

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas  
Dinâmicos e Energéticos

Tema da Aula:

# Análise da Resposta Transitória

Prof. Dr. Carlos Henrique Farias dos Santos

# Estrutura da aula

- 1 Introdução
- 2 Sistemas de primeira ordem;
- 3 Sistemas de segunda ordem;
- 4 Pólos dominantes;
- 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais.

# 1 Introdução

Após o engenheiro obter a representação matemática de um sistema, este sistema é analisado a partir de suas *respostas transitórias* e de regime permanente. Para verificar se suas características estão de acordo com o comportamento desejado.

Na análise e no projeto de sistemas de controle, devemos obter uma base de comparação de desempenho da vários sistemas de controle. Essa base de comparação pode ser estabelecida detalhando-se sinais de *entrada de teste* específicos e em seguida, comparando as respostas dos vários sistemas com esses sinais

Neste módulo desenvolve-se um estudo sobre a *parte transitória* da resposta dinâmica do sistema.

Os modelos destes sistemas dinâmicos são classificados pela ordem das equações diferenciais que os representam. Neste caso de *primeira ou de segunda ordem*.

# 1 Introdução

## PÓLOS, ZEROS E RESPOSTA DO SISTEMA

O conceito de pólos e zeros é fundamental a análise e projeto de sistemas de controle, pois simplificam a análise qualitativa da resposta do sistema dinâmico.

### Pólos de uma Função de Transferência

Os pólos de uma função de transferência são os valores da variáveis de Laplace,  $s$ , que tornam a função de transferência infinita, ou quaisquer raízes do denominador da função de transferência que são comuns às raízes do numerador.

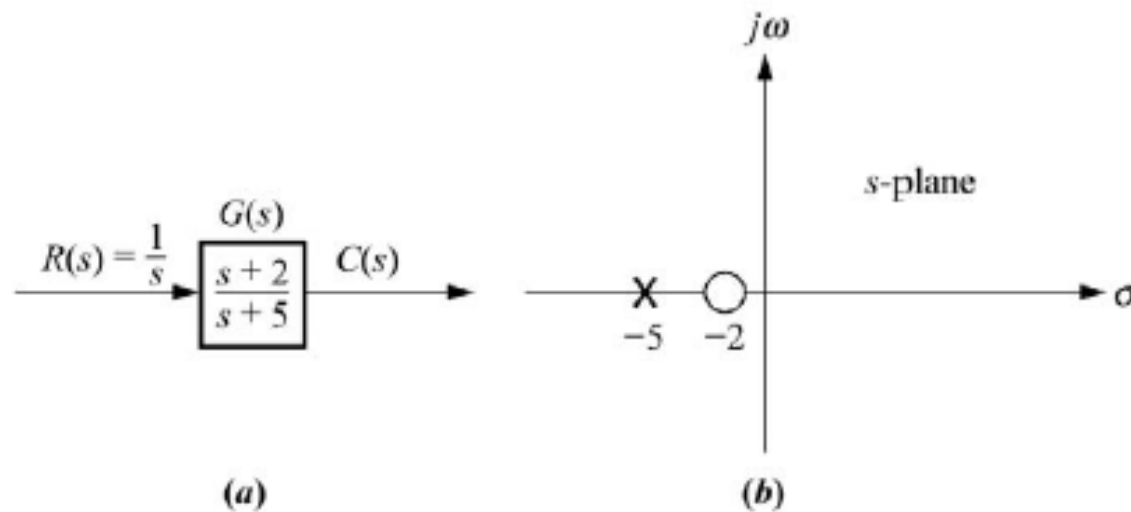
### Zeros de uma Função de Transferência

Os zeros de uma função de transferência são os valores das variáveis de Laplace,  $s$ , que tornam a função de transferência nula, ou quaisquer raízes do numerador da função de transferência que são comuns às raízes do denominador.

# 1 Introdução

## Pólos e zeros de um sistema de primeira ordem: um exemplo

Dada a função de transferência  $G(s)$  mostrada na figura (a), observa-se que ela possui um pólo em  $s = -5$  e um zero em  $s = -2$ . Esses valores são representados graficamente no plano  $s$  complexo mostrado na figura (b), utilizando X para o pólo e O para o zero.



# 1 Introdução

Para mostrar as propriedades dos pólos e zeros é preciso determinar a *resposta ao degrau unitário* do sistema. Multiplicando-se a função de transferência da figura (a) por uma função degrau, tem-se

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

onde

$$A = \frac{(s+2)}{(s+5)} \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \frac{(s+2)}{s} \Big|_{s \rightarrow -5} = \frac{3}{5}$$

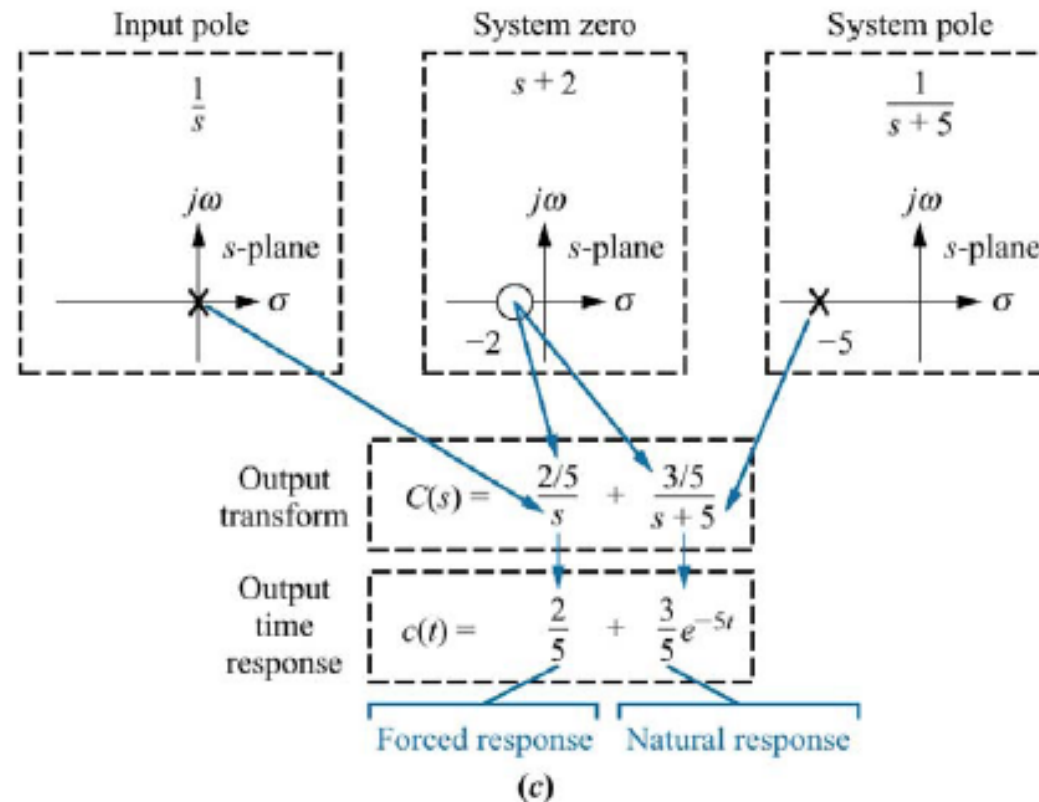
Assim,

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} e^{-5t}$$

# 1 Introdução

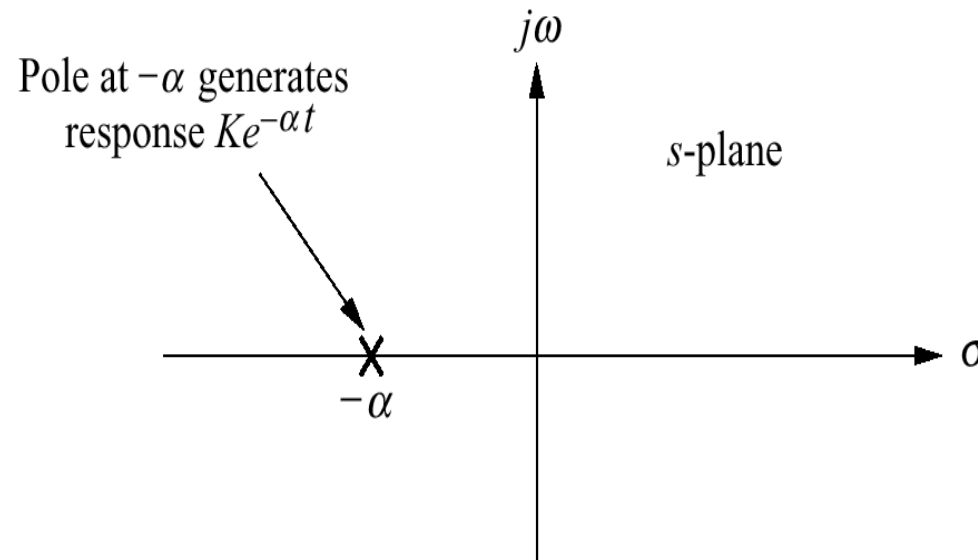
Com base no desenvolvimento resumido na figura (c), as seguintes conclusões podem ser estabelecidas:

- 1) Um pólo da função de entrada gera a forma da *resposta forçada* (isto é, o pólo na origem gerou uma função degrau na saída).
- 2) Um pólo da função de transferência gera a forma da *resposta natural* (isto é, o pólo em  $-5$  gerou a função  $e^{-5t}$ ).



# 1 Introdução

- 3) Um pólo sobre o eixo real gera uma resposta exponencial da forma  $e^{-\alpha t}$ , onde  $\alpha$  é a localização do pólo sobre o eixo real. Assim, quanto mais à esquerda, no eixo real negativo, estiver o pólo, mais rápido o decaimento da resposta transiente exponencial par zero.
- 4) Os zeros e os pólos geram as amplitudes tanto para a resposta forçada quanto para a resposta natural.





