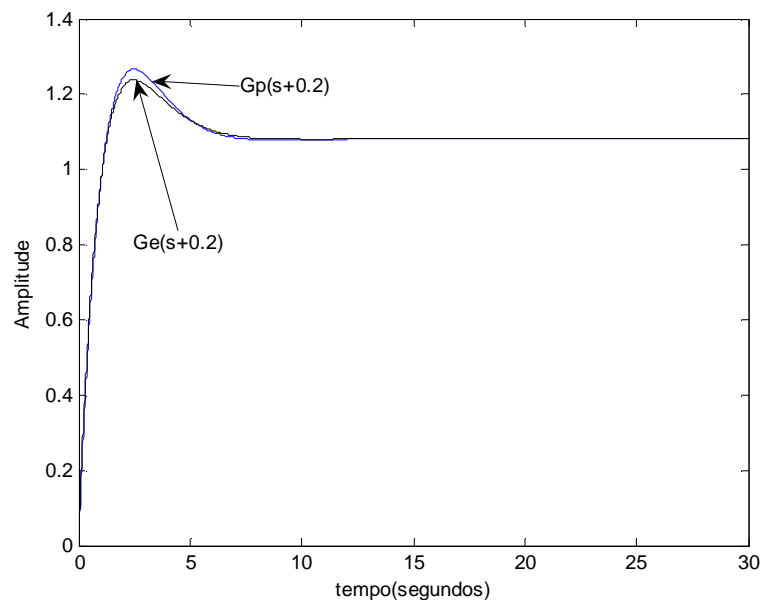


Figura 30- Resposta ao degrau para FT estável da simulação 6 utilizando o método proposto para funções instáveis e $a = 0,2$.

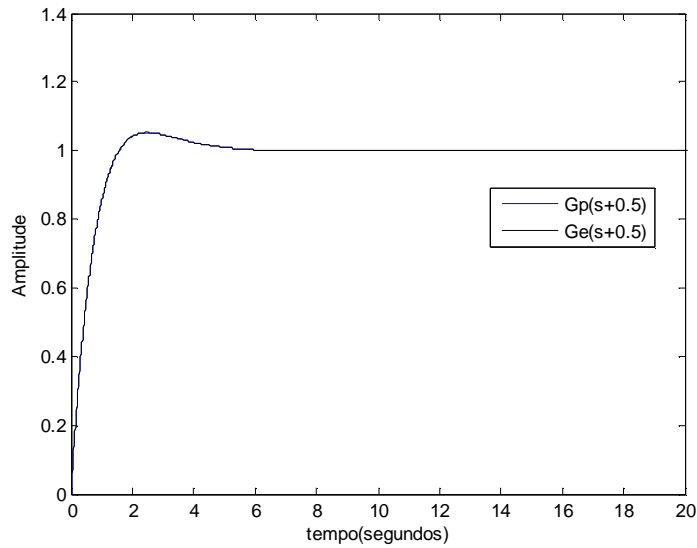


Figura 31 - Resposta ao degrau para FT estável da simulação 6 utilizando o método proposto para funções instáveis e $a = 0,5$.

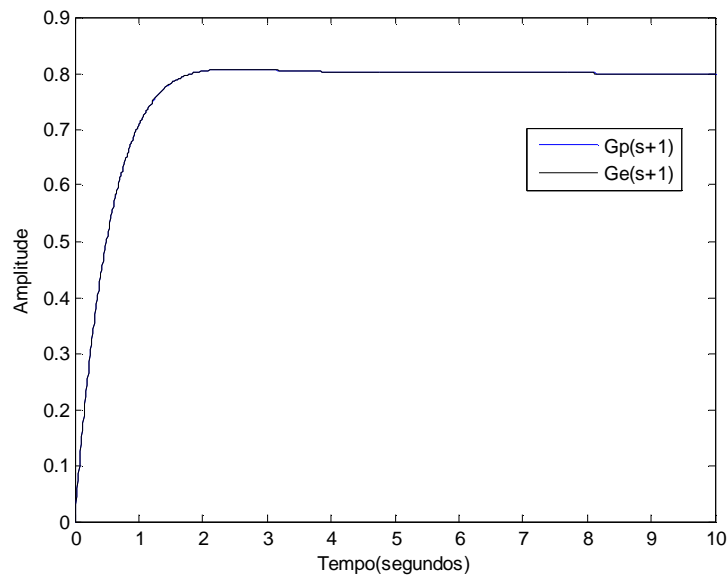


Figura 32 - Resposta ao degrau para FT estável da simulação 6 utilizando o método proposto para funções instáveis e $a = 1$.

Simulação 7: Considere $G_p(s) = \frac{2,25s + 0,6000}{0,05s^3 + 0,5s^2 + 1,45s + 1}$,

sendo ela uma FT estável (Cf. simulação 2 para utilização do método proposto por Kosaka).

Na Tabela 10 encontram-se as FT's identificadas com o método generalizado proposto para funções instáveis e a constante $a = 1$. Na Tabela 11 os zeros e pólos dessas FT's. Na tabela 12 o erro utilizando o método generalizado proposto para funções instáveis e na Tabela 13 utilizando o método proposto por Kosaka (2005).

Tabela 10- Funções de transferência $G_c(s+1)$ identificadas pelo método proposto para funções instáveis e sem o conhecimento prévio da ordem da planta.

(m,n)	Numerador	Denominador
(3,4)	$0,1424s^3 - 0,9054s^2 - 2,201s - 0,95$	$0,0239s^4 - 0,1777s^3 - 1,288s^2 - 2,394s - 1$
(2,4)	$1,524s^2 + 2,707s + 0,95$	$0,0322s^4 + 0,46s^3 + 1,98s^2 + 2,927s + 1$
(1,4)	$-0,84s - 0,95$	$0,00685s^4 - 0,0298s^3 - 0,2236s^2 - 0,9552s - 1$
(0,4)	$0,95$	$0,08712s^4 - 0,107s^3 + 0,1559s^2 + 0,07718s + 1$
(3,3)	$-0,08174s^3 + 1,169s^2 + 2,417s + 0,95$	$0,2984s^3 + 1,583s^2 + 2,621s + 1$
(2,3)	$0,2675s^2 + 1,163s + 0,95$	$0,1055s^3 + 0,5319s^2 + 1,301s + 1$
(1,3)	$0,7733s + 0,95$	$0,01983s^3 + 0,2187s^2 + 0,8912s + 1$
planta	$0,75s + 0,95$	$0,0167s^3 + 0,2167s^2 + 0,8667s + 1$
$G_p(s+1)$		
(0,3)	$-0,95$	$0,107s^3 - 0,1559s^2 - 0,07718s - 1$
(2,2)	$-0,06193s^2 + 0,6831s + 0,95$	$0,1462s^2 + 0,7962s + 1$
(1,2)	$0,6524s + 0,95$	$0,2089s^2 + 0,764s + 1$
(0,2)	$0,95$	$0,1559s^2 + 0,07718s + 1$
(1,1)	$1,918s - 0,95$	$1,942s - 1$
(0,1)	$0,95$	$0,07718s + 1$

Tabela 11 - Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s + 1)$ conforme a Tabela 10.

(m,n)	Zeros	Pólos
(3,4)	$Z_1= 8,3128$; $Z_2= -1,3701$ $Z_3= - 0,5856$	$P_1= 12,4297$ $P_{2,3}=-2,2069 \pm 0,9292j$ $P_4 =-0.5865$
(2,4)	$Z_1= -0,4815$; $Z_2= -1,2942$	$P_1= -7,9435$; $P_2= -3,6647$ $P_3= -2,2131$; $P_4= -0,4817$
(1,4)	$Z_1= -1,1389$	$P_1= 9,4951$; $P_2= -1,3876$ $P_{3,4}= -1,8805 \pm 2,744j$
(0,4)	não possui zero	$P_{1,2}= -0,888 \pm 1,2934j$ $P_{3,4}= 1,5022 \pm 1,5512j$
(3,3)	$Z_1= 16,1752$; $Z_2= -1,3334$ $Z_3= -0,5389$	$P_{1,2}= -2,3828 \pm 0,7325j$ $P_3= -0,5393$
(2,3)	$Z_1= -3,2558$; $Z_2= -1,0906$	$P_{1,2}= -1,8983 \pm 1,999j$ $P_3= -1,2471$
(1,3)	$Z_1= -1,2285$	$P_{1,2}= -4,6336 \pm 2,6728j$ $P_3= -1,76$
planta	$Z_1= -1,266$	$P_1 = -6$; $P_3= -5$
$G(s+1)$		$P_3= -2$
(0,3)	não possui zero	$P_{1,2}= -0,6994 \pm 1,6683j$ $P_3= 2,8549$
(2,2)	$Z_1=12,2783$; $Z_2= -1,2492$	$P_1= -3,484$; $P_2= -1,9638$
(1,2)	$Z_1= -1,4561$	$P_{1,2}= -1,8289 \pm 1,2013j$
(0,2)	não possui zero	$P_{1,2}= -0,2476 \pm 2,5209$
(1,1)	$Z_1= 0,4952$	$P_1= 0,5149$
(0,1)	não possui zero	$P_1= -12,9569$

Note que (considerando uma precisão de 10^{-2}) nos modelos reduzidos identificados com ordem 4 e 3 zeros, 2 zeros e de ordem 3 com 3 zeros ocorre cancelamento de um pólo com um zero. Os modelos de ordem 4 sem zeros, 3 sem zeros e de ordem 1 com 1 zero são FT's instáveis e não representam, dessa forma, a função de transferência $G_p(s+1)$.

Tabela 12- Erro utilizando o método proposto para funções de transferência instáveis na função de transferência estável da simulação 7.

(m,n)	erro
(2,3)	$1,33*10^{-4}$
(1,3)	$1,8*10^{-5}$
(2,2)	$7,4*10^{-4}$
(1,2)	$5,2*10^{-4}$
(0,2)	$6,3*10^{-2}$
(0,1)	$7,2*10^{-3}$

Tabela 13 – Erro utilizando o método proposto por Kosaka (2005) segundo os parâmetros obtidos na simulação 2 (Tabela 2).

(m,n)	erro
(3,4)	$4,02*10^{-4}$
(1,4)	$1,26*10^{-4}$
(3,3)	$1,26*10^{-3}$
(2,3)	$1,23*10^{-4}$
(1,3)	$1,25*10^{-4}$
(2,2)	$1,4*10^{-3}$
(1,2)	$1,6*10^{-3}$
(1,1)	$6*10^{-3}$

Note que a planta é estável e de ordem 3 com um zero. Entretanto, comparando-se os resultados obtidos com as simulações 2 e 7, ilustrados nas Tabelas 2 e 9, respectivamente, o modelo estimado com o menor erro foi obtido com o método generalizado proposto para FT's instáveis e com ordem 3 e um zero. Observa-se também que a utilização do método generalizado para FT's instáveis tornou inviáveis alguns modelos, como por exemplo, o de ordem 4 com um zero. Já a utilização do método proposto por Kosaka (2005) tornou inviáveis outros modelos, como, por exemplo, o de ordem 4 e sem zeros, pois, em ambos os casos, tais modelos estimados eram instáveis. Conclui-se que, como na simulação 6, os dois modelos apresentam bons resultados, ou seja, a generalização do método proposto por Kosaka (2005) que é proposta para a identificação de FT's instáveis, também pode ser utilizada em FT's

estáveis. Entretanto, o método proposto por Kosaka (2005) exige a estabilidade da FT e não é aplicável em FT's instáveis.

3.2.4 Parâmetros Encontrados em Sistemas com Ruído

Nesta seção são feitas simulações com a soma do ruído branco na saída da planta (Figura 33). Dessa forma, retoma-se a FT das simulações 1 e 2 e são comparados os resultados utilizando o procedimento proposto para FT's instáveis e o método proposto por Kosaka nas simulações 8, 9 e 10. Para reforçar a conclusão são realizadas as simulações 11.1-11.3. É realizada apenas uma simulação com ruído branco somado à saída de uma planta instável (Cf. simulação 12), já que a simulação com o carro protótipo também é realizada considerando o efeito de ruído, além de ser um modelo instável (Cf. simulação 5).

