

# Aula 11

# Função Degrau e Função Impulso.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas

Nas aulas anteriores, apresentamos a transformada de Laplace e vimos como ela pode ser usada para resolver um problema de valor inicial com coeficientes constantes.

---

Em todos os exemplos que apresentamos, consideramos funções de entrada (termo do lado direito da EDO) contínuas.

---

Uma das grandes vantagens da transformada de Laplace é que ela também pode ser usada quando a função de entrada é descontínua ou impulsiva.

---

Na aula de hoje, veremos como a transformada de Laplace é aplicada nesse contexto.

# Função Degrau

Um tipo importante de descontinuidade que surge, por exemplo na análise de um circuitos elétrico, é o de primeira espécie, ou seja, quando a função é contínua exceto por um número finito de “saltos”.

Podemos operar de forma eficiente com esse tipo de descontinuidade usando a função:

## Definição 1 (Função Degrau Unitário)

A **função degrau unitário**, denotada por  $u_c$ , é definida por:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$

Em particular, escrevemos  $u \equiv u_0$ .

## Transformada da Função Degrau

A transformada de Laplace de  $u_c$ , para  $c > 0$ , é:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.$$

---

Considere agora uma função  $g$  dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t - c), & t \geq c, \end{cases}$$

em que  $f$  é uma função contínua definida para todo  $t \geq 0$ .  
Note que  $g$  possui um “salto” em  $t = c$ .

---

A função  $g$  pode ser interpretada como a translação de  $f$ .

Em termos da função degrau, podemos escrever:

$$g(t) = u_c(t)f(t - c).$$

Desse modo, temos o resultado:

## Teorema 2 (Translação em $t$ )

Se  $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$  existe para  $s > a \geq 0$  e se  $c > 0$ , então

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s), \quad s > a.$$

Inversamente, se  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ , então

$$u_c(t)f(t - c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\}.$$

### Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função  $f$  dada por

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(t), & 0 \leq t < \pi/4, \\ \text{sen}(t) + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

## Exemplo 3

Determine a transformada de Laplace da função  $f$  dada por

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(t), & 0 \leq t < \pi/4, \\ \text{sen}(t) + \text{cos}(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

**Resposta:** A função  $f$  pode ser escrita como:

$$f(t) = \text{sen}(t) + u_{\pi/4}(t) \text{cos}(t).$$

Usando linearidade da transformada de Laplace, concluímos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s/4} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2 + 1}.$$

## Exemplo 4

Determine a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Observação:

Sabe-se que

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$



## Exemplo 4

Determine a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Observação:

Sabe-se que

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

**Resposta:** Pela linearidade da transformada inversa, temos

$$f(t) = t - u_2(t)(t - 2) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

## Exemplo 5

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = g(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0,$$

em que  $g$  é a função dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5, \\ \frac{t-5}{5}, & 5 \leq t < 10, \\ 1, & 5 \leq t. \end{cases}$$

## Exemplo 5

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = g(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0,$$

em que  $g$  é a função dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5, \\ \frac{t-5}{5}, & 5 \leq t < 10, \\ 1, & 5 \leq t. \end{cases}$$

**Resposta:** Note que

$$g(t) = \frac{1}{5} \left( u_5(t)(t-5) - u_{10}(t)(t-10) \right),$$

e

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{e^{-5s} - e^{10s}}{5s^2}.$$

Assim,

$$X(s) = \frac{e^{-5s} - e^{10s}}{5s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{5} \left[ e^{-5s}H(s) - e^{-10s}H(s) \right].$$