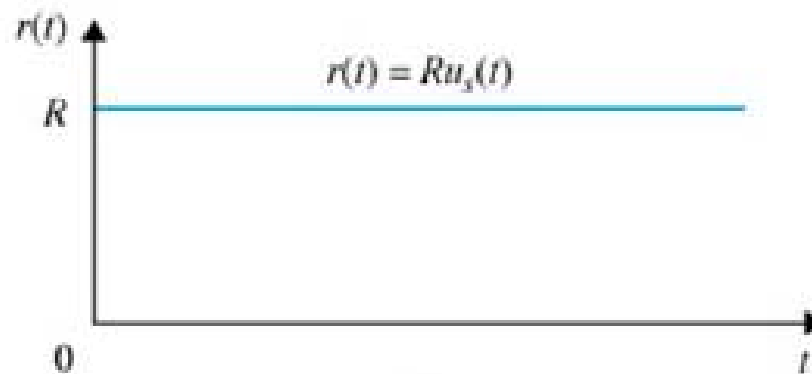
# 1 Introdução

## SINAIS DE TESTE TÍPICOS

**Entrada degrau:** A função de entrada em degrau representa uma mudança instantânea na entrada de referência. A representação matemática da função degrau ou magnitude  $R$  é

$$r(t) = R, \quad t \geq 0 \\ = 0, \quad t < 0.$$

onde  $R$  é uma constante real. Ou,  $r(t) = R u_s(t)$ . Onde  $u_s(t)$  é a função degrau unitário. A função degrau é mostrada na figura a seguir como uma função do tempo. Este função é muito utilizada como função de teste desde que seu salto inicial instantâneo revela a velocidade que um sistema responde a entradas com mudanças abruptas.

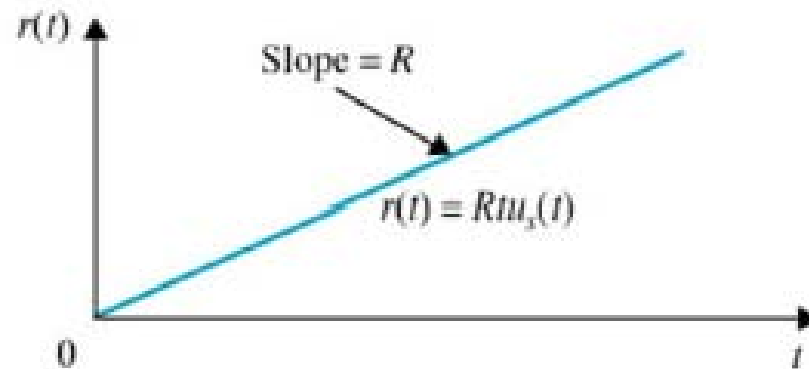


# 1 Introdução

**Entrada rampa:** A função rampa é um sinal que muda constantemente com o tempo. Matematicamente,

$$r(t) = R t u_s(t)$$

onde  $R$  é uma constante real. A função rampa tem a habilidade de testar como o sistema pode responder a um sinal que muda linearmente com o tempo (ver figura abaixo).

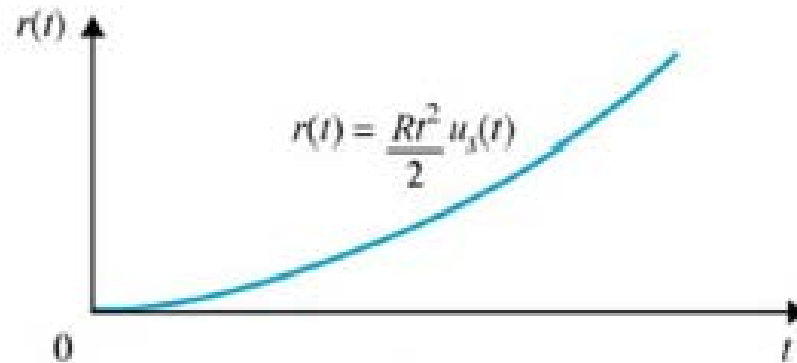


# 1 Introdução

**Entrada parábola:** Esta função representa um sinal que é uma ordem mais rápida que a função rampa. Matematicamente,

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2} u_s(t)$$

onde  $R$  é uma constante real e o fator  $\frac{1}{2}$  é adicionado por conveniência matemática desde que a transformada de Laplace de  $r(t)$  é simplesmente  $R/s^3$ . Este sinal é exposto na figura a seguir.



# 1 Introdução

Desde a função degrau até a função parábola, os sinais se tornam progressivamente mais rápidos em relação ao tempo.

Teoricamente, podemos definir sinais com taxas mais rápidas, como  $t^3$ , denominada função *jerk*, e assim por diante.

Entretanto, como será estudado posteriormente, para o seguimento preciso de entradas de alta ordem, o sistema deve possuir integradores de alta ordem na malha, os quais freqüentemente causam sérios problemas de estabilidade.

Será visto nas próximas seções que para uma *forma geral da função de transferência de primeira ordem* com saída  $Y(s)$  e entrada  $U(s)$ ,

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} U(s)$$

onde  $K$  e  $\tau$  são respectivamente, o ganho e a constante de tempo. Uma solução geral no domínio do tempo pode ser obtida uma vez que a natureza da mudança de entrada seja especificada.

## 2 Sistemas de primeira ordem

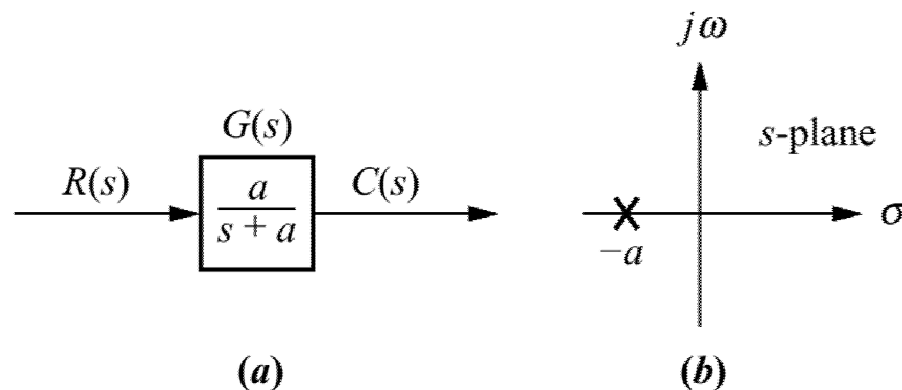
Considere o sistema de primeira ordem sem zeros, descrito por uma função de transferência  $G(s)$  mostrada na figura (a). Se a entrada for *um degrau unitário*, onde  $R(s) = 1/s$ , a transformada de Laplace da resposta ao degrau é  $C(s)$ , onde

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)} \quad (1)$$

Aplicando-se a transformada inversa, a resposta ao degrau pode ser expressa como,

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at} \quad (2)$$

onde o pólo de entrada na origem gerou a resposta forçada  $c_f(t) = 1$ , e o pólo do sistema em  $-a$ , conforme mostrado na figura (b), gerou a resposta natural  $c_n(t) = e^{-at}$ .



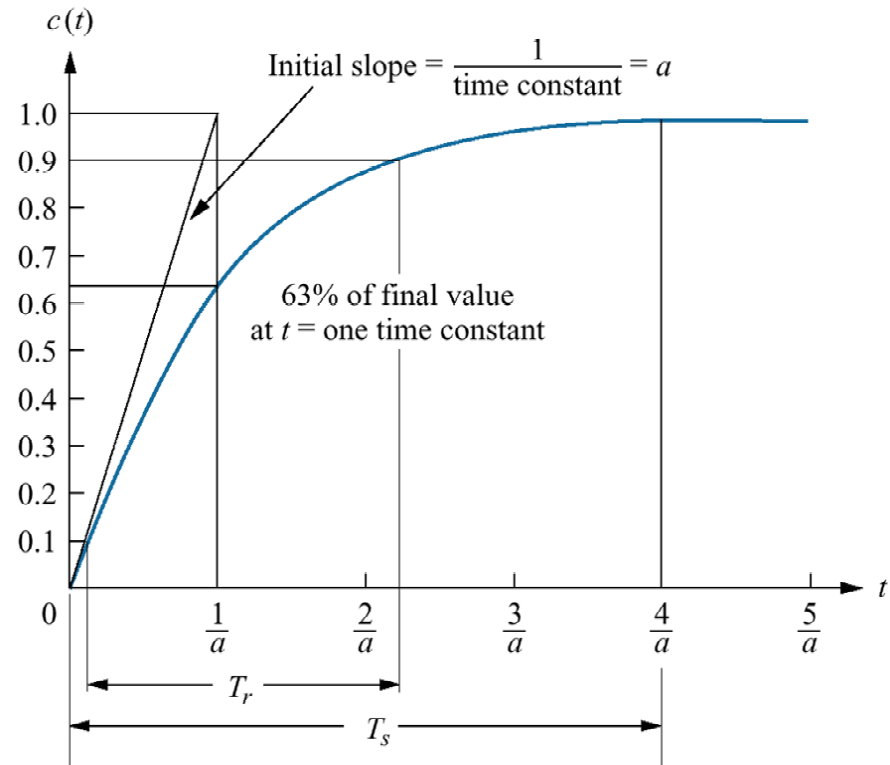
## 2 Sistemas de primeira ordem

A equação (2) é representada graficamente na figura a seguir. A equação (2) diz que, inicialmente, a saída  $c(t)$  é nula e finalmente se torna unitária. Examinando o significado do parâmetro  $a$ , quando  $t = 1/a$ .

$$e^{-at} \Big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0,37$$

ou

$$c(t) \Big|_{t=1/a} = 1 - e^{-at} \Big|_{t=1/a} = 1 - 0,37 = 0,63 \quad (3)$$



Portanto, quando  $t = 1/a$ , a resposta  $c(t)$  alcança 63,2 % de sua variação total (ver figura).

Com estas constatações, definimos a seguir três especificações da resposta transitória.

## 2 Sistemas de primeira ordem

### CONSTANTE DE TEMPO

Denomina-se o fator  $1/a$  constante de tempo. Da equação (3), trata-se do tempo para  $e^{-at}$  decair 37 % do seu valor inicial, ou o tempo para a resposta ao degrau alcançar 63 % do seu valor final.