Simulação 8 Considere $G_p(s) = \frac{3s+1}{2s^2+2s+1}$,

uma FT estável e que será identificada (Cf. simulação 1 para identificação desconsiderando o ruído e utilizando o método proposto por Kosaka(2005)). Adicionalmente, considere o diagrama de blocos da Figura 33, onde a potência do ruído branco foi configurada para 10^{-3} ou 10^{-2} e o *sample time* (tempo de amostragem) do ruído em 0,01 segundos. O tempo de simulação foi de 30 segundos para o método para FT's instáveis utilizando $a = 0,2$, de 20 segundos quando utilizou-se $a = 0,5$ e de 10 segundos quando fixou-se $a = 1$. Para o método proposto por Kosaka o tempo de simulação foi de 100 segundos. A resposta ao degrau da planta com ruído branco pode ser vista na Figura 34. Na Tabela 14 encontram-se as FT's identificadas pelo procedimento proposto para funções instáveis e também pelo método proposto por Kosaka (2005) e ruído branco configurado com potência em 10^{-2} e 10^{-3} . Na tabela 15 o erro para cada função de transferência estimada (lembrando que em todas as simulações o valor do erro é dado pela integral definida - entre um tempo que varia de um tempo inicial $t_0 = 0$ e um tempo final t_f - do quadrado das diferenças das respostas ao degrau entre a FT da planta e a FT identificada, dividida por t_f).

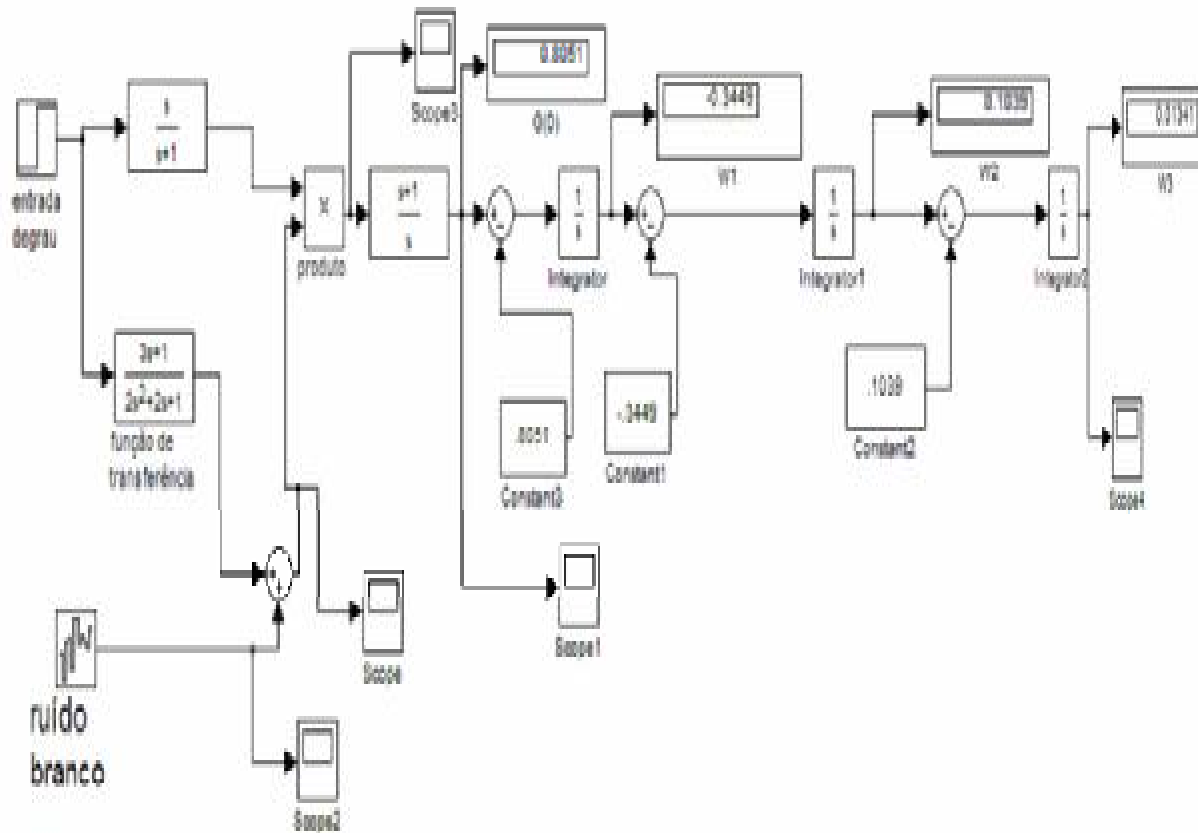


Figura 33 – Diagrama de blocos do método generalizado proposto para FT's instáveis com ruído somado à saída da planta na simulação.

Observe que a figura 33 ilustra a utilização da generalização do método proposto por Kosaka (2005) e a constante utilizada é $a = 1$ e o ruído branco com potência configurada em 10^{-3} (Cf. Tabela 14).

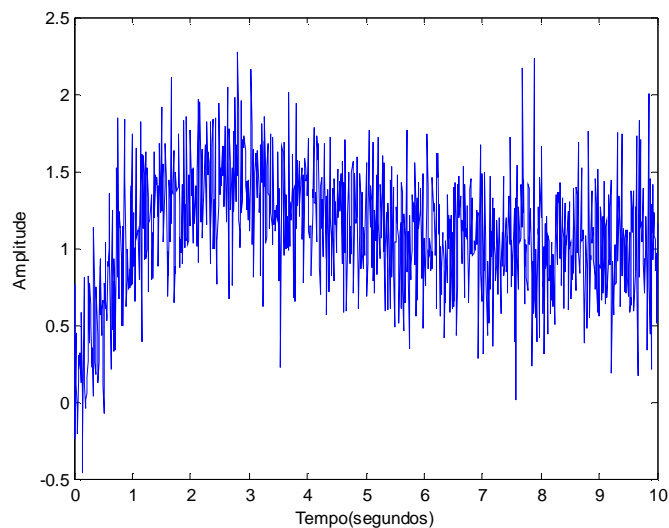


Figura 34 – Sinal de $G_p(s)$ da simulação 8 com ruído branco.

Tabela 14 – Funções de transferência identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis utilizando diversas constantes “ a ”, e as funções de transferência identificadas pelo método proposto por Kosaka.

a		Numerador	Denominador	Pólos	Zero
0,2	$G_p(s+0,2)$	$2,02s + 1,081$	$1,351s^2 + 1,89s + 1$	$P_{1,2} = -0,7 \pm 0,5j$	$Z = -0,53$
	$G_e(s+0,2)^a$	$12,2s - 1,078$	$0,5348s^2 + 11,33s - 1$	$P_1 = -21,09$ $P_2 = 0,08$	$Z = 0,08$
	$G_e(s+0,2)^b$	$14,98s - 1,072$	$1,78s^2 + 13,68s - 1$	$P_1 = -7,33$ $P_2 = 0,07$	$Z = 0,07$
0,5	$G_p(s+0,5)$	$1,2s + 1$	$0,8s^2 + 1,6s + 1$	$P_{1,2} = -1 \pm 0,5j$	$Z = -0,83$
	$G_e(s+0,5)^a$	$1,154s + 0,99$	$0,736s^2 + 1,543s + 1$	$P_{1,2} = -1,04 \pm 0,51j$	$Z = -0,86$
	$G_e(s+0,5)^b$	$1,198s + 0,988$	$0,66s^2 + 1,542s + 1$	$P_{1,2} = -1,18 \pm 0,3j$	$Z = -0,83$
1	$G_p(s+1)$	$0,6s + 0,8$	$0,4s^2 + 1,2s + 1$	$P_{1,2} = -1,5 \pm 0,5j$	$Z = -1,33$
	$G_e(s+1)^a$	$0,7185s + 0,8051$	$0,4368s^2 + 1,32s + 1$	$P_{1,2} = 1,51 \pm 0,05j$	$Z = -1,12$
	$G_e(s+1)^b$	$0,8009s + 0,816$	$0,4119s^2 + 1,365s + 1$	$P_1 = -2,21$ $P_2 = -1,09$	$Z = -1,01$
método	$G_p(s)$	$3s + 1$	$2s^2 + 2s + 1$	$P_{1,2} = -0,5 \pm 0,5j$	$Z = -0,33$
Kosaka	$G_e(s)^a$	$-18,37s - 1,15$	$316,4s^2 + 28,07s - 1$	$P_1 = -0,02$ $P_2 = 0,11$	$Z = -1,12$
	$G_e(s)^b$	$37,06s - 1,478$	$1428s^2 - 6,24s - 1$	$P_1 = -0,024$ $P_2 = 0,028$	$Z = 0,03$

^a representa ruído branco com potência igual a 10^{-3} e ^b ruído branco com potência igual a 10^{-2} .

Note que ocorreu cancelamento entre um pólo e um zero quando $a = 0.2$ e o método proposto por Kosaka identificou FT's instáveis (e que devem ser desconsideradas) na presença de ruído. Quando se utilizou o procedimento proposto para FT's instáveis com uma constante $a = 0,5$ e $a = 1$ estimou-se parâmetros próximos aos parâmetros da FT da planta. Na Tabela 15 encontram-se os erros em cada estimacão, observando que, quando ocorre cancelamento de pólos e zeros, ou a FT estimada é instável, o erro não foi calculado, pois esses modelos não devem ser levados em consideracão, uma vez que busca-se FT's estáveis formadas por numerador e denominador coprimos. Para a resposta ao degrau das FT's identificadas utilizando o método proposto com constantes $a = 0,5$ e $a = 1$, ver Figura 35.

Tabela 15 – Erro das respostas ao degrau nas funções de transferência identificadas na simulação 8.

a	Potência do ruído	Erro
0,2	10^{-3}	cancelamento
	10^{-2}	cancelamento
0,5	10^{-3}	$2,2 \cdot 10^{-4}$
	10^{-2}	$6,5 \cdot 10^{-4}$
1	10^{-3}	$6,3 \cdot 10^{-5}$
	10^{-2}	$6,2 \cdot 10^{-4}$
Utilizando o método proposto por Kosaka	10^{-3}	instável
	10^{-2}	instável

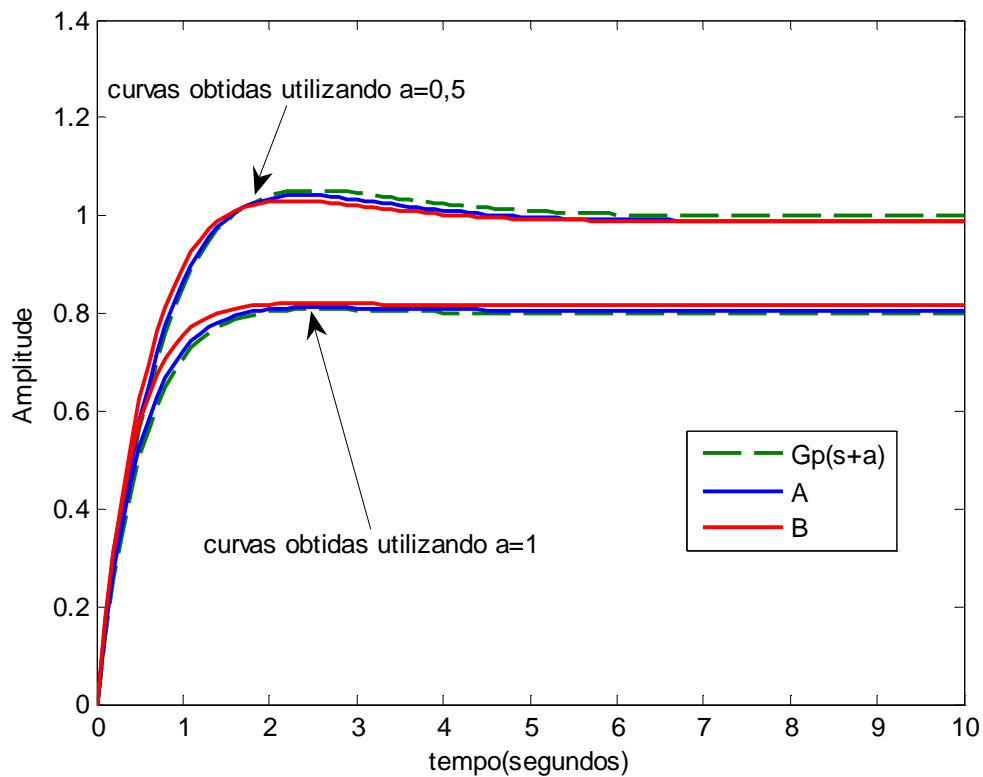


Figura 35 – Resposta ao degrau das FT's estimadas na simulação 8 na presença de ruído e utilizando $a = 0,5$ e $a = 1$.