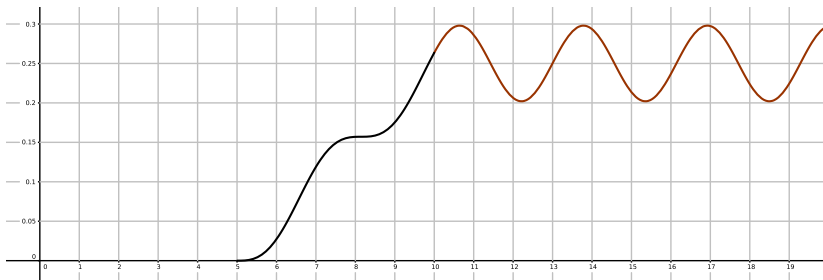
Dessa forma, temos

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \text{sen}(2t),$$

e, conseqüentemente,

$$x(t) = \frac{1}{5}u_5(t)h(t-5) - \frac{1}{5}u_{10}(t)h(t-10),$$

cujo gráfico é:



# Função Impulso

Em muitas situações, a função de entrada possui um grande valor que atua em um curto intervalo de tempo. Em termos matemáticos, o termo do lado direito da equação diferencial tem seguinte forma:

## Definição 6 (Função Impulso Unitário)

A “**função**” **impulso unitário**, também chamada **delta de Dirac** e denotada por  $\delta(t)$ , é uma distribuição que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{e} \quad \delta(t) = 0, \quad \text{para todo } t \neq 0.$$

## Observação:

A função delta de Dirac pode ser definida pelo limite

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} d_{\tau}(t), \text{ em que } d_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}, & -\tau < t < \tau, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando o teorema do valor médio para integrais, podemos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Em vista disso, para qualquer  $t_0 \geq 0$ , definimos

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}.$$

Em particular, definimos

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

## Exemplo 7

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = 8\delta(t - 2\pi), \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0.$$

## Exemplo 7

Determine a solução do problema de valor inicial

$$x'' + 4x = 8\delta(t - 2\pi), \quad x(0) = 3 \quad \text{e} \quad x'(0) = 0.$$

**Resposta:** Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$X(s) = \frac{3s + 8e^{-2\pi s}}{s^2 + 4},$$

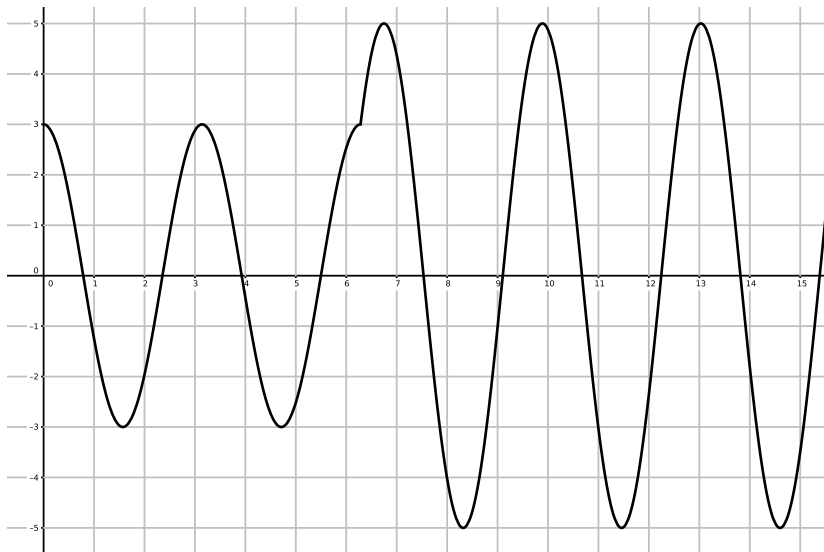
cuja inversa é

$$x(t) = 3 \cos(2t) + 4u_{2\pi} \operatorname{sen}(2t).$$



## Gráfico da função

$$x(t) = 3 \cos(2t) + 4u_{2\pi} \text{sen}(2t).$$



## Exemplo 8

Determine a solução do problema de valor inicial

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t - 5), \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$$

## Exemplo 8

Determine a solução do problema de valor inicial

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t - 5), \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0.$$

**Resposta:** Aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2},$$

cuja inversa é

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{15}}{4} (t - 5) \right).$$

## Gráfico da função

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{15}}{4} (t-5) \right).$$