Como o pólo da função de transferência está em  $-a$ , podemos dizer que o pólo está localizado na recíproca da constante de tempo, e quanto mais afastado o pólo estiver do eixo imaginário, mais rápida será a resposta transiente.

## 2 Sistemas de primeira ordem

### TEMPO DE SUBIDA, $T_r$

É o tempo necessário para a resposta passar de 10 % a 90 % do seu valor final. O tempo de subida é obtido da equação (2).

Para 10 % :

$$0,1 = 1 - e^{-at_1}$$

$$e^{-at_1} = -0,9$$

$$-at_1 = \ln 0,9$$

$$t_1 = \frac{0,11}{a}$$

Para 90 % :

$$0,9 = 1 - e^{-at_2}$$

$$e^{-at_2} = -0,1$$

$$-at_2 = \ln 0,1$$

$$t_2 = \frac{2,3}{a}$$

Deste modo :

$$T_r = t_2 - t_1 = \frac{2,3}{a} - \frac{0,11}{a}$$

$$T_r = \frac{2,2}{a}$$



## 2 Sistemas de primeira ordem

### TEMPO DE ASSENTAMENTO, $T_s$

É o tempo necessário para a curva de alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno de 2 % do seu valor final.

Considerando  $c(t) = 0,98$  e resolvendo a equação (2) em função do tempo, tem-se:

$$0,98 = 1 - e^{-aT_s}$$

$$T_s = 4/a$$

## 2 Sistemas de primeira ordem

### FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM VIA EXPERIMENTO

Freqüentemente, não é possível ou prático, obter a função de transferência de um sistema. Isto ocorre devido ao sistema ser fechado, e parte de seus componentes não serem facilmente identificáveis.

Desde que a função de transferência é uma representação da entrada para a saída do sistema, a resposta ao degrau unitário pode induzir a representação do sistema, ainda que sua constituição interna seja desconhecida.

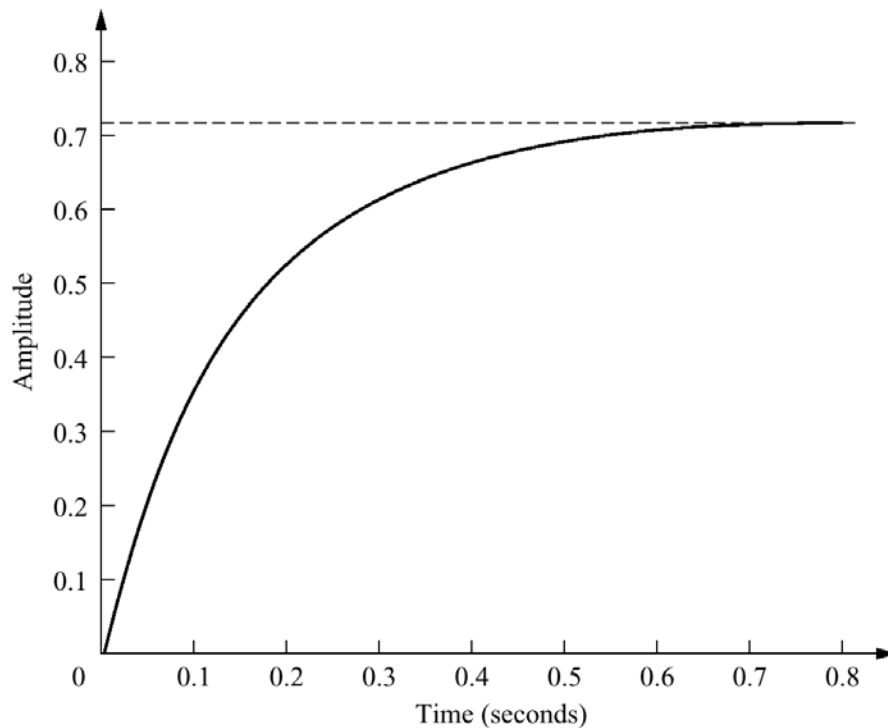
Considere  $G(s) = K/(s + a)$ , cuja resposta ao degrau seja:

$$C(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{(s+a)}$$

Se identificarmos  $K$  e  $a$  em laboratório, obtemos  $G(s)$ .

## 2 Sistemas de primeira ordem

Por exemplo, considere a resposta ao degrau unitário mostrada na figura a seguir. Para a obtenção da constante de tempo ( $T_c$ ), precisamos encontrar o instante onde ocorre 63 % do valor final. Para tanto, multiplica-se 0,63 pelo valor final da resposta e encontramos graficamente o respectivo instante ( $T_c$ ). Como o valor final é de aproximadamente de 0,72, a constante de tempo é calculada onde a curva atinge  $0,63 \times 0,72 = 0,45$ , ou seja, cerca de 0,13 s.



Assim, com o valor de  $T_c$ , calcula-se o valor de  $a$  pela relação,

$$T_c = 1/a,$$

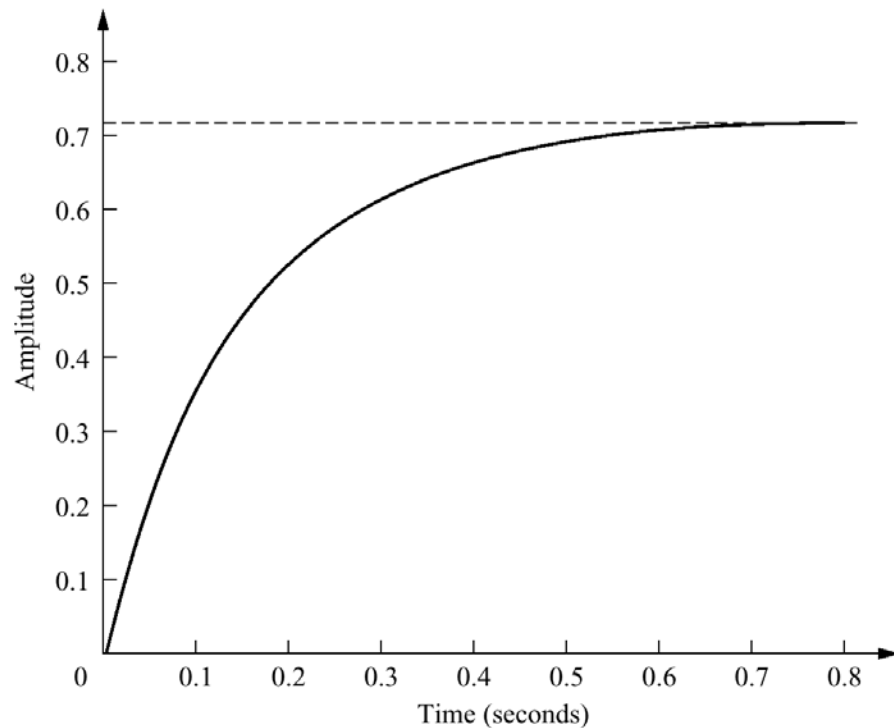
$$a = 1/0,13 = 7,7.$$

## 2 Sistemas de primeira ordem

Para o cálculo de  $K$ , sabemos que a resposta forçada alcança o valor de regime permanente em  $K/a = 0,72$  (valor final). Substituindo o valor de  $a$ , encontra-se  $K = 5,54$ .

Portanto, a função de transferência para o sistema é,

$$G(s) = \frac{5,54}{(s + 7,7)}$$



# 3 Sistemas de segunda ordem

## INTRODUÇÃO

Enquanto a variação dos parâmetros dos sistemas de primeira ordem alteram apenas a velocidade da resposta, as alterações nos parâmetros dos sistemas de segunda ordem podem mudar o formato da resposta. Por exemplo, um sistema de segunda ordem pode apresentar características muito similares às de um sistema de primeira ordem ou, dependendo dos valores de seus elementos, apresentar oscilações puras ou amortecidas para sua resposta transiente.

Antes de formalizarmos a discussão, vamos nos familiarizar com as possíveis respostas deste tipo de sistema.

# 3 Sistemas de segunda ordem

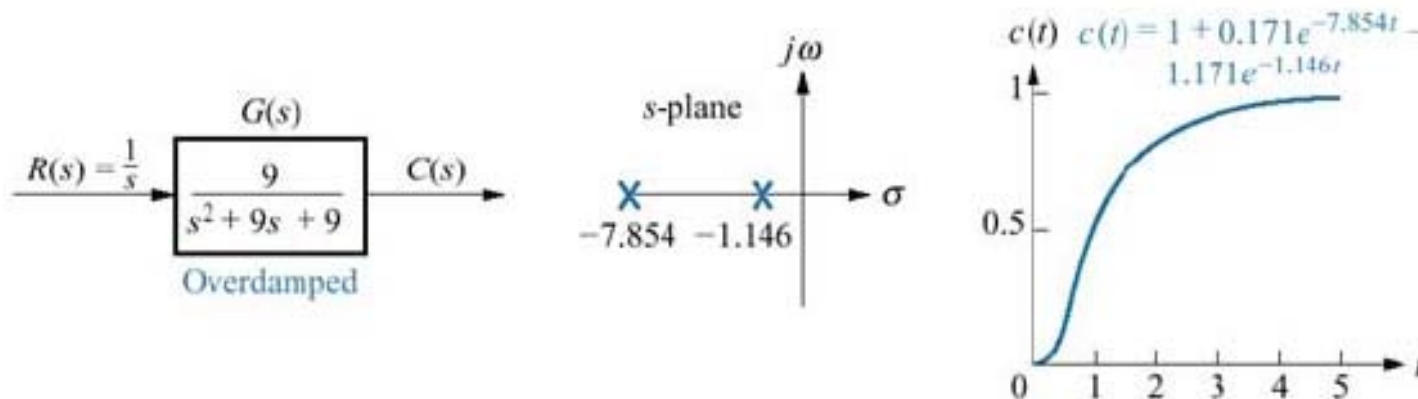
## Resposta superamortecida

Para esta resposta tem-se,

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)} = \frac{9}{s(s + 7,854)(s + 1,146)}$$