Na Figura 35 “A” representa a função de transferência estimada com a potência de ruído configurada em 10^{-3} e “B” ruído branco configurado com potência de 10^{-2} .

Note que, considerando o ruído, o procedimento adotado para funções instáveis ainda encontra uma FT que apresenta uma resposta ao degrau próxima à resposta ao degrau de $G_p(s+a)$. O mesmo fato não ocorreu com o método proposto por Kosaka que, na presença do ruído, não conseguiu obter uma função de transferência cuja resposta ao degrau fosse próxima à resposta ao degrau da planta.

Para uma nova comparação, será refeita a simulação 2, agora com a presença do ruído branco.

Simulação 9: Considere $G_p(s) = \frac{2,25s + 0,6000}{0,05s^3 + 0,5s^2 + 1,45s + 1}$,

uma FT estável a ser identificada. Para simulação sem ruído e utilizando o método proposto por Kosaka (2005) confira simulação 2.

Para esta simulação, o ruído branco está configurado com potência 10^{-3} e período de amostragem (do ruído) está configurado em 0,01 segundos e o tempo de simulação 10 segundos.

Utilizando o método proposto por Kosaka (2005), os resultados encontram-se nas Tabelas 16 e 17. Para a resposta ao degrau das FT's estáveis identificadas, ver Figura 36.

Tabela 16 – Resultados encontrados na presença de ruído branco com potência de 0,001 utilizando o método proposto por Kosaka.

(m,n)	Numerador	Denominador
(3,4)	$-1,659s^3 - 9,934s^2 - 2,818s - 0,78$	$0,3179s^4 - 4,057s^3 - 6,692s^2 - 4,199s - 1$
(2,4)	$-9,459s^2 - 2,681s - 0,78$	$0,804s^4 - 3,006s^3 - 5,981s^2 - 4,024s - 1$
(1,4)	$16,77s + 0,78$	$592,2s^4 - 151,4s^3 + 4,49s^2 + 22,07s + 1$
(0,4)	$0,78$	$16,04s^4 + 23,89s^3 - 8,161s^2 + 0,5894s + 1$
(3,3)	$2,742s^3 + 10,24s^2 + 2,907s + 0,78$	$4,742s^3 + 7,157s^2 + 4,314s + 1$
(2,3)	$9,445s^2 + 2,702s + 0,78$	$2,772s^3 + 5,978s^2 + 4,051s + 1$
(1,3)	$-0,524s + 0,78$	$29,37s^3 - 8,557s^2 - 0,08213s + 1$
$G_p(s)$	$2,25s + 0,6$	$0,05s^3 + 0,5s^2 + 1,45s + 1$
(0,3)	$0,78$	$23,89s^3 - 8,161s^2 + 0,5894s + 1$
(2,2)	$10,43s^2 + 3,038s + 0,78$	$7,493s^2 + 4,482s + 1$
(1,2)	$-2,285s - 0,78$	$6,436s^2 - 3,517s - 1$
(0,2)	$-0,78$	$8,161s^2 - 0,589s - 1$
(1,1)	$10,81s + 0,78$	$14,44s + 1$
(0,1)	$0,78$	$0,5894s + 1$

Tabela 17 – Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s)$ conforme a Tabela 16.

(m,n)	Zeros	Pólos	(m,n)	Zeros	Pólos
(3,4)	$Z_{1,2} = -0,14 \pm 0,24j$ $Z_3 = -5,704$	$P_{1,2} = -0,48 \pm 0,39j$ $P_3 = 14,29$ $P_4 = -0,56$	$G_p(s)$	$Z_1 = -0,266$	$P_1 = -5$; $P_2 = -4$ $P_3 = -1$
(2,4)	$Z_{1,2} = -0,14 \pm 0,24j$	$P_{1,2} = -0,5 \pm 0,389j$ $P_3 = -0,58$ $P_4 = 5,31$	(0,3)	não possui zero	$P_{1,2} = 0,2 \pm 0,2j$ $P_3 = -0,24$
(1,4)	$Z_1 = -0,0465$	$P_{1,2} = 0,28 \pm 0,28j$ $P_3 = -0,24$ $P_4 = -0,04$	(2,2)	$Z_{1,2} = 0,1 \pm 0,2j$	$P_{1,2} = -0,29 \pm 0,2j$
(0,4)	não possui zero	$P_{1,2} = 0,27 \pm 0,25j$ $P_3 = -1,77$ $P_4 = -0,25$	(1,2)	$Z_1 = -0,34$	$P_1 = 0,75$ $P_2 = -0,2$
(3,3)	$Z_{1,2} = 0,14 \pm 0,24j$ $Z_3 = -3,45$	$P_{1,2} = -0,47 \pm 0,39j$ $P_3 = -0,55$	(0,2)	não possui zero	$P_1 = 0,38$ $P_2 = -0,31$
(2,3)	$Z_{1,2} = -0,14 \pm 0,2j$	$P_{1,2} = -0,49 \pm 0,25j$ $P_3 = -1,17$	(1,1)	$Z_1 = -0,07$	$P_1 = -0,69$
(1,3)	$Z_1 = 1,48$	$P_{1,2} = 0,27 \pm 0,24j$ $P_3 = -0,25$	(0,1)	não possui zero	$P_1 = -1,69$

Considerou-se que ocorreu cancelamento entre o pólo e o zero na FT identificada de ordem 1 com um zero.

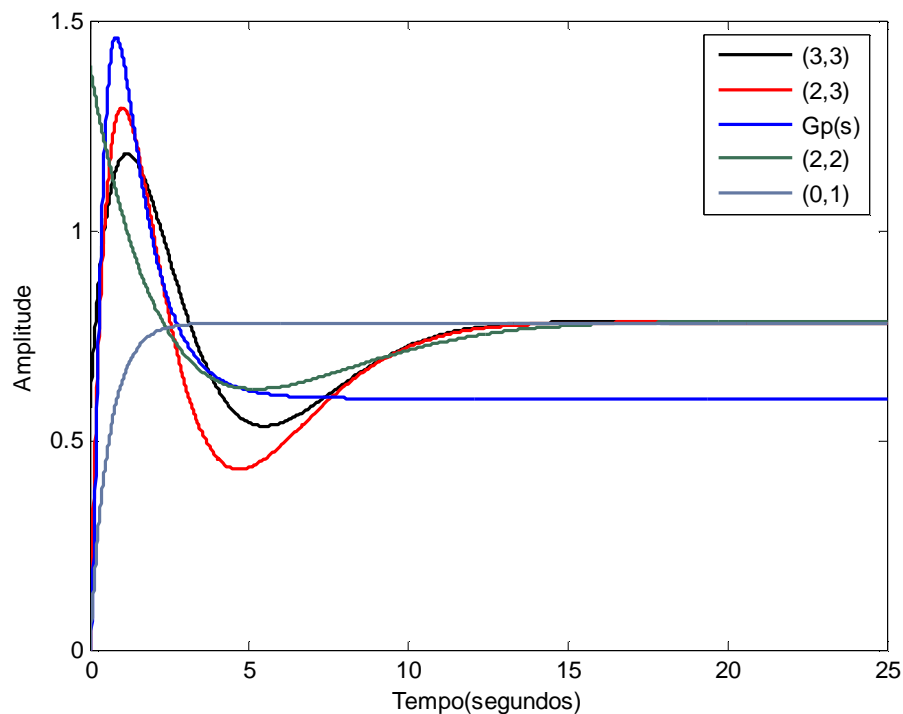


Figura 36 – Resposta ao degrau das FT's estáveis identificadas pelo método proposto por Kosaka considerando-se o ruído branco.

Note que o regime permanente apresenta uma diferença considerável quando compara-se a FT da planta com as funções identificadas com o método proposto por Kosaka.

Simulação 10 Ainda considerando a FT da simulação 9, tem-se

$$G_p(s+1) = \frac{0,75s + 0,95}{0,0167s^3 + 0,2167s^2 + 0,8667s + 1}.$$

Considere adicionalmente o ruído branco com potência em 10^{-3} (Tabelas 18-19 e Figuras 37a-37b) e ruído branco com potência em 10^{-2} (Tabelas 20-21 e Figuras 38a-38b), tempo de amostragem do ruído de 0,01 segundos e tempo de simulação de 10 segundos e a constante $a = 1$ na utilização do procedimento proposto para FT's instáveis. Para a comparação do erro entre o procedimento proposto para FT's instáveis e o método proposto por Kosaka (2005) ver Tabela 22.

Tabela 18 - Resultados encontrados na presença de ruído branco com potência de 0,001 utilizando o método proposto para FT's instáveis e $a = 1$.

(m,n)	Numerador	Denominador
(3,4)	$0,1294s^3 - 0,5847s^2 - 1,798s - 0,955$	$0,02978s^4 - 0,09202s^3 - 0,8879s^2 - 1,94s - 1$
(2,4)	$1,041s^2 + 2,13s - 0,955$	$0,01616s^4 + 0,3125s^3 + 1,387s^2 + 2,291s + 1$
(1,4)	$-0,8579s - 0,955$	$0,009019s^4 - 0,03178s^3 - 0,2157s^2 - 0,9593s - 1$
(0,4)	$0,955$	$0,09224s^4 - 0,1127s^3 + 0,1609s^2 + 0,06101s + 1$
(3,3)	$0,0455s^3 - 0,8803s^2 - 2,013s - 0,955$	$-0,2349s^3 - 1,211s^2 - 2,169s - 1$
(2,3)	$0,3728s^2 + 1,313s + 0,955$	$0,1323s^3 + 0,6351s^2 + 1,436s + 1$
(1,3)	$0,7815s + 0,955$	$0,01891s^3 + 0,2108s^2 + 0,8793s + 1$
$G_p(s+a)$	$0,75s + 0,95$	$0,0167s^3 + 0,2167s^2 + 0,8667s + 1$
(0,3)	$-0,955$	$0,1127s^3 - 0,1609s^2 - 0,06101s - 1$
(2,2)	$-0,06215s^2 + 0,6928s + 0,955$	$0,1401s^2 + 0,7864s + 1$
(1,2)	$0,6693s + 0,955$	$0,2036s^2 + 0,7617s + 1$
(0,2)	$0,955$	$0,1609s^2 + 0,06101 + 1$
(1,1)	$2,519s - 0,955$	$2,576s - 1$
(0,1)	$0,955$	$0,06101s + 1$

Tabela 19 – Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s+a)$ conforme a Tabela 18.