Esta função possui um pólo na origem, referente à entrada em degrau unitário, e dois pólos reais decorrentes do sistema, o que resulta em uma resposta natural exponencial com frequências exponenciais iguais às localizações dos pólos.

$$c(t) = K_1 + K_2 e^{-7,854t} + K_3 e^{-1,146t}$$



# 3 Sistemas de segunda ordem

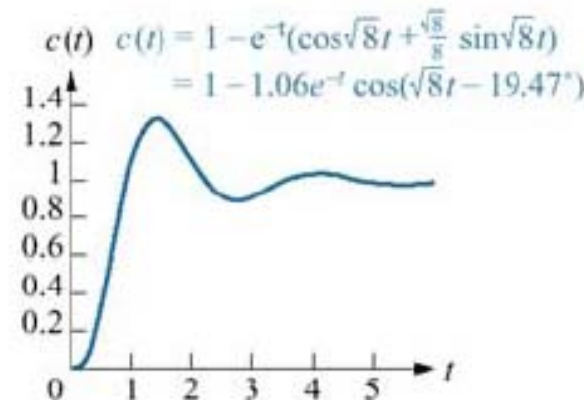
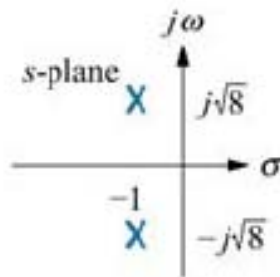
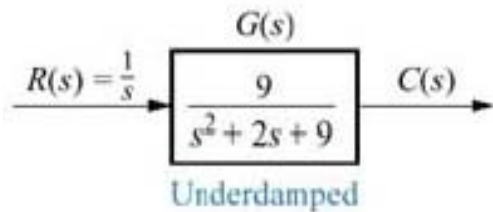
## Resposta subamortecida

Para esta resposta, tem-se

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 2s + 9)} = \frac{9}{s(s + 1 - j\sqrt{8})(s + 1 + j\sqrt{8})}$$

Esta função possui um pólo na origem, proveniente do degrau unitário na entrada, e dois pólos complexos decorrentes do sistema. Neste caso, a parte real dos pólos emprega um decaimento exponencial da amplitude da senóide, enquanto a parte imaginária do pólo está relacionada à frequência da oscilação senoidal.

$$c(t) = K_1 + e^{-5t} (K_2 \cos(13,23t) + K_3 \text{sen}(13,23t))$$



### 3 Sistemas de segunda ordem

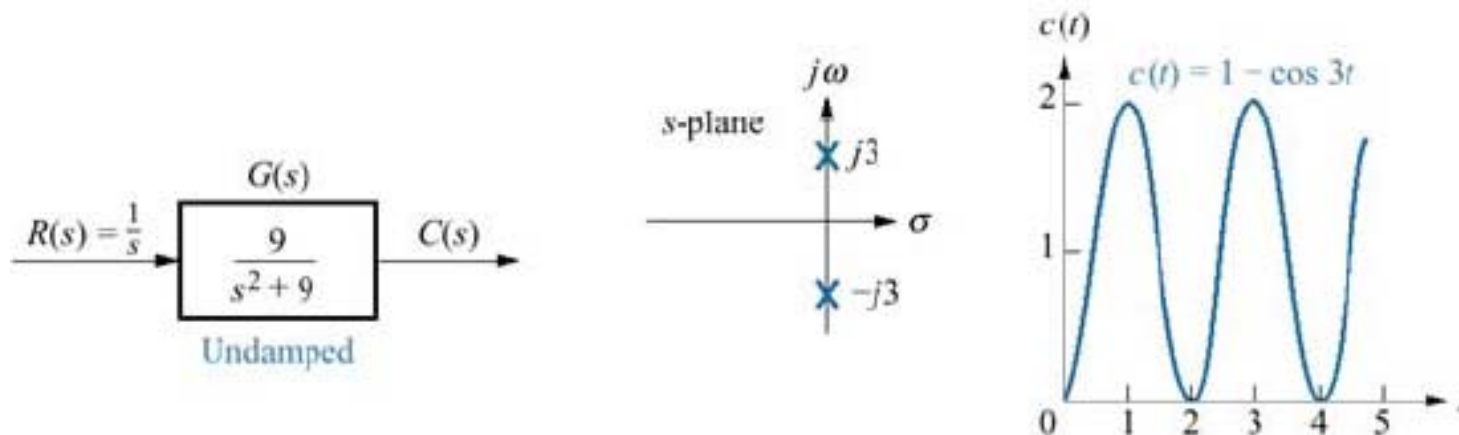
#### Resposta não-amortecida

Para esta resposta, tem-se

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)} = \frac{9}{s(s - j3)(s + j3)}$$

Esta função possui um pólo na origem, proveniente do degrau unitário na entrada, e dois pólos imaginários decorrentes do sistema. Estes pólos imaginários geram a resposta natural senoidal cuja frequência é igual a localização do eixo imaginário. A ausência de uma parte real no par de pólos implica em uma exponencial que não apresenta decaimento ( $e^{-0t} = 1$ ).

$$c(t) = K_1 + K_4 \cos(3t - \phi)$$





# 3 Sistemas de segunda ordem

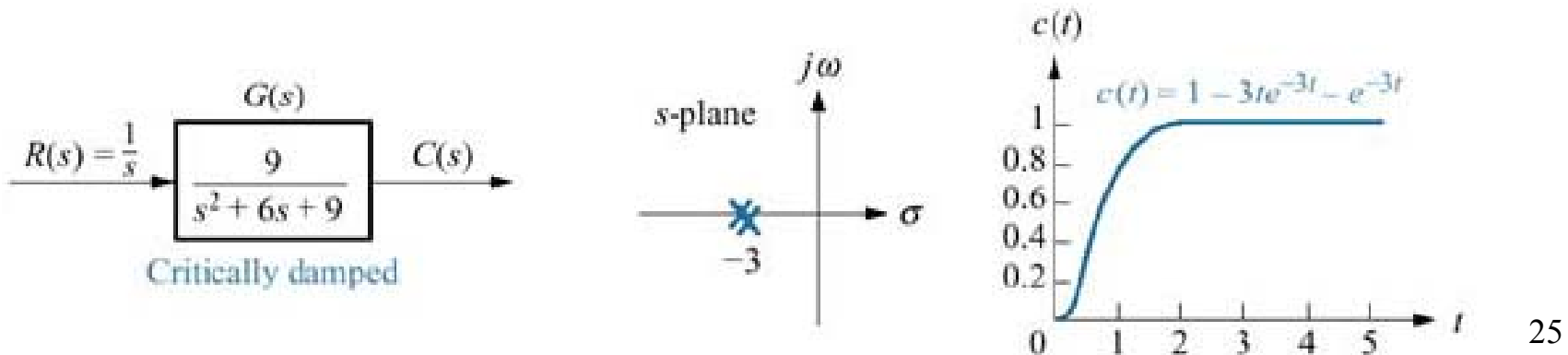
## Resposta criticamente amortecida

Para esta resposta, tem-se

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 6s + 9)} = \frac{9}{s(s + 3)^2}$$

Esta função possui um pólo na origem, proveniente do degrau unitário na entrada, e dois pólos no eixo real na coordenada  $-3$  decorrentes do sistema. Estes pólos reais geram a resposta natural que consiste em uma exponencial simples e uma exponencia multiplicada pelo tempo, onde a frequência das exponenciais é igual à coordenada de localização dos pólos reais.

$$c(t) = K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-3t}$$



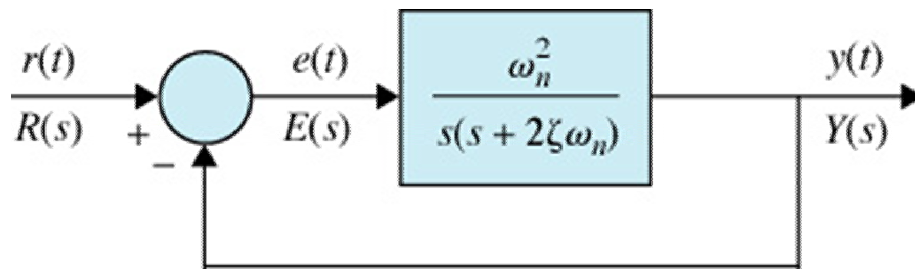
### 3 Sistemas de segunda ordem

Considere um sistema de controle de segunda ordem com realimentação unitária representado pelo diagrama de blocos a seguir. A função de transferência de malha aberta do sistema é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (1)$$

onde  $\zeta$  e  $\omega_n$  são constantes reais. A função de transferência de malha fechada do sistema é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$



O sistema da figura ao lado, com as funções em (1) e (2) é definido como *protótipo de sistema de segunda ordem*.

### 3 Sistemas de segunda ordem

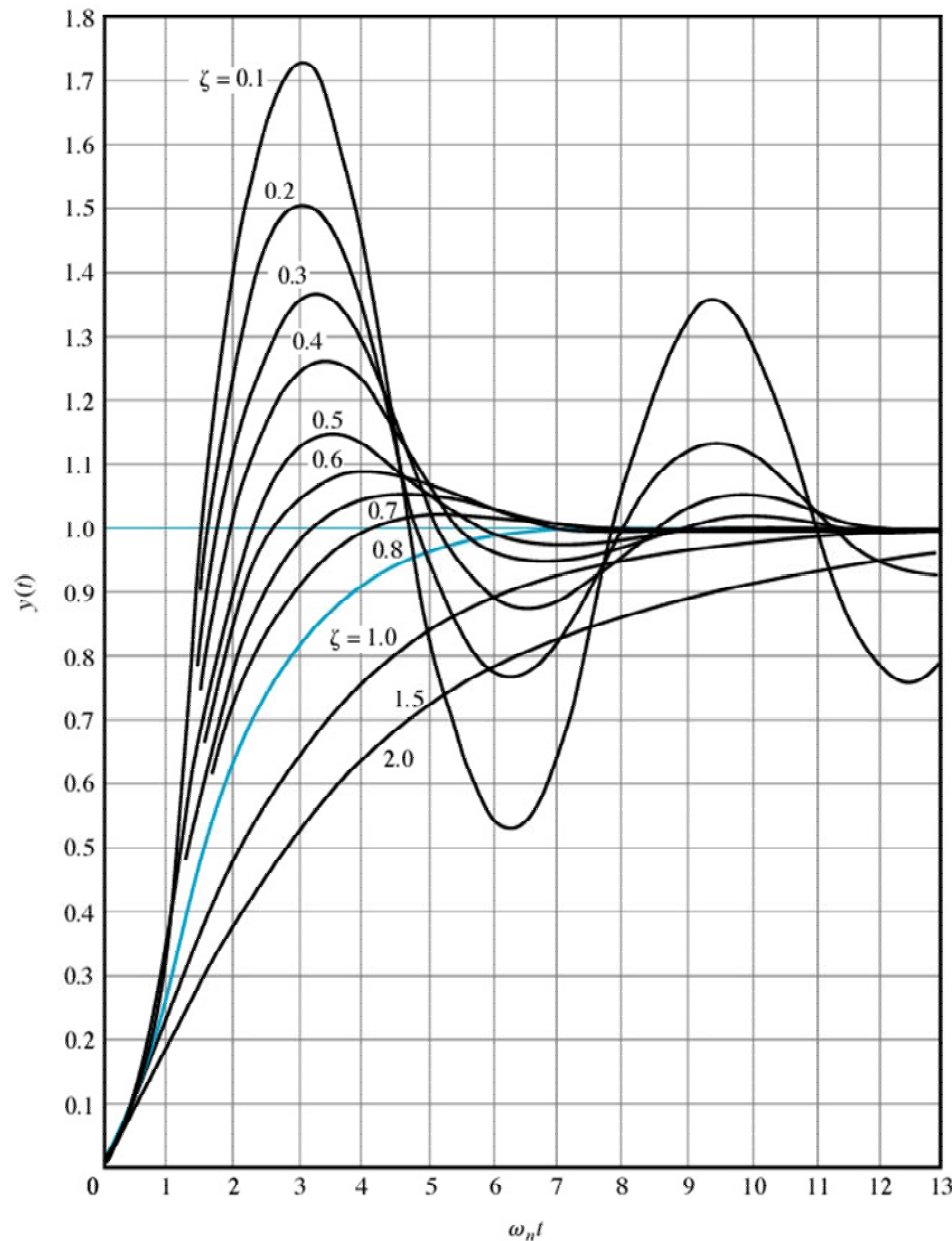
Para uma função de entrada degrau unitário,  $R(s) = 1/s$ , a resposta da saída do sistema é obtida através da transformada de Laplace inversa da transformada da saída,

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3)$$

O resultado é dado por:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta\right) \quad t \geq 0 \quad (4)$$

### 3 Sistemas de segunda ordem



A figura ao lado mostra as respostas ao degrau unitário do protótipo de sistema de segunda ordem gerados como funções do tempo normalizado,  $\omega_n t$  para vários valores de  $\zeta$ .

### 3 Sistemas de segunda ordem

Os efeitos dos parâmetros do sistema  $\zeta$  e  $\omega_n$  na resposta ao degrau  $y(t)$  podem ser estudados através da localização dos pólos do sistema em malha fechada. Para tanto, calcula-se as raízes da equação característica deste protótipo, obtidas pela igualdade do denominador a zero:

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (5)$$

As duas raízes podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ &= -\alpha \pm j\omega \end{aligned} \quad (6)$$

onde

$$\alpha = \zeta\omega_n \quad (7)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (8)$$

O significado físico de  $\zeta$  e  $\omega_n$  é investigado. De acordo com a equação (4),  $\alpha$  opera como uma constante que é multiplicada por  $t$  no termo exponencial de  $y(t)$ .

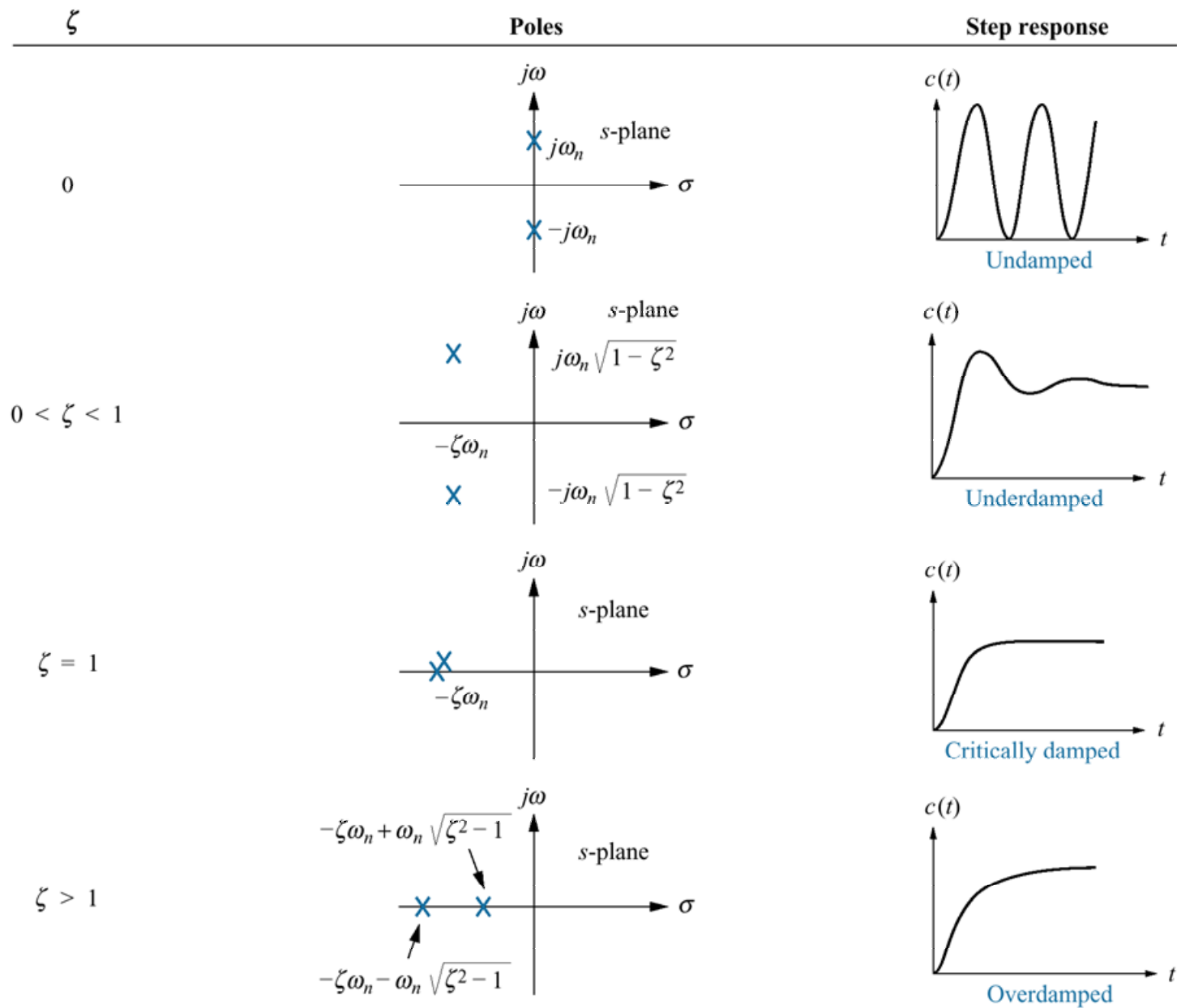
### 3 Sistemas de segunda ordem

Deste modo,  $\alpha$  controla a taxa de crescimento ou decaimento da resposta ao degrau unitário  $y(t)$ . Em outras palavras,  $\alpha$  controla o “amortecimento” do sistema e é chamado de fator de amortecimento ou constante de amortecimento. O inverso de  $\alpha$ ,  $1/\alpha$ , é proporcional a constante de tempo do sistema. Em relação a equação (6), o amortecimento crítico ocorre quando  $\zeta = 1$ . Sob esta condição, o fator de amortecimento é simplesmente  $\alpha = \omega_n$ . Portanto, podemos considerar  $\zeta$  como a taxa de amortecimento, ou seja,

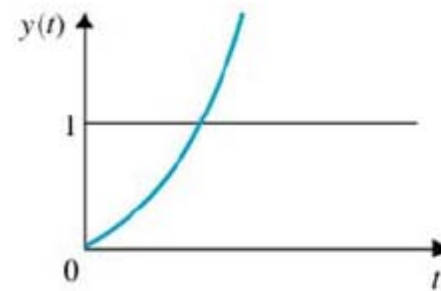
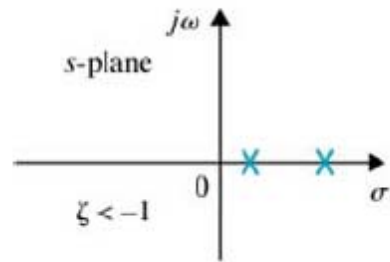
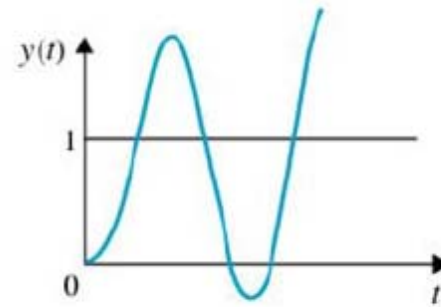
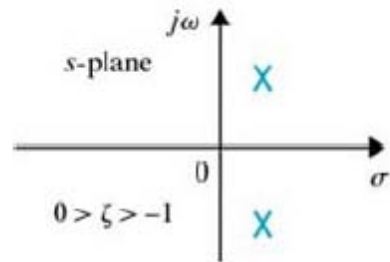
$$\zeta = \text{taxa de amortecimento} = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{\text{fator de amortecimento atual}}{\text{fator de amortecimento sob amortecimento crítico}} \quad (9)$$

O fator  $\omega_n$  é definido como frequência natural não amortecida. Uma vez definidas  $\zeta$  e  $\omega_n$ , constata-se através da equação (6) que os diversos casos de respostas de segunda ordem dependem de  $\zeta$ ; esses casos são resumidos na figura a seguir.