(m,n)	Zeros	Pólos	(m,n)	Zeros	Pólos
(3,4)	$Z_1= 6,74$ $Z_2=1,487$ $Z_3= - 0,735$	$P_{1,2}= -2,05 \pm 1,21j$ $P_3=7,944;P_4=-0,74$	$G_p(s+a)$	$Z_1=-1,266$	$P_1= -6 ;P_2= -5$ $P_3= -2$
(2,4)	$Z_1=-1,382$ $Z_2=-0,663$	$P_{1,2}= -2,4 \pm 0,959j$ $P_3=-13,86;P_4=-0,66$	(0,3)	não possui zero	$P_{1,2}= -0,67 \pm 1,65j$ $P_3= 2,774$
(1,4)	$Z_1= -1,113$	$P_{1,2}=-1,677 \pm 2,7j$ $P_3= 8,212;P_4= -1,33$	(2,2)	$Z_1= 12,38$ $Z_2 = -1,24$	$P_1= -3,668$ $P_2= -1,946$
(0,4)	não possui zero	$P_{1,2}= 1,48 \pm 1,51j$ $P_{1,2}= -0,87 \pm 1,28j$	(1,2)	$Z_1= -1,427$	$P_{1,2}= -1,87 \pm 1,18j$
(3,3)	$Z_1=21,443$ $Z_2 = -1,417$ $Z_3= - 0,69$	$P_{1,2}= -2,23 \pm 1,07j$ $P_3= -0,693$	(0,2)	não possui zero	$P_{1,2}= -0,189 \pm 2,48j$
(2,3)	$Z_1= -2,497$ $Z_2 = -1,025$	$P_{1,2}=-1,83 \pm 1,82j$ $P_3= -1,124$	(1,1)	$Z_1= 0,379$	$P_1= 0,3882$
(1,3)	$Z_1= -1,222$	$P_{1,2}=-4,69 \pm 2,81j$ $P_3= -1,767$	(0,1)	não possui zero	$P_1= -16,39$

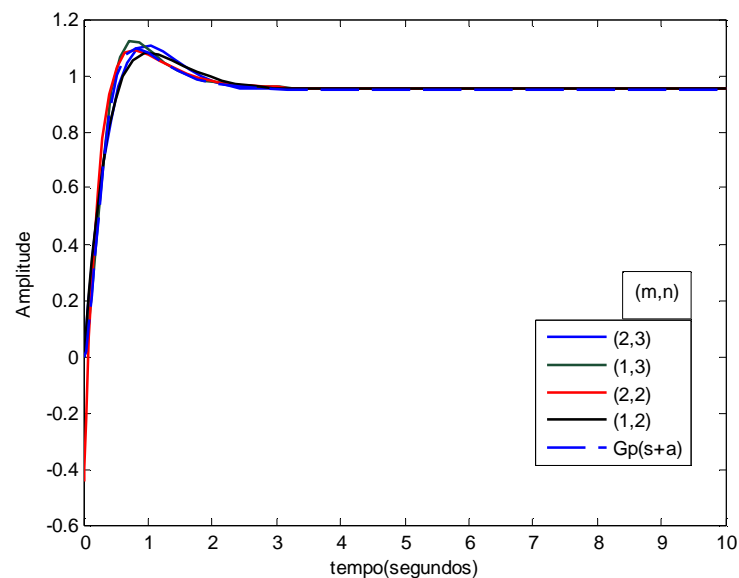


Figura 37a - Resposta ao degrau das FT's estáveis com pelo menos um zero e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-3} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis.

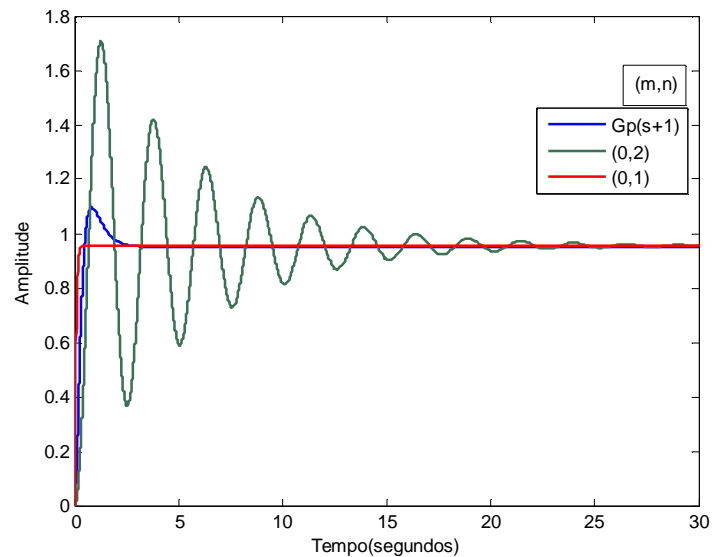


Figura 37b - Resposta ao degrau das FT's estáveis com numerador constante e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-3} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis.

Note que as FT's estimadas com o método generalizado proposto para funções instáveis apresentam um comportamento em regime praticamente idêntico ao comportamento em regime da função de transferência $G_p(s+a)$ (Figura 37a). Na Figura 37b são mostradas as funções de transferência de ordem reduzida com ordem 2 e ordem 1, ambas com numerador constante (sem zeros), observando que a FT identificada de ordem 2 apresenta um tempo de estabelecimento muito superior ao tempo de estabelecimento de $G_p(s+a)$ e das FT's estimadas que apresentam no mínimo um zero (Figura 37a), devendo ser descartada como modelo da planta, pois não apresenta comportamento dinâmico parecido ao comportamento dinâmico de $G_p(s+a)$. Dessa forma, o tempo de estabelecimento foi usado para separar em duas figuras as funções identificadas conforme as Tabelas 18-19. Para ruído branco com potência 10^{-2} e período de amostragem 0,01 segundos, conferir Tabelas 20 e 21 e Figuras 38a e 38b.

Tabela 20 – Resultados encontrados na presença de ruído branco com potência 10^{-2} utilizando o método proposto para FT's instáveis e $a = 1$ na simulação 10.

(m,n)	Numerador	Denominador
(3,4)	$0,5903s^3 + 1,672s^2 + 1,758s + 0,9662$	$0,1783s^4 + 0,852s^3 + 1,95s^2 + 1,847s + 1$
(2,4)	$0,7102s^2 + 1,627s - 0,9662$	$0,008177s^4 + 0,1914s^3 + 0,95s^2 + 1,711s + 1$
(1,4)	$0,562s + 0,9662$	$0,009773s^4 - 0,01592s^3 + 0,1858s^2 + 0,609s + 1$
(0,4)	$0,9662$	$0,07651s^4 - 0,1147s^3 + 0,1699s^2 + 0,02733s + 1$
(3,3)	$0,02837s^3 - 0,664s^2 - 1,621s - 0,9662$	$-0,1596s^3 - 0,903s^2 - 1,705s - 1$
(2,3)	$4,348s^2 + 7,082s + 0,9662$	$1,253s^3 + 4,871s^2 + 7,358s + 1$
(1,3)	$-0,6443s - 0,9662$	$0,001448s^3 - 0,1881s^2 - 0,6942s - 1$
$G_p(s+1)$	$0,75s + 0,95$	$0,0167s^3 + 0,2167s^2 + 0,8667s + 1$
(0,3)	$-0,9662$	$0,1147s^3 - 0,1699s^2 - 0,02733s - 1$
(2,2)	$0,005018s^2 + 0,6518s + 0,9662$	$0,1935s^2 + 0,7019s + 1$
(1,2)	$0,6526s + 0,9662$	$0,1883s^2 + 0,7027s + 1$
(0,2)	$0,9662$	$0,1699s^2 + 0,0273s + 1$
(1,1)	$6,004s - 0,9662$	$6,187s - 1$
(0,1)	$0,9662$	$0,0273s + 1$

Tabela 21 – Pólos e zeros das FT's identificadas $G_e(s+a)$ conforme a Tabela 20.

(m,n)	Zeros	Pólos	(m,n)	Zeros	Pólos
(3,4)	$Z_{1,2}=-0,6 \pm 0,8j$ $Z_3 = -1,61$	$P_{1,2}=-1,7 \pm 1,5j$ $P_{3,4}=-0,6 \pm 0,7j$	$G_p(s+a)$	$Z_1=-1,266$	$P_1 = -6; P_2 = -5$ $P_3 = -2 ;$
(2,4)	$Z_{1,2}=-1,1 \pm 0,2j$	$P_{1,2}=-2,4 \pm 0,1j$ $P_3=-17,3$ $P_4=-1,2$	(0,3)	não possui zero	$P_{1,2} = -0,626 \pm 1,671j$ $P_3 = 2,733$
(1,4)	$Z_1=-1,719$	$P_{1,2}=2,224 \pm 4,7j$ $P_{3,4}=-1,4 \pm 1,29j$	(2,2)	$Z_1=-128,3$ $Z_2 = -1,49$	$P_{1,2} = -1,81 \pm 1,37j$
(0,4)	não possui zero	$P_{1,2}=1,59 \pm 1,58j$ $P_{3,4}=-0,8 \pm 1,36j$	(1,2)	$Z_1 = -1,48$	$P_{1,2} = -1,86 \pm 1,35j$
(3,3)	$Z_{1,2}=-1,1 \pm 0,1j$ $Z_3 = 25,628$	$P_{1,2} -2,2 \pm 0,67j$ $P_3 = -1,11$	(0,2)	não possui zero	$P_{1,2} = -0,08 \pm 2,42j$
(2,3)	$Z_1=-1,478$ $Z_2 = -0,15$	$P_{1,2}=-1,86 \pm 1,3j$ $P_3 = -0,15$	(1,1)	$Z_1 = 0,16$	$P_1 = 0,16$
(1,3)	$Z_1 = -1,49$	$P_{1,2}=-1,81 \pm 1,3j$ $P_3 = 135,5$	(0,1)	não possui zero	$P_1 = -36,58$

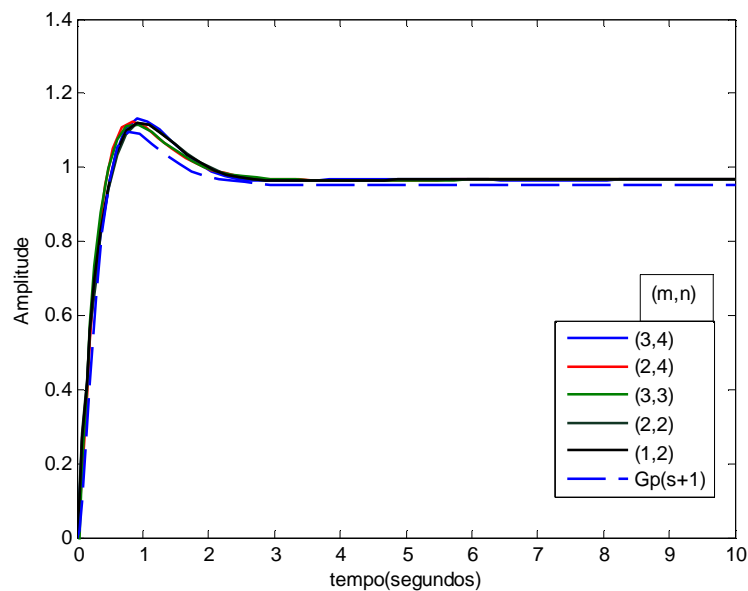


Figura 38a - Resposta ao degrau das FT's estáveis com pelo menos um zero e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-2} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis.

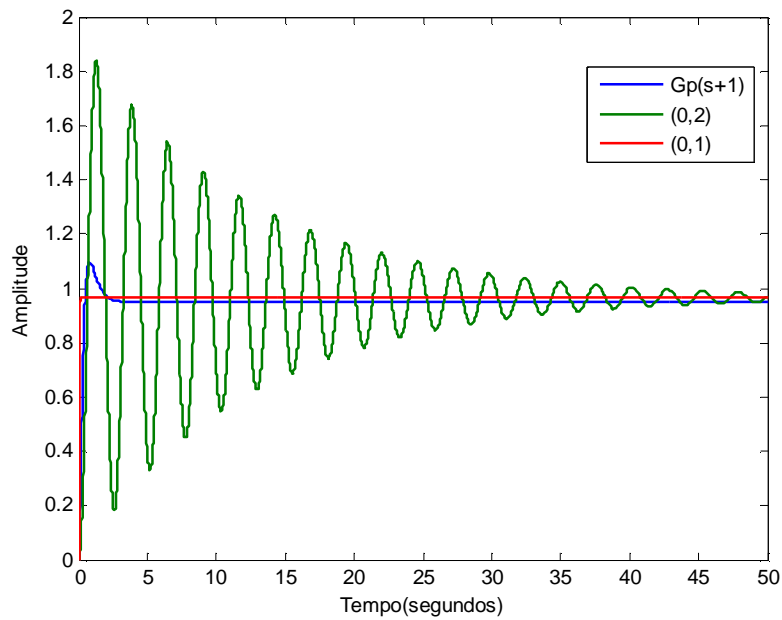


Figura38b - Resposta ao degrau das FT's estáveis com numerador constante e considerando-se o ruído branco com potência 10^{-2} identificadas pelo método generalizado proposto para funções instáveis.

Note que apesar do aumento do ruído, o procedimento adotado para a estimação dos parâmetros de funções instáveis utilizado na FT estável da simulação 10 ainda apresenta um conjunto de FT's cuja resposta ao degrau aproxima-se da resposta ao degrau de $G_p(s+a)$ (Figura 38a). Observe também que, como no caso anterior, a FT identificada com ordem 2 e com numerador constante apresenta um tempo de estabelecimento muito superior ao tempo de estabelecimento de $G_p(s+a)$ (Figura 38b). Portanto esse modelo identificado deve ser descartado, pois não apresenta comportamento dinâmico semelhante ao comportamento dinâmico de $G_p(s+a)$.

Tabela 22- Erro na resposta ao degrau das funções de transferência das simulações 9 e 10.