# 3 Sistemas de segunda ordem



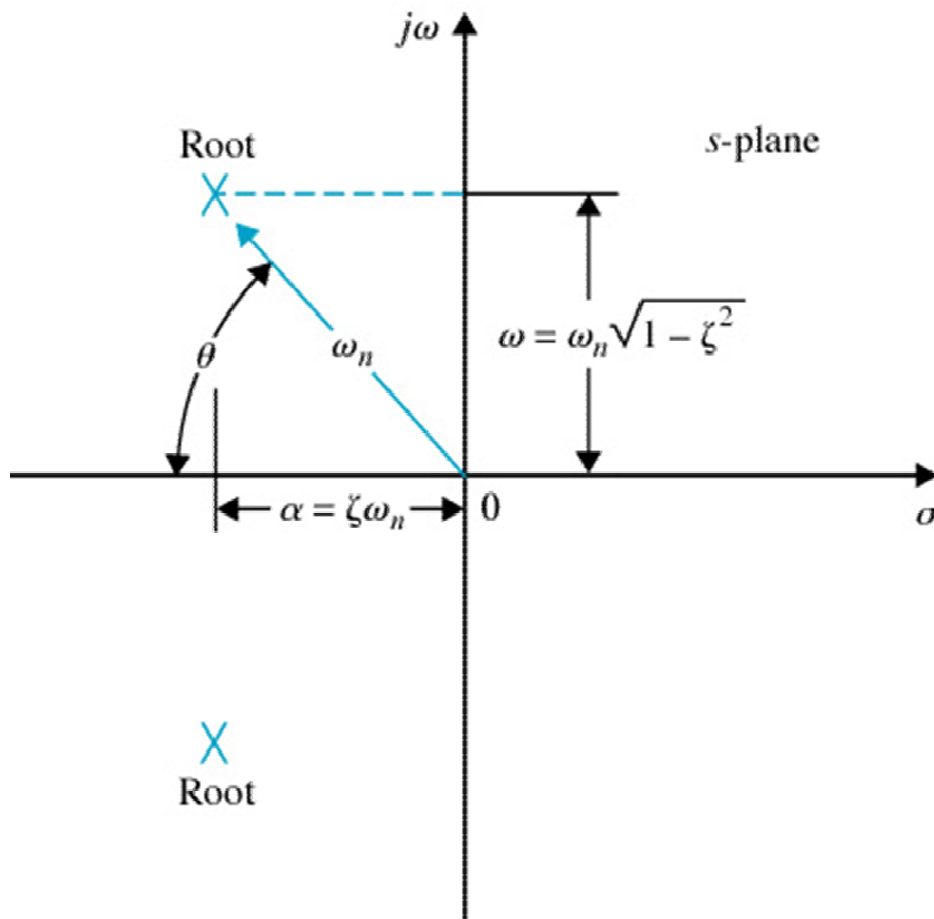
### 3 Sistemas de segunda ordem





### 3 Sistemas de segunda ordem

A figura abaixo ilustra as relações entre a localização das raízes da equação característica e  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\omega_n$  e  $\omega$ . A figura indica o caso de raízes complexas conjugadas.

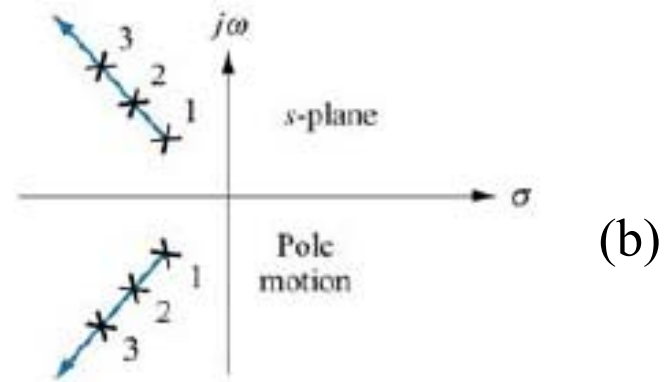
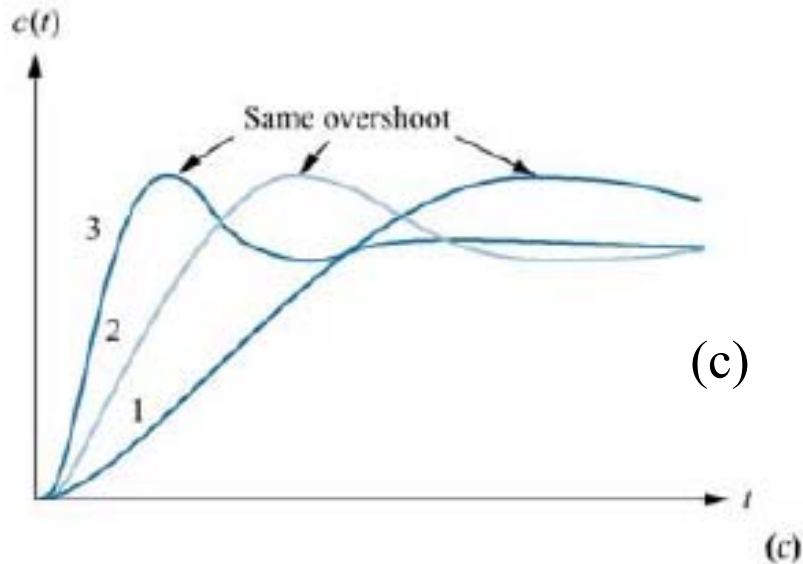
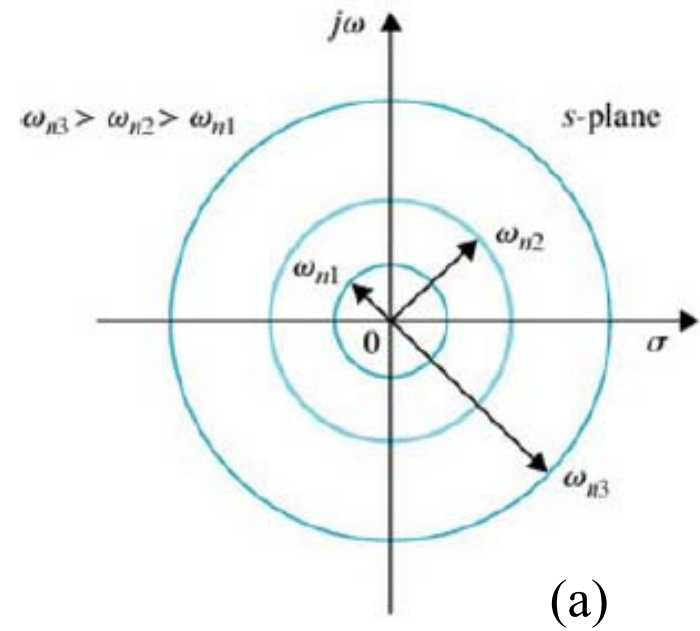


- $\alpha$  = parte real das raízes
- $\omega_n$  = distância radial das raízes até a origem do plano-s
- $\omega$  = parte imaginária das raízes
- $\zeta$ , = coseno do ângulo entre a linha radial até as raízes e o eixo negativo quando as raízes estão semi-plano esquerdo do plano-s, ou,

$$\zeta = \cos \theta. \quad (10)$$

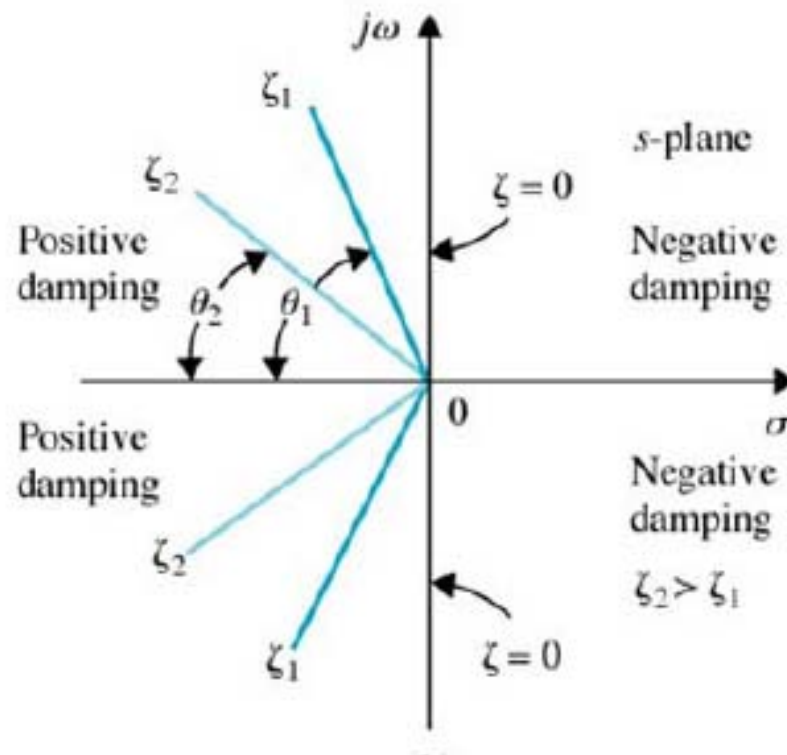
# 3 Sistemas de segunda ordem

A figura (a) ilustra a situação onde a frequência natural é constante, enquanto a figura (b) mostra a o movimento dos pólos ao longo de uma linha radial constante, o que implica num mesmo valor de sobressinal, como exposto na figura (c).



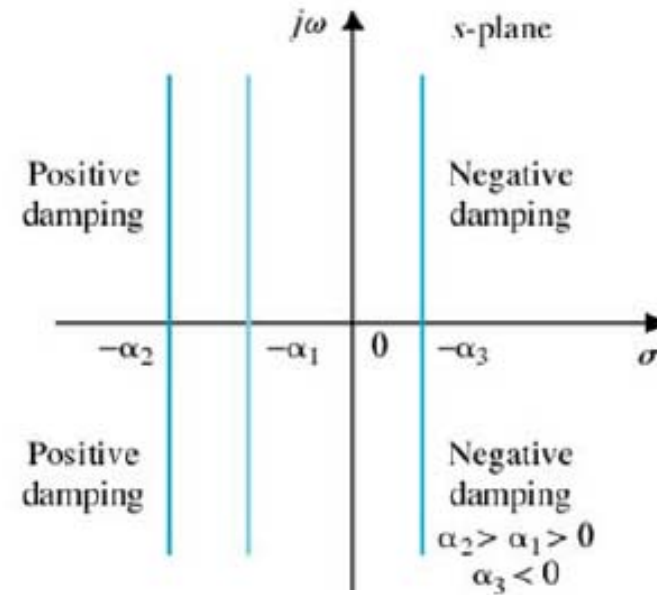
### 3 Sistemas de segunda ordem

A figura a seguir expõe o caso onde o lugar das raízes possuem diferentes valores de taxa de amortecimento  $\zeta$ .

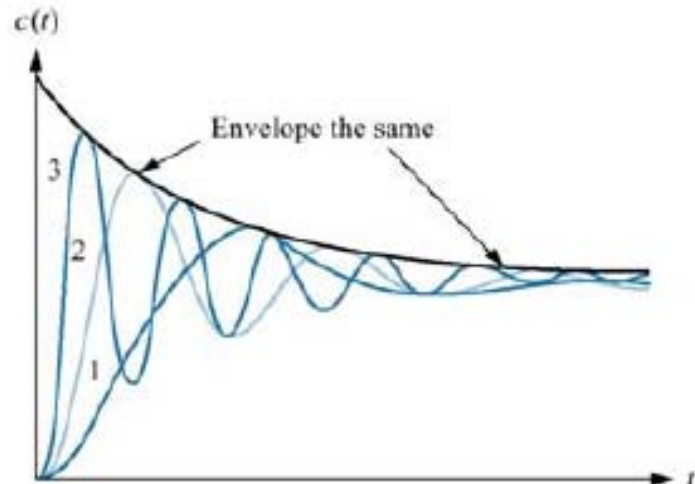


# 3 Sistemas de segunda ordem

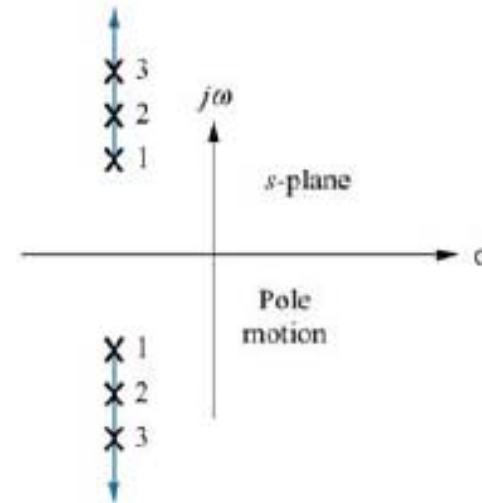
A figura (a) ilustra a situação onde a parte real das raízes  $\alpha$  é inalterada, enquanto a figura (b) mostra a o movimento dos pólos ao longo de uma linha vertical constante, o que implica no aumento da freqüência, embora a envoltória permaneça a mesma, como exposto na figura (c).



(a)



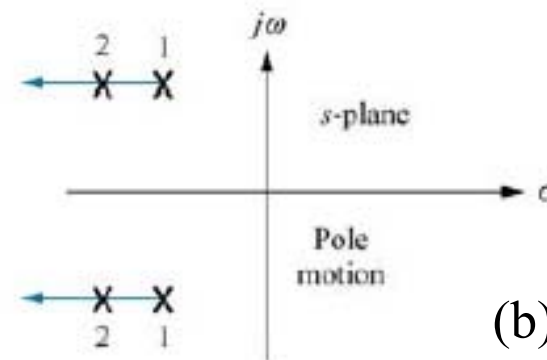
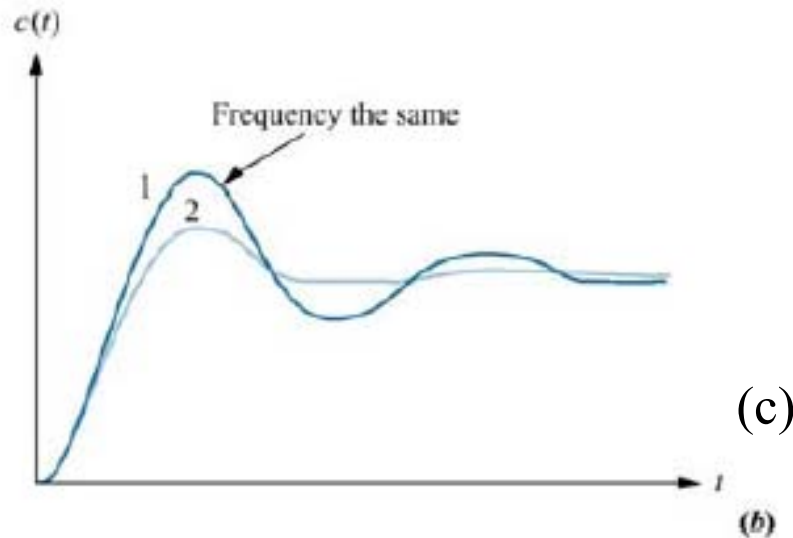
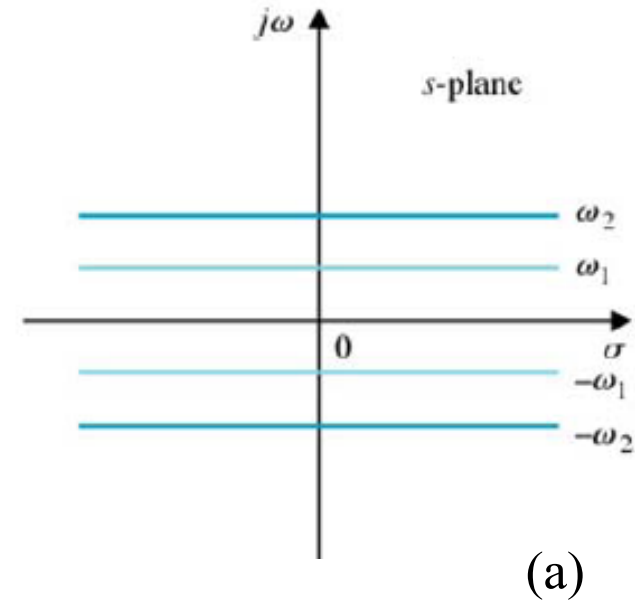
(c)



(b)

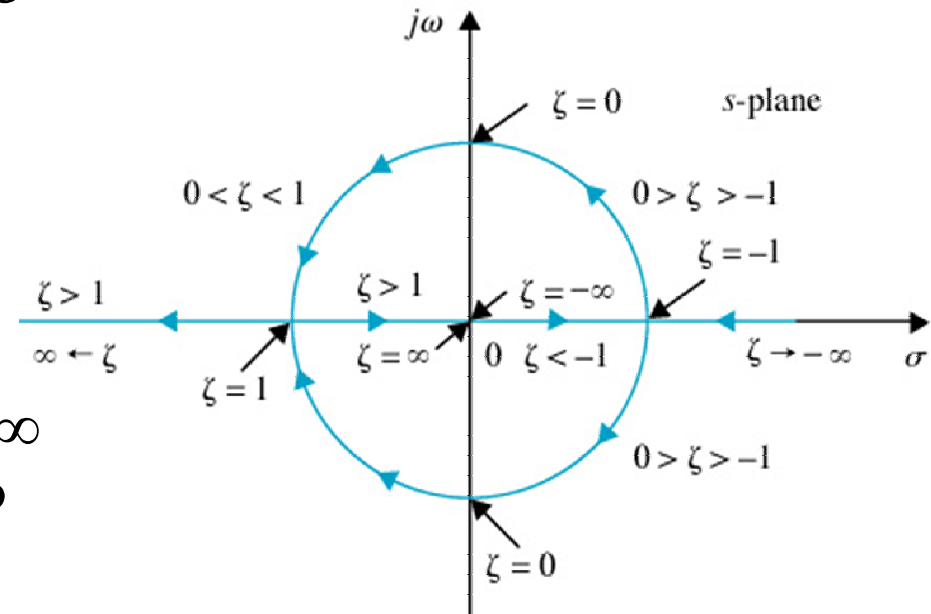
### 3 Sistemas de segunda ordem

A figura (a) ilustra a situação onde frequência, ou a parte imaginária das raízes, permanece inalterada, enquanto a figura (b) mostra a frequência constante ao longo da faixa de variação da parte real. Quando os pólos são movidos para a esquerda, a resposta se amortece mais rapidamente, enquanto a frequência é a mesma, como exposto na figura (c).