(m,n)	Método ^a	Ruído ^b	Erro	(m,n)	Método	Ruído	Erro
(3,4)	K	0,001	instável	(0,3)	K	0,001	instável
(3,4)	G	0,001	instável	(0,3)	G	0,001	instável
(3,4)	G	0,01	$8 \cdot 10^{-4}$	(0,3)	G	0,01	instável
(2,4)	K	0,001	instável	(2,2)	K	0,001	$3,6 \cdot 10^{-2}$
(2,4)	G	0,001	cancelamento	(2,2)	G	0,001	$8,9 \cdot 10^{-4}$
(2,4)	G	0,01	$6,7 \cdot 10^{-4}$	(2,2)	G	0,01	$9 \cdot 10^{-4}$
(1,4)	K	0,001	cancelamento	(1,2)	K	0,001	instável
(1,4)	G	0,001	instável	(1,2)	G	0,001	$4,9 \cdot 10^{-4}$
(1,4)	G	0,01	instável	(1,2)	G	0,01	$8,4 \cdot 10^{-4}$
(0,4)	K	0,001	instável	(0,2)	K	0,001	instável
(0,4)	G	0,001	instável	(0,2)	G	0,001	$3 \cdot 10^{-2}$
(0,4)	G	0,01	instável	(0,2)	G	0,01	$8,4 \cdot 10^{-2}$
(3,3)	K	0,001	$2,6 \cdot 10^{-2}$	(1,1)	K	0,001	cancelamento
(3,3)	G	0,001	cancelamento	(1,1)	G	0,001	instável
(3,3)	G	0,01	$8,5 \cdot 10^{-4}$	(1,1)	G	0,01	cancelamento
(2,3)	K	0,001	$2,3 \cdot 10^{-2}$	(0,1)	K	0,001	$5,2 \cdot 10^{-2}$
(2,3)	G	0,001	$3,5 \cdot 10^{-4}$	(0,1)	G	0,001	$8,6 \cdot 10^{-3}$
(2,3)	G	0,01	cancelamento	(0,1)	G	0,01	$1,2 \cdot 10^{-2}$
(1,3)	K	0,001	instável				
(1,3)	G	0,001	$1,4 \cdot 10^{-4}$				
(1,3)	G	0,01	instável				

^a k denota a utilização do método proposto por Kosaka e G o método generalizado proposto para FT's instáveis e ^b refere-se à configuração da potência do ruído.

Note que o método proposto por Kosaka (2005) é inviável na maioria das FT's identificadas, pois resultou em FT's instáveis ou com cancelamento de pólos e zeros. O

procedimento adotado para FT's instáveis (mesmo utilizado numa função de transferência estável) alcançou melhores resultados. Outras comparações (simulações 11.1-11.3), (Tabela 23) entre o método proposto por Kosaka (2005) e o procedimento proposto para FT's instáveis, ambos utilizados em FT's estáveis e com ruído branco somado na saída da planta podem ser conferidas nas Figuras 39-41, observando-se apenas que adotou-se $a = 1$ e que as curvas identificadas com "A" representam ruído branco com potência 10^{-4} , "B" representam ruído com potência 10^{-3} . Em alguns casos não foi possível encontrar uma função estável com potência do ruído configurado para 10^{-3} (simulações 11.1 e 11.2 com o procedimento proposto por Kosaka (Tabela 23)) e também para potência de ruído configurado para 10^{-4} (simulação 11.2 utilizando o método proposto por Kosaka (2005)). Para tempo de amostragem do ruído e tempo de simulação ver Apêndice B.

Tabela 23 – Comparação entre o método proposto por Kosaka e o procedimento adotado para funções de transferência instáveis utilizado para FT's estáveis.

simulação		Método ⁴	Ruído	Numerador	Denominador
-	$G_p(s)$	-	-	$0,5s+1,5$	$0,5s^3+1,5s^2+2s+1$
11.1	$G_e(s)$	K	10^{-4}	$1,144s+1,517$	$1,195s^3+2,006s^2+2,499s+1$
11.1	$G_e(s)$	K	10^{-3}	-	-
11.1	$G_p(s+a)$	-	-	$0,1s+0,4s$	$0,1s^3+0,6s^2+1,3s+1$
11.1	$G_e(s+a)$	G	10^{-4}	$0,102s+0,3999$	$0,1327s^3+0,6407s^2+1,324s+1$
11.1	$G_e(s+a)$	G	10^{-3}	$0,031s+0,3996$	$0,1186s^3+0,5279s^2+1,185s+1$
-	$G_p(s)$	-	-	$0,235s+0,235$	$0,235s^2+0,235s+1$
11.2	$G_e(s)$	K	10^{-4}	-	-
11.2	$G_e(s)$	K	10^{-3}	-	-
11.2	$G_p(s+a)$	-	-	$0,16s+0,32$	$0,16s^2+0,48s+1$
11.2	$G_e(s+a)$	G	10^{-4}	$0,1777s+0,3216$	$0,1602s^2+0,5176s+1$
11.2	$G_e(s+a)$	P	10^{-3}	$0,134s+0,3196$	$0,1692s^2+0,4718s+1$
-	$G_p(s)$	-	-	$0,25s+0,25$	$0,25s+1$
11.3	$G_e(s)$	K	10^{-4}	$1,443s+0,1944$	$3,746s+1$
11.3	$G_e(s)$	K	10^{-3}	$1,703s+0,2987$	$6,776s+1$
11.3	$G_p(s+a)$	-	-	$0,2s+0,4$	$0,2s+0,1$
11.3	$G_e(s+a)$	G	10^{-4}	$0,2123s+0,4016$	$0,2176s+1$
11.3	$G_e(s+a)$	G	10^{-3}	$0,2315s+0,4051$	$0,2376s+1$

⁴ "K" representa os resultados obtidos utilizando-se o método proposto por Kosaka (2005) e "G" o método generalizado proposto para FT's instáveis.

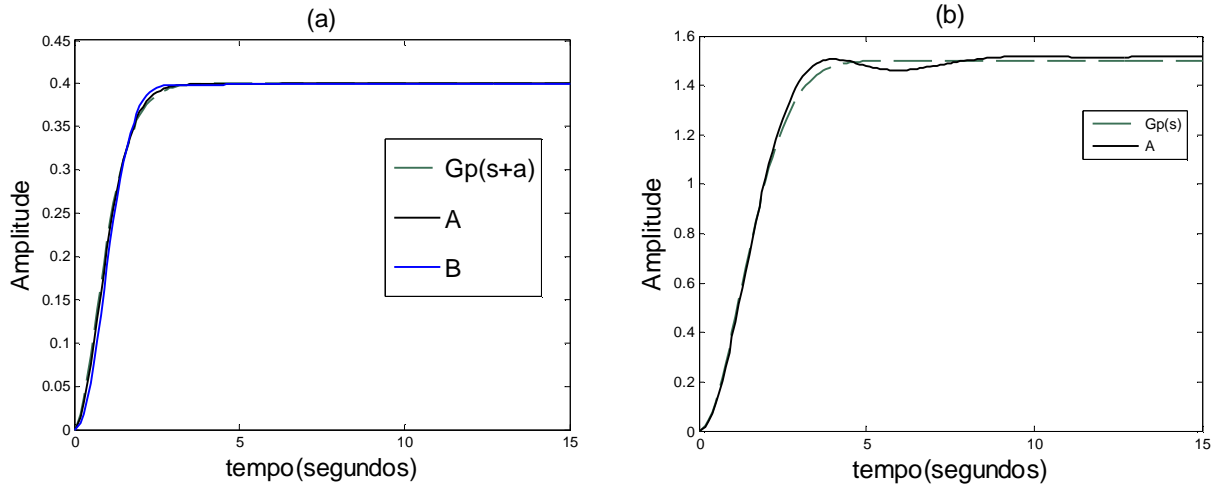


Figura 39 – Comparação da resposta ao degrau entre as FT's identificadas pelo método generalizado proposto para FT's instáveis (a) e as FT's identificadas pelo método proposto por Kosaka (b) na simulação 11.1.

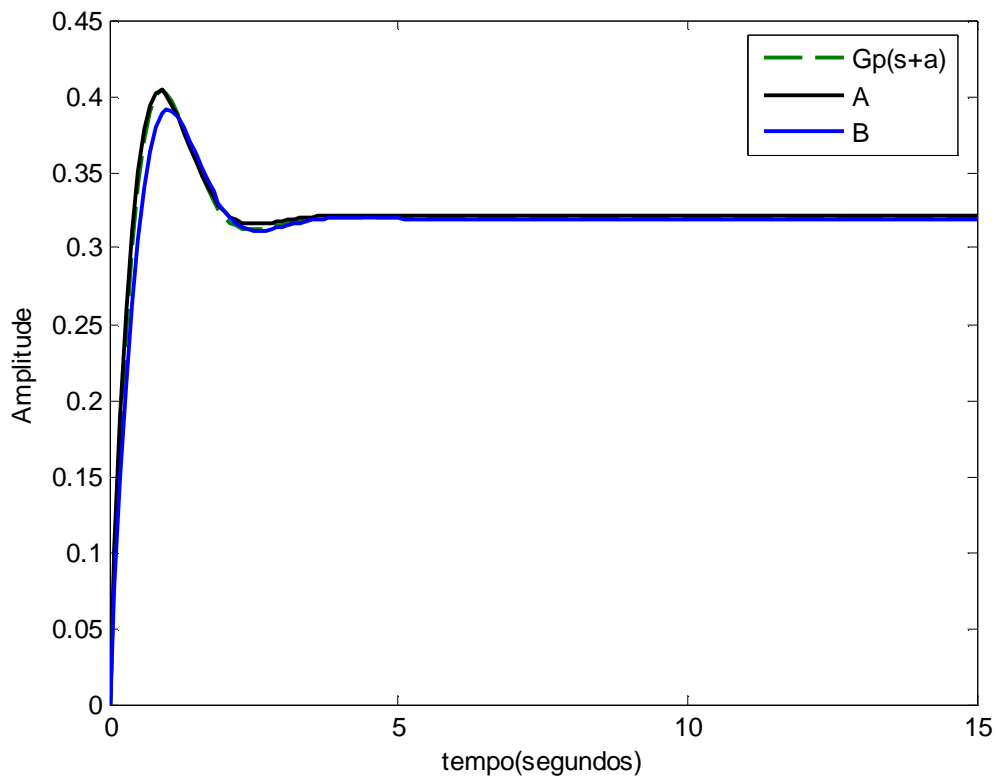


Figura 40 - Resposta ao degrau das FT's identificadas pelo procedimento adotado para FT's instáveis na simulação 11.2 com ruído somado à saída da planta.

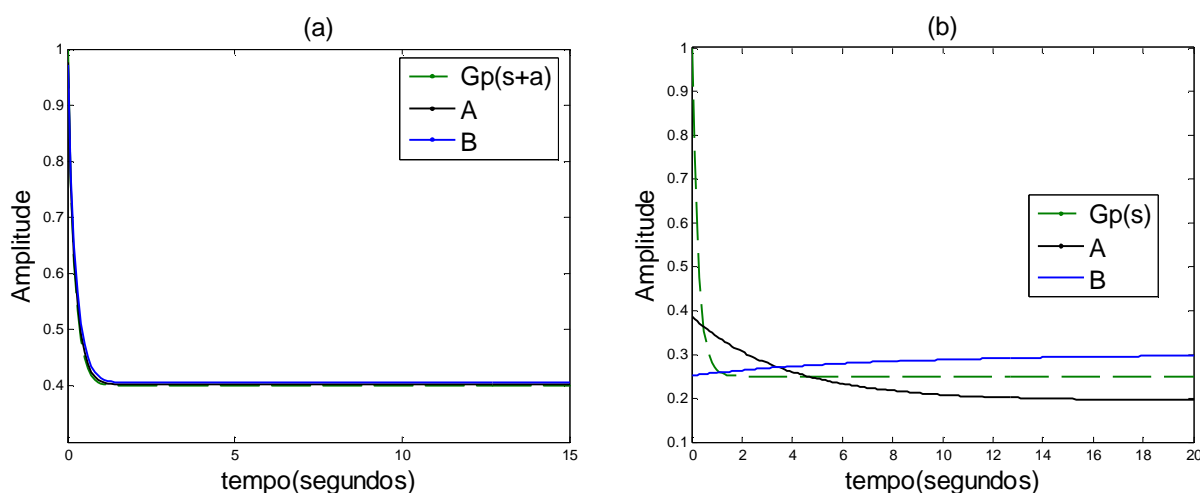


Figura 41 - Comparação da resposta ao degrau entre as FT's identificadas pelo método generalizado proposto para FT's instáveis (a) e as FT's identificadas pelo método proposto por Kosaka (b) na simulação 11.3.

Note que os resultados são melhores utilizando-se o procedimento proposto para funções instáveis na comparação com o método proposto por Kosaka (2005). Para os parâmetros estimados utilizando-se o método proposto por Kosaka (2005), foi adotado o tempo de simulação que resultava no valor de $G(0)$ mais próximo do valor de $G(0)$ da planta (nas simulações 11.1 e 11.3 o tempo de simulação foi de 9.7 segundos e na simulação 11.2 tentou-se vários tempos-9.3 segundos, 9.4 segundos, 9.7 segundos, sendo que nenhum deles resultou numa FT estável). Para os parâmetros obtidos utilizando-se o procedimento proposto para FT's instáveis, o tempo de simulação foi fixado em 10 segundos, independente do valor $G(a)$ encontrado, ou seja, com a utilização do método proposto por Kosaka foram necessárias várias simulações com o objetivo de encontrar um tempo com o qual se identificava uma FT cuja resposta ao degrau fosse a mais próxima da resposta ao degrau da planta. Para as simulações 11.1-11.3, o tempo de amostragem do ruído foi de 0,001 segundos.

Simulação 12 Considere $G_p(s) = \frac{3}{2s - 5}$,

uma FT instável a ser identificada (Cf. simulação 4 para simulação sem ruído).

Na tabela 24, encontram-se os resultados obtidos e nas Figuras 42a e 42b a resposta ao degrau, utilizando-se alguns valores de “a”.

Tabela 24 – Erro na resposta ao degrau das funções de transferência identificadas ($G_e(s+a)$) utilizando diversas constantes “a” na simulação 12.

	Potência do ruído	Numerador	Denominador	Pólos	Erro
$G_p(s+3)$	-	3	$2s+1$	-0,5	-
$G_e(s+3)$	10^{-4}	2,994	$1,95s+1$	-0,51	$5,4*10^{-5}$
$G_e(s+3)$	10^{-3}	3,008	$1,94s+1$	-0,51	$7,4*10^{-4}$
$G_e(s+3)$	10^{-2}	3,042	$1,888s+1$	-0,52	$1,3*10^{-3}$
$G_p(s+4)$	-	1	$0,66s+1$	-1,5	-
$G_e(s+4)$	10^{-4}	1,008	$0,6601s+1$	-1,51	$6,7*10^{-5}$
$G_e(s+4)$	10^{-3}	1,025	$0,6437s+1$	-1,55	$6,7*10^{-4}$
$G_e(s+4)$	10^{-2}	1,079	$0,5974s+1$	-1,67	$6,7*10^{-3}$
$G_p(s+5)$	-	0,6	$0,4s+1$	-2,5	-
$G_e(s+5)$	10^{-4}	0,6102	$0,393s+1$	-2,54	$1,04*10^{-4}$
$G_e(s+5)$	10^{-3}	0,6318	$0,372s+1$	-2,68	$1,05*10^{-3}$
$G_e(s+5)$	10^{-2}	0,7001	$0,3138s+1$	-3,18	$1,05*10^{-2}$
$G_p(s+6)$	-	0,428	$0,2857s+1$	-3,5	-
$G_e(s+6)$	10^{-4}	0,4411	$0,277s+1$	-3,6	$1,7*10^{-4}$
$G_e(s+6)$	10^{-3}	0,4677	$0,2499s+1$	-4	$1,6*10^{-3}$
$G_e(s+6)$	10^{-2}	0,5518	$0,181s+1$	-5,52	$1,6*10^{-2}$
$G_p(s+10)$	-	0,2	$0,133s+1$	-7,5	-
$G_e(s+10)$	10^{-4}	0,2223	$0,112s+1$	-8,8	$5,06*10^{-4}$
$G_e(s+10)$	10^{-3}	0,2702	$0,075s+1$	-13,2	$5,03*10^{-3}$
$G_e(s+10)$	10^{-2}	0,4217	$0,009172s+1$	-109	$5,03*10^{-2}$

Note que os melhores resultados são obtidos com $a = 3$ e 4 (a constante que torna a nova saída estável é $a > 2,5$), observando que o erro torna-se maior quando aumenta-se a constante utilizada. Para a resposta ao degrau (Figuras 42a-42b) onde “A” representa ruído branco com potência 10^{-4} , “B” representa potência 10^{-3} e “C” representa potência 10^{-2} . O *sample time* (período de amostragem) é de 0,01 segundos.

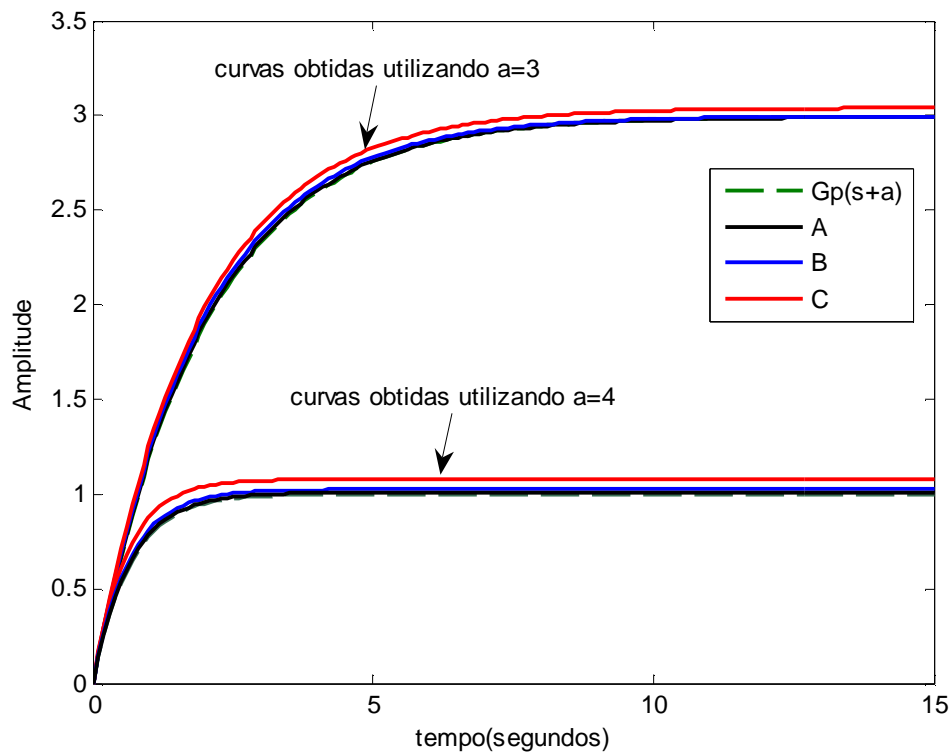


Figura 42a- Resposta ao degrau das FT's identificadas pelo método generalizado proposto utilizando $a = 3$ e $a = 4$ com ruído na saída da planta.

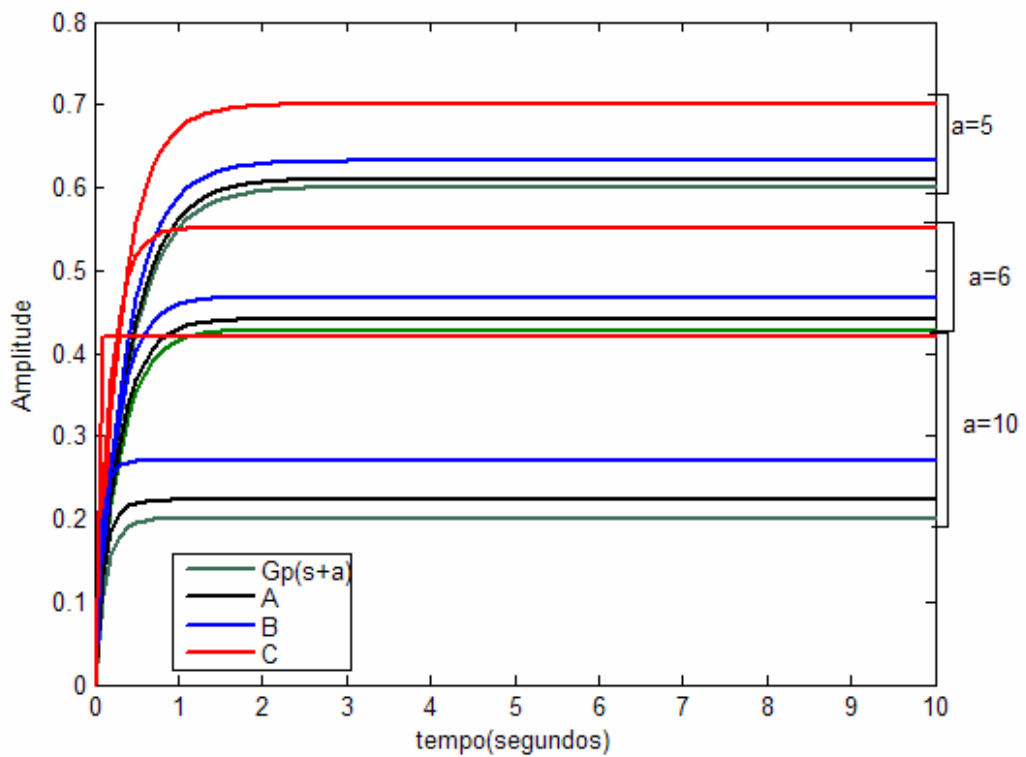


Figura 42b – Resposta ao degrau das FT's identificadas pelo método generalizado proposto utilizando $a = 5$, $a = 6$ e $a = 10$ com ruído na saída da planta.

Note que os melhores resultados são obtidos com $a = 3$ e 4 (Figura 42a) e a constante que torna a nova saída estável é $a > 2,5$, observando que o erro torna-se maior quando aumenta-se a constante utilizada.

3.2.5 Conclusões

Segundo as simulações 1-2, o método proposto por Kosaka (2005) mostra-se eficaz mesmo desconsiderando-se o erro ocorrido entre o valor observado e o valor esperado, ou seja, tratando-o como um método determinístico. Conforme a simulação 2, o conhecimento da ordem da planta não é uma informação importante, pois, mesmo aplicando o método sem a informação referente à ordem da planta, identificaram-se curvas de diversas ordens (algumas com ordem superior e outras com ordem inferior) que apresentam uma resposta ao degrau muito próxima à resposta ao degrau da planta. Portanto, ao escolher um modelo entre os diversos identificados, deve-se priorizar a finalidade do modelo. O método mostra-se também eficiente em identificar modelos reduzidos da FT da planta obtendo resultados mais satisfatórios com relação à resposta ao degrau quando comparado com o método de retenção do(s) pólo(s) mais lento(s) da função de transferência da planta (Cf. figura 15).

Para as simulações 3 e 4, com sistemas instáveis, o método (agora generalizado para FT's instáveis) também conseguiu bons resultados quando se comparou a resposta ao degrau da função de transferência ($G_p(s + a)$) com a resposta ao degrau da FT identificada pelo método generalizado proposto ($G_e(s + a)$) (Cf. figuras 17, 18 e 20).

Para a simulação 5 (que trata-se, na verdade, de uma implementação prática), segundo afirma Cândido(2005, conclusão): *“Este método de identificação mostrou ser muito favorável por proporcionar um erro praticamente desprezível na identificação da função de transferência ”*. Nesta simulação, adotou-se para a ordem da função de transferência um modelo genérico para motores de corrente contínua. A resposta ao degrau do modelo identificado é muito semelhante à resposta ao degrau da planta. Uma questão importante é o valor adotado da constante “ a ” para que o sinal de $G(s+a)/(s+a)$ tenda a zero. Se esse valor for muito pequeno, será necessário um intervalo de tempo demasiadamente grande. Por outro lado, se o valor de “ a ” for muito maior do que a menor constante que faz o sinal de $G(s+a)/(s+a)$ tender a zero, informações importantes para a identificação do modelo podem

estar sendo desprezadas, como visto na simulação 6, na qual as constantes 2, 3 e 5 originaram modelos inadequados para a planta.

Na comparação entre o método proposto por Kosaka (2005) e a generalização do método proposta para funções instáveis utilizado em funções estáveis, realizada nas simulações 6 e 7, os resultados mostraram que os dois procedimentos estimam modelos com uma boa eficácia. Portanto, o procedimento proposto para FT's instáveis pode ser utilizado também em sistemas com funções de transferência estáveis.

Quando foi introduzido um ruído (branco) na planta, o método proposto por Kosaka (2005), como ilustrado nas simulações 8, 9 e 11.1-11.3 e evidenciado nas Tabelas 15, 22 e 23, mostrou alguns resultados insatisfatórios. O método generalizado proposto para funções de transferência instáveis apresentou bons resultados nas simulações 8, 10 e 11.1-11.3 e, para a simulação 12, com uma função instável, o resultado também foi satisfatório. Esse resultado deve-se, principalmente, porque a constante “ a ” utilizada no método generalizado proposto também atenua o ruído, fazendo com que o mesmo tenda a zero, como ilustra a Figura 43, onde nota-se que o sinal “1” obtido com a utilização do procedimento proposto para FT's instáveis na simulação 9 tem o ruído atenuado com o tempo. Por outro lado, o sinal “2” obtido com o método proposto por Kosaka (2005) é afetado pelo ruído durante todo o tempo de simulação. Isso fez com que fossem necessárias várias simulações quando utilizou-se o método proposto por Kosaka (2005), sendo que o tempo de simulação utilizado foi aquele com o qual obtinha-se o valor de $G(0)$ mais próximo do valor (conhecido) de $G(0)$ da planta. Já o tempo de simulação utilizado no método generalizado proposto para funções instáveis foi fixo em 10 segundos.

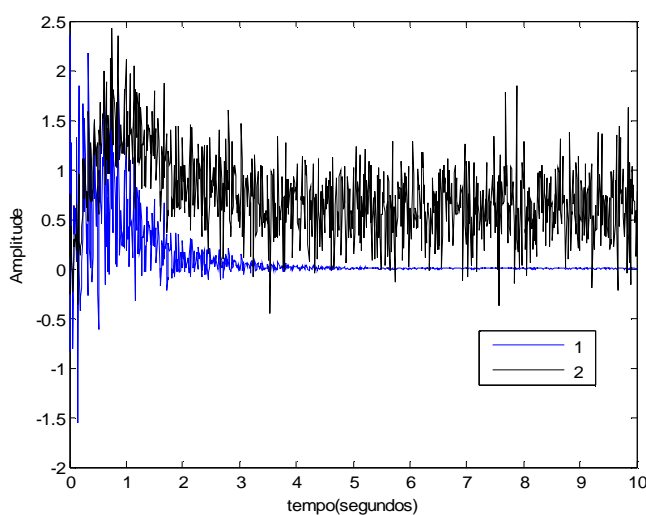


Figura 43 – Sinais com ruído branco somado à saída da planta.

3.3 Conclusão Geral

Neste trabalho é realizado o estudo e a implementação de um diagrama de blocos de um método para a identificação de funções de transferência estáveis, proposto por Kosaka (2005) e baseado na interpretação dos dados referentes à entrada e saída do sistema, onde a entrada é um degrau unitário.

As simulações realizadas por meio do ambiente *Simulink* do *Matlab* mostraram a eficácia do método através de comparações entre os parâmetros de uma função de transferência conhecida e os parâmetros estimados pelo método e também através de comparações entre as respostas ao degrau das funções de transferência da planta e da função de transferência identificada.

O método proposto por Kosaka (2005) consegue estimar os parâmetros de uma função de transferência de ordem reduzida $R(s)$ que apresenta uma resposta ao degrau muito próxima quando comparada à resposta ao degrau da planta. O método ainda mostra-se eficiente quando não há a disponibilidade referente à ordem do sistema e deseja-se uma função de transferência de ordem inferior à ordem da planta, observando-se apenas que, quando a planta possuir ordem muito elevada, a adoção de uma função de transferência estimada com ordem muito inferior pode não ser uma boa escolha, visto que uma função de transferência de ordem muito inferior, geralmente, não apresenta comportamento dinâmico muito parecido ao comportamento dinâmico da função de transferência da planta. Por outro lado, no caso da planta real possuir uma baixa ordem e supor-se que o sistema possua ordem muito acima, ocorrerá a um cancelamento de pólos e zeros, ou, pelo menos, a identificação de funções de transferência com proximidade entre pólos e zeros.

Outro resultado importante é a aplicação do método também para sistemas instáveis e que não foi abordado por Kosaka. Para modelos instáveis propõe-se um procedimento que consiste na multiplicação, no domínio do tempo, da função de transferência instável por uma função exponencial do tipo e^{-at} , onde $a > 0$ e suficientemente grande para que uma nova saída seja estável e seja aplicado, dessa forma, o método estudado e proposto por Kosaka.

As simulações com funções de transferência instáveis também apresentaram bons resultados, ainda considerando o método como sendo um método determinístico.

O método generalizado e proposto para funções de transferência instáveis, nas simulações com ruído (branco) na saída da planta, mostrou melhores resultados quando comparado ao método originalmente proposto por Kosaka (2005). Este resultado deve-se ao

fato de que a função exponencial (no tempo) do tipo e^{-at} também atenua o ruído do sinal. Os resultados das simulações mostraram que deve haver um critério na escolha da constante “ a ” de modo que, se for escolhida uma constante muito próxima (pouco maior) que a menor constante que estabiliza a nova saída, será necessário um longo tempo de simulação, e.g. se a menor constante necessária para estabilizar a nova saída for $a = 2$ e adotar-se $a = 2,1$ ou $2,2$. Por outro lado, nas simulações em que se adotou uma constante “ a ” muito maior do que a menor constante que estabiliza a nova saída ocorreu uma “perda” de informações da planta, pois o sinal tende a zero muito rapidamente. O método generalizado também mostrou-se aplicável em funções de transferência estáveis obtendo resultados similares ao método proposto por Kosaka (2005).

Um possível projeto para o futuro dessa pesquisa é a análise do erro que ocorre na coleta de dados na observação de sistemas reais, novas configurações na presença de ruídos, como a troca de e^{-at} por $e^{-at}sen(\omega t)$, o desenvolvimento de um método que encontre apenas modelos reduzidos estáveis e também uma aplicação para sistemas com várias entradas e várias saídas (MIMO- *multi input-multi output*) e para sistemas discretos no tempo, entre outros.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Belo Horizonte: UFMG, 2000. 554p.

BARNETT, S. *Matrices Methods and Applications*. Clarendon: Oxford University Press, 1996. 450p.

CÂNDIDO, A. S. *Controle de um carro (protótipo) empregando como sensor um transdutor ultra-sônico(sonar)*. Ilha Solteira: UNESP/FE, 2007. 47p. (Relatório de estágio extracurricular).

CHEN, C. T. . *Linear System Theory and Design*. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p.

KOSAKA M.; UDA H.; BAMBA E.; SHIBATA H. Dynamic system identification using a step input. *Journal of Low Frequency Noise Vibration And Active Control*, [S.I.]:v. 24, n. 2, p.125-134, 2005.

LANDAU, I. D.. *System Identification and Control Design using P.I.M + software*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1990. 253p.

LIMA, E. L.. *Álgebra Linear*. 5ª ed.. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001. 357p.

MATSUMOTO, É. Y. *Simulink 5: fundamentos*. São Paulo: Editora Érica, 2003. 204p.

MATSUMOTO, É. Y.. *Matlab 6.5: fundamentos de programação*. São Paulo: Editora Érica, 2002. 342p.

OGATA K.. *Engenharia de Controle Moderno*, 3.ed. Rio de Janeiro: LTC , 1998. 812p.

SILVA, D. S. ; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVARADO, F. V. ; ASSUNÇÃO, E., ; GAINO, R. ; CARDIM, R. . Identificação de funções de transferência estáveis utilizando como entrada um degrau. In: SIMPÓSIO REGIONAL DE MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES, 1. SRMAIS, 2007 Ilha Solteira, Ilha Solteira: UNESP/FE, 2007,v. 1, p. 40-43.

YOUNKIN, G. W. *Industrial servo control systems: fundamental and applications*. 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 2003. 375p.

APÊNDICE A

Mínimos Quadrados Um problema freqüente nas ciências experimentais é determinar um valor a desconhecido para um fenômeno descrito por uma função linear $y = ax$. Para tal, atribui-se um valor x_1 à variável x obtendo-se experimentalmente um valor y_1 para y . Repete-se a experiência com valores x_2, \dots, x_n de x e valores correspondentes y_2, \dots, y_n de y . A partir destes dados como obter a melhor aproximação de a ? Para isso são considerados os vetores $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Se Y fosse proporcional a X , tem-se o valor de a . Mas isso não ocorre devido à imprecisão experimental. Para encontrar a' tal que $a'x$ seja o mais próximo de Y deve-se exigir que o vetor $Y - a'X$ tenha norma mínima, o que ocorre quando $Y - a'X$ é ortogonal a X . Logo, a melhor aproximação de a' é dada por

$$\langle a'X - Y, X \rangle = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde \langle, \rangle denota o produto interno usual no espaço vetorial \mathbb{R}^n .

De (A.1), tem-se

$$a' \langle X, X \rangle - \langle Y, X \rangle = 0$$

Portanto

$$a' = \frac{\langle Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle} ,$$

ou seja,

$$a' = \frac{x_1 y_1 + \mathbf{L} + x_n y_n}{x_1^2 + \mathbf{L} + x_n^2} \quad (\text{A.2})$$

Observando que

$$\|a'X - Y\|^2 = \langle a'X - Y, a'X - Y \rangle$$

$$\|a'X - Y\|^2 = (a'x_1 - y_1)^2 + \mathbf{L} + (a'x_n - y_n)^2. \quad (\text{A.3})$$

A expressão em (A.3) é mínima quando a' é dado por (A.2).

Este método é denominado método dos mínimos quadrados.

Teorema do Valor Final (TVF): Se $y(t)$ e $dy(t)/dt$ forem transformáveis por Laplace, se $Y(s)$ for a transformada de Laplace de $y(t)$ e se existe $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s).$$

Para demonstrar o teorema, toma-se o limite quando s tende a zero na expressão da transformada de Laplace da derivada de $y(t)$, ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} y(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s) - y(0)]. \quad (\text{A.4})$$

Como $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$, obtém-se

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} y(t) \right] dt = y(t) \Big|_0^{\infty} = y(\infty) - y(0). \quad (\text{A.5})$$

Igualando-se (A.4) e (A.5), resulta em

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s).$$

O TVF relaciona o comportamento de regime estacionário de $y(t)$ ao comportamento de $sY(s)$ nas vizinhanças de $s = 0$. Assim, é possível obter o valor de $y(t)$ para $t = \infty$ diretamente de $Y(s)$. Entretanto, o TVF é aplicável se e somente se existe $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Se todos os pólos de $sY(s)$ estiverem situados no semiplano s da esquerda, então existe $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Porém, se $sY(s)$ possuir pólos sobre o eixo imaginário ou no semiplano da direita, $y(t)$ conterà funções temporais dotadas de oscilação ou de crescimento exponencial, respectivamente, e não existe $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Equações (2.35)-(2.37)

Na i -ésima etapa, $1 \leq i \leq m$, a parcela $(b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{L} + b'_1)$ e também a parcela $-G(0)(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1)$ terão sido integradas i -vezes e b_{i-1} e a_{i-1} serão subtraídos.

Assim

$$W_i(s) = \left[\frac{(b'_m s^{m+i} + b'_{m-1} s^{m+i-1} + \mathbf{L} + b'_1) - G(0)(a'_n s^{n-i} + \mathbf{K} + a'_1) - W_1(0)(a'_n s^{n-i+1} + \mathbf{K} + a'_{i-1})}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} + \mathbf{L} \right. \\ \left. + \frac{-W_{i-1}(0)(a'_n s^{n-1} + \mathbf{K} + a'_1)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} \right]$$

Logo

$$W_i(0) = b'_i - G(0)a'_i - W_1(0)a'_{i-1} - W_2(0)a'_{i-2} - \mathbf{L} - W_{i-1}(0)a'_1 .$$

Na j -ésima etapa, $m < j \leq n$, a parcela referente a $(b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{L} + b'_1)$ foi integrada mais de m -vezes, não aparecendo mais na expressão. Já a expressão referente a $-G(0)(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1)$ aparecerá com ordem $n-j$.

Logo

$$W_j(s) = \left[\frac{-G(0)(a'_n s^{n-j} + \mathbf{K} + a'_1) - W_1(0)(a'_n s^{n-j+1} + \mathbf{K} + a'_{j-1})}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} + \mathbf{L} \right. \\ \left. + \frac{-W_{j-1}(0)(a'_n s^{n-1} + \mathbf{K} + a'_1)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} \right] .$$

Dessa forma

$$W_j(0) = -G(0)a'_j - W_1(0)a'_{j-1} - W_2(0)a'_{j-2} - \mathbf{L} - W_{j-1}(0)a'_1 .$$

Finalmente, na k -ésima etapa, $n < k \leq n + m$, toda a expressão estará em função das expressões anteriores, pois nesta etapa do processo terá-se feito um número de integrações

maior que a ordem do denominador da FT, ou seja, a parcela referente a $-G(0)(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1)$ terá sido eliminada.

Portanto

$$W_k(s) = \left[\frac{-W_{k-n}(0)a'_n - W_{k-(n-1)}(0)(a'_n s + a'_{n-1})}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} + \mathbf{L} \right. \\ \left. + \frac{-W_{k-1}(0)(a'_n s^{n-1} + \mathbf{L} + a'_2 s + a'_1)}{(a'_n s^n + \mathbf{K} + a'_1 s) + 1} \right].$$

Assim

$$W_k(0) = -W_{k-n}(0)a'_n - W_{k-(n-1)}(0)a'_{n-1} - \mathbf{L} - W_{k-2}(0)a'_2 - W_{k-1}(0)a'_1.$$

APÊNDICE B

Valores obtidos nas simulações

simulação 4

	$G(a)$	$W_1(0)$	Tempo de simulação (segundos)
$a = 3$	3,001	-5,931	15
$a = 4,5$	0,7504	-0,3753	10
$a = 5$	0,6003	-0,2402	10
$a = 6$	0,4288	-0,123	10
$a = 10$	0,2	-0,02629	10

simulação6

	$G(a)$	$W_1(0)$	$W_2(0)$	$W_3(0)$	Tempo de simulação (segundos)
$a = 0,2$	1,081	-0,01582	-1,463	3,09	30
$a = 0,5$	1	-0,4	-0,1598	0,5733	20
$a = 1$	0,8	-0,36	0,112	0,009615	10
$a = 2$	0,5385	-0,6338	2,31	-7,522	10
$a = 3$	0,4	-0,104	0,02629	-0,006739	10
$a = 5$	0,2623	-0,04546	0,007984	-0,002019	10

simulação 7

	$G(a)$	$W_1(0)$	$W_2(0)$	$W_3(0)$	$W_4(0)$	$W_5(0)$	$W_6(0)$	$W_7(0)$
$a = 1$	0,95	-0,07332	-0,1424	0,1241	-0,78	0,0505	-0,04593	0,06177

Tempo de simulação de 10 segundos.

simulação 8

Método ^a	Ruído ^b	G(0)	W ₁ (0)	W ₂ (0)	W ₃ (0)	Tempo de simulação (segundos)
K	10 ⁻³	1,151	-13,94	755,5	-2,562*10 ²	100
K	10 ⁻²	1,478	-46,29	2400	-8,11*10 ⁴	100
a = 0,2	10 ⁻³	1,078	-0,09333	-0,481	-5,4	30
a = 0,2	10 ⁻²	1,072	-0,2755	-1,861	-25,95	30
a = 0,5	10 ⁻³	0,9964	-0,3834	-0,1424	0,5022	20
a = 0,5	10 ⁻²	0,9886	-0,347	-0,1114	0,4036	20
a = 1	10 ⁻³	0,8051	-0,3449	0,1039	0,01341	10
a = 1	10 ⁻²	0,8162	-0,3131	0,09114	0,004573	10

^a K refere-se ao método proposto por Kosaka. Caso contrário o procedimento utilizado foi o método generalizado para FT's instáveis com diferentes constantes a .

^b refere-se à potência do ruído. O tempo de amostragem do ruído foi de 0,01 segundos.

simulação 9

	G(0)	W ₁ (0)	W ₂ (0)	W ₃ (0)	W ₄ (0)	W ₅ (0)	W ₆ (0)	W ₇ (0)
K	0,7806	-0,4601	6,642	-26,32	68,19	-137,3	229,1	-328,2

Nesta simulação adotou-se o ruído branco com 10⁻³ de potência e tempo de amostragem do ruído de 0,01 segundos.

Simulação 10

Ruído	G(a)	W ₁ (0)	W ₂ (0)	W ₃ (0)	W ₄ (0)	W ₅ (0)	W ₆ (0)	W ₇ (0)
10 ⁻²	0,9662	-0,02641	-0,1634	0,1198	-0,05247	0,007358	0,01571	-0,01999
10 ⁻³	0,9551	-0,05827	-0,1501	0,1262	-0,07822	0,05206	-0,04782	0,05768

Para esta simulação adotou-se $a = 1$, tempo de simulação de 10 segundos e período de amostragem do ruído branco de 0,01 segundos.

Simulação 11.1

Método	Potência do ruído	G(0)	W ₁ (0)	W ₂ (0)	W ₃ (0)	W ₄ (0)
K ^a	10 ⁻⁴	1,517	-2,646	3,568	-5,419	9,543
G ^b	10 ⁻⁴	0,3999	-0,4274	0,3096	-0,1891	0,1087
K	10 ⁻³	1,553	-2,956	5,316	-11,68	25,48
G	10 ⁻³	0,3996	-0,4426	0,3137	-0,1856	0,1069

^a tempo de simulação de 9,7 segundos e ^b tempo de simulação de 10 segundos. O período de amostragem do ruído foi configurado em 0,001 segundos.

Simulação 11.2

Método	Potência do ruído	período de amostragem do ruído	G(0)	W ₁ (0)	W ₂ (0)	W ₃ (0)
K ^a	10 ⁻⁴	0,01	0,2318	0,2041	-0,3003	0,9338
G	10 ⁻⁴	0,01	0,3216	0,01129	-0,05736	0,02788
K ^b	10 ⁻³	0,001	0,2885	-0,2799	2,496	-9,321
G	10 ⁻³	0,001	0,3196	-0,01622	-0,04641	0,02464

^a tempo de simulação de 9,98 segundos . ^b tempo de simulação de 9,7 segundos.

Simulação 11.3

Método	Potência do ruído	G(0)	W ₁ (0)	W ₂ (0)
K ^a	10 ⁻⁴	0,1944	0,7147	-2,677
G	10 ⁻⁴	0,4016	0,1249	-0,02719
K ^b	10 ⁻³	0,2987	-0,321	2,176
G	10 ⁻³	0,4051	0,1351	-0,13214

^a tempo de simulação de 9,7 segundos e ^b tempo de simulação de 9,8 segundos. O tempo de amostragem do ruído foi de 0,01 segundos.

Simulação 12

	potência do ruído	G(a)	W ₁ (0)	Tempo de simulação
a = 3	10 ⁻⁴	2,994	-5,839	11
a = 3	10 ⁻³	3,008	-5,842	11
a = 3	10 ⁻²	3,05	-5,826	11
a = 4	10 ⁻⁴	1,008	-0,6654	10
a = 4	10 ⁻³	1,025	-0,6598	10
a = 4	10 ⁻²	1,079	-0,6446	10
a = 5	10 ⁻⁴	0,6102	-0,2398	10
a = 5	10 ⁻³	0,6318	-0,235	10
a = 5	10 ⁻²	0,7001	-0,297	10
a = 6	10 ⁻⁴	0,4411	-0,1222	10
a = 6	10 ⁻³	0,4677	-0,1169	10
a = 6	10 ⁻²	0,5518	-0,09985	10
a = 10	10 ⁻⁴	0,2223	-0,02563	10
a = 10	10 ⁻³	0,2702	-0,02034	10
a = 10	10 ⁻²	0,4217	-0,003869	10

Tempo de amostragem do ruído configurado em 0,01 segundos.

Programa

O programa abaixo foi desenvolvido para auxiliar na resolução do sistema de equações (2.38), sendo necessário entrar com os valores $G(0)$, $W_i(0)$, $i= 1, \dots, n + m$, observando que o usuário do programa estipula a ordem da FT que será identificada. Também fica a cargo do usuário a estipulação do número de zeros da FT. A partir da determinação do par (m,n) e após o usuário entrar com os valores de $G(0)$, $W_i(0)$, $i= 1, \dots, n + m$, o programa mostra a FT identificada e as FT's de ordem reduzida e plota a resposta ao degrau (inclusive das funções de transferência de ordem reduzida) (opcionalmente o diagrama de Bode).

```
%programa_ para montar a matriz de Toeplitz e
%resolver sistema Ax=c.
clear all
clc
%entrar com a ordem do sistema
M=input('digite a ordem do numerador\n')
N=input('digite a ordem do denominador\n')
if M>N
    display('o grau do numerador é maior que o grau do denominador. Por
favor tente novamente')
else
G=input('Digite o valor de G(0)')
L=0;
K=0;
i=1;
H=M+N;
cont=0;
%valores de entrada da matriz A
while i<=H
    wi=input('Digite os valores de Entrada na sequ^encia W1(0), W2(0). . .
Wn+m(0)\n')
    cont=cont+1;
    vetor1(cont,1)=-wi;
    vetor2(cont,1)=wi;%formando a matriz C
    i=i+1;
end
for K=0:N
    % a matriz começa com a maior ordem
for L=0:M
    % determinada pelo usuário, reduzindo-se
    % a partir daí.
    m=M-L;
    n=N-K;
    A=[0];
    a=[0];
    b=[0];
    if n>=m
        i=1;
        j=1;
        %montando a matriz A2
        for i=1:n
            for j=1:n
                if m+i-j>0
                    a(i,j)=vetor1(m+i-j,1)
                elseif m+i-j==0
```

```

        a(i,j)=-G
    else
        a(i,j)=0
    end
end
end
i=1;
j=1;
% montando a matriz A1
if m>0
    for i=1:m
        for j=1:n
            if i-j>0
                b(i,j)=vetor1(i-j,1);
            elseif i-j==0
                b(i,j)=-G;
            else
                b(i,j)=0;
            end
        end
    end
end
%montando a matriz A
I=eye(m);
Z=zeros(n,m);
A=[I b;Z a]
d=det(a);
%resolve o sistema apenas se o determinante for
%diferente de 0.
if d~=0
    vetor2a=vetor2(1:m+n,1);
    vetor3=inv(A)*vetor2a;
    %INVERTER A ORDEM DOS VETOR3 PARA PLOTAR
    %CORRETAMENTE(flipud)
    vetor4=flipud(vetor3);
    num=vetor4(n+1:n+m,1);
    numerador=[num' G];
    den=vetor4(1:n,1);
    denominador=[den' 1];
    FT=tf(numerador,denominador)
    polos=roots(denominador)
    raizes_do_numerador=roots(numerador)
    %plotar (entrada degrau)apenas para as FT estáveis
    if polos<0
        hold on
        step(numerador,denominador)
        %bode(numerador,denominador) % pode ser feita a opção por
        end % plotar o diagrama de bode
        %zerando todos os valores armazenados nos vetores
        numerador=0;
        denominador=0;
        num=0;
        den=0;
        vetor3=0;
        vetor4=0;
        vetor2a=0;
        d=0;
        polos=0;
        raizes_do_numerador=0;
    end
end
if m==0

```

```
d=det(a);
if d~=0
    vetor2a=vetor2(1:n,1);
vetor3=inv(a)*vetor2a;
%INVERTER A ORDEM DOS VETOR3 PARA PLOTAR
%CORRETAMENTE(flipud)
vetor4=flipud(vetor3);
numerador=G;
denominador=[vetor4' 1];
FT=tf(numerador,denominador)
polos=roots(denominador)
%plotar apenas as FT estáveis
if polos<0
    hold on
    step(numerador,denominador)
    %bode(numerador,denominador)
end
FT=0;
numerador=0;
denominador=0;
vetor3=0;
vetor4=0;
vetor2a=0;
d=0;
polos=0;
end
end
end
end
end
end
```