### 3 Sistemas de segunda ordem

A figura ao lado apresenta o efeito das raízes da equação característica sob o amortecimento do sistema de segunda ordem. Destaca-se que  $\omega_n$  permanece constante enquanto a taxa de amortecimento  $\zeta$  é variada de  $-\infty$  a  $+\infty$ . A seguinte classificação da dinâmica do sistema em relação ao valor de  $\zeta$  é realizada:



$0 < \zeta < 1$ :  $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  subamortecido

$\zeta = 1$ :  $s_1, s_2 = -\omega_n$  criticamente amortecido

$\zeta > 1$ :  $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$  sobreamortecido

$\zeta = 0$ :  $s_1, s_2 = \pm j\omega_n$  não amortecido

$\zeta < 0$ :  $s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  negativamente amortecido

### 3 Sistemas de segunda ordem

#### *SOBRESINAL*

A relação exata entre a taxa de amortecimento e o valor de sobresinal pode ser obtida através da derivada da equação (4),  $y(t)$ , em relação a  $t$  e igualando este valor a zero.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{w_n e^{-\zeta w_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \zeta \sin(\omega t + \theta) - \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega t + \theta) \right] \quad t \geq 0 \quad (11)$$

onde  $\omega$  e  $\theta$  são definidos nas equações (8) e (10), respectivamente. A equação anterior pode ser reduzida a,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \quad t \geq 0 \quad (12)$$

### 3 Sistemas de segunda ordem

Igualando  $dy(t)/dt$  a zero, temos as soluções:  $t = \infty$ , e

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

da qual podemos escrever,

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

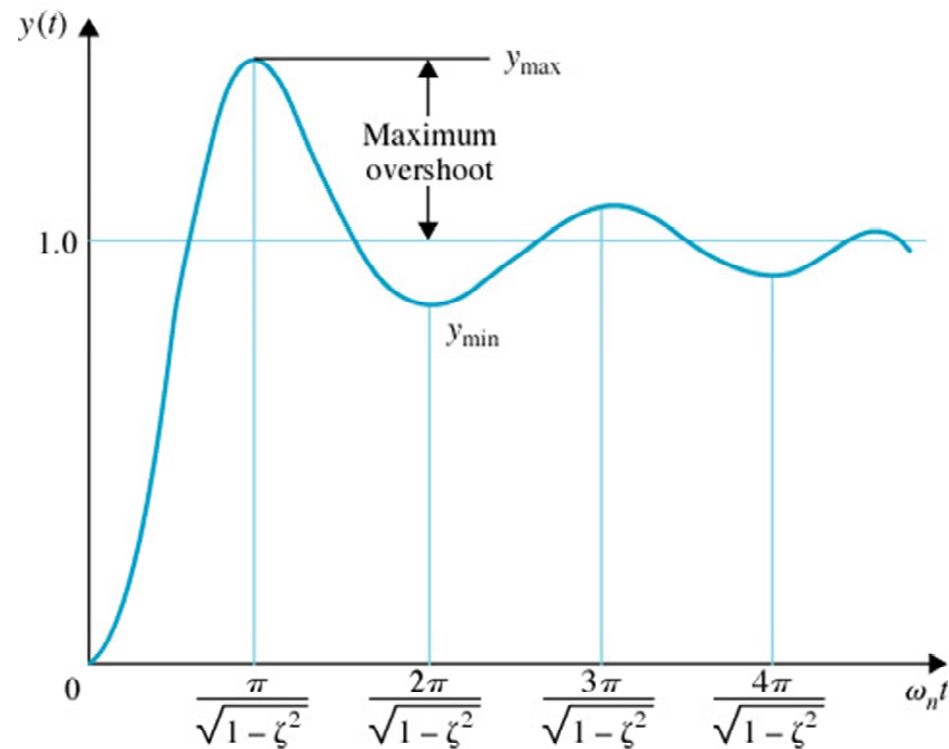
para  $t = 1$ , o instante onde ocorre o máximo sobresinal é dado pelo *tempo de pico*,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (14)$$



### 3 Sistemas de segunda ordem

Referenciando a figura a seguir, os sobresinais ocorrem em valores ímpares, isto é,  $n = 1, 3, 5, \dots$ , e os subsinais ocorrem nos valores pares de  $n$ . Os instantes onde eles ocorrem são dados pela equação (13). Pode ser notado que apesar da resposta ao degrau unitário para  $\zeta \neq 0$ , não ser periódica, os sobresinais e os subsinais da resposta ocorrem em intervalos periódicos, como observado na figura.



### 3 Sistemas de segunda ordem

As magnitudes dos sobresinais e subsinais podem ser determinados pela substituição da equação (13) na equação (4). O resultado é dado por,

$$y(t)|_{\text{max ou min}} = 1 - \frac{e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(n\pi + \theta) \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

ou

$$y(t)|_{\text{max ou min}} = 1 + (-1)^{n-1} e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

O máximo sobresinal é obtido fazendo  $n = 1$  na equação (16). Portanto,

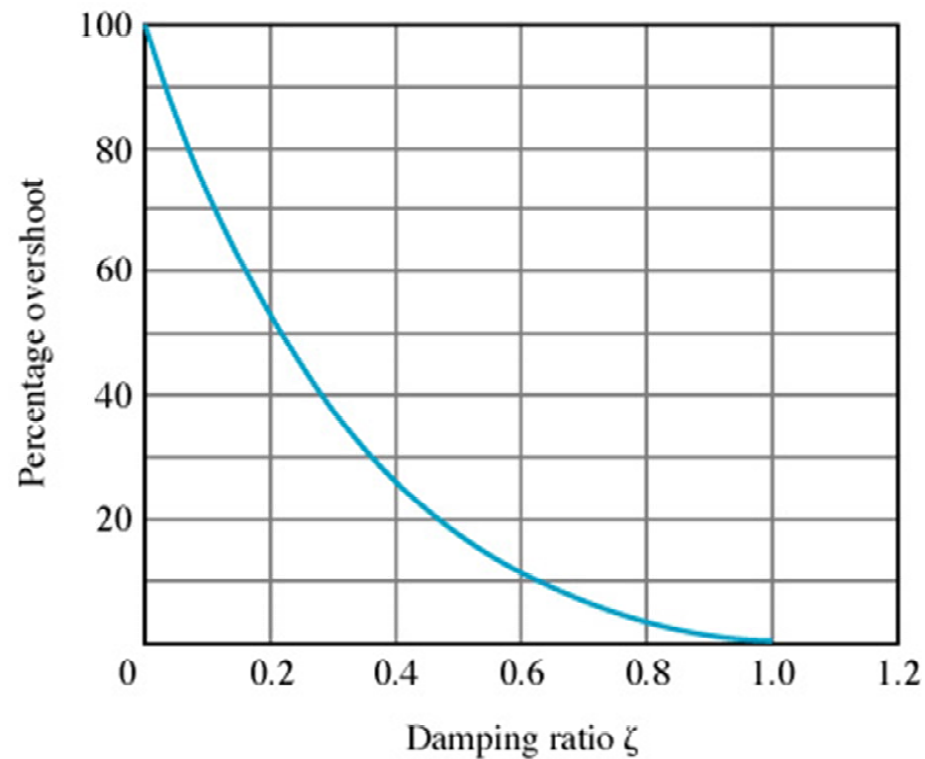
$$\text{max sobre} = y_{\text{max}} - 1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (17)$$

### 3 Sistemas de segunda ordem

O máximo sobresinal percentual é dado por,

$$\text{max sobre\%} = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (18)$$

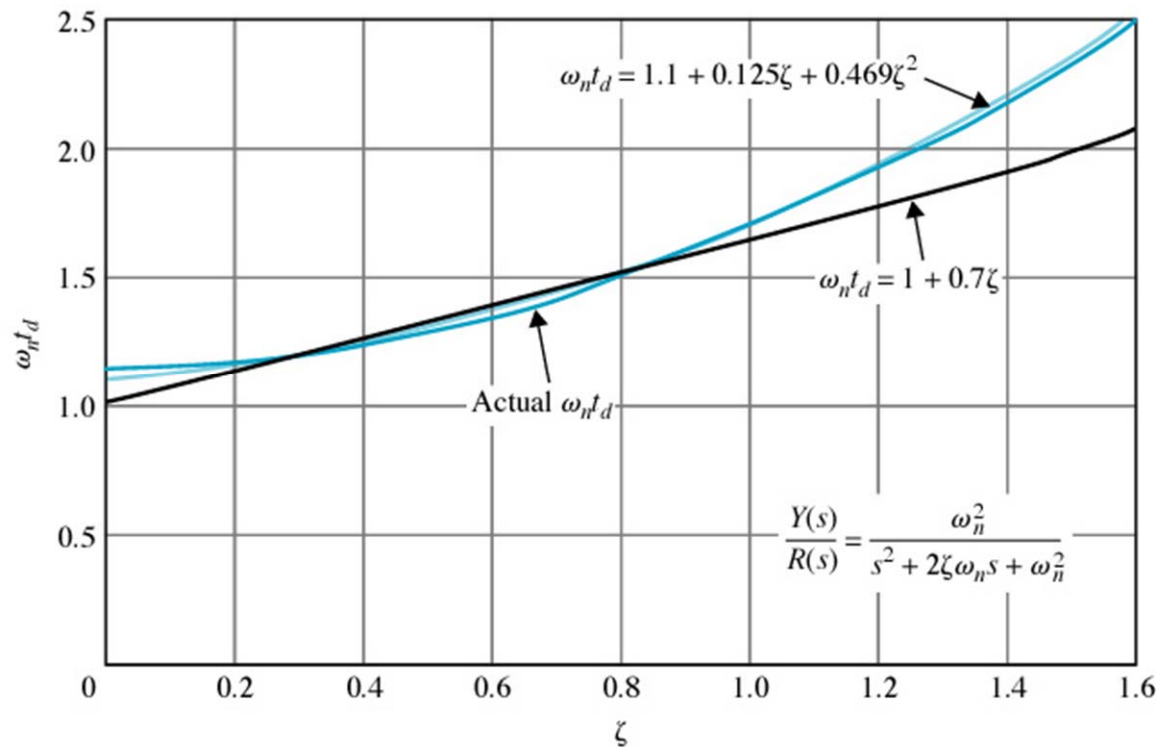
A figura a seguir expõe a relação entre o máximo sobresinal percentual e a taxa de amortecimento.



### 3 Sistemas de segunda ordem

#### TEMPO DE ATRASO E DE SUBIDA

Para o *tempo de atraso*, podemos ajustar  $y(t) = 0.5$  na equação (4) e resolver para  $t$ . Uma forma mais fácil seria plotar  $\omega_n t_d$  versus  $\zeta$ , como mostrado na figura abaixo, e aproximar a curva por uma linha no intervalo de  $0 < \zeta < 1$ . Da figura, o tempo de atraso é aproximado por,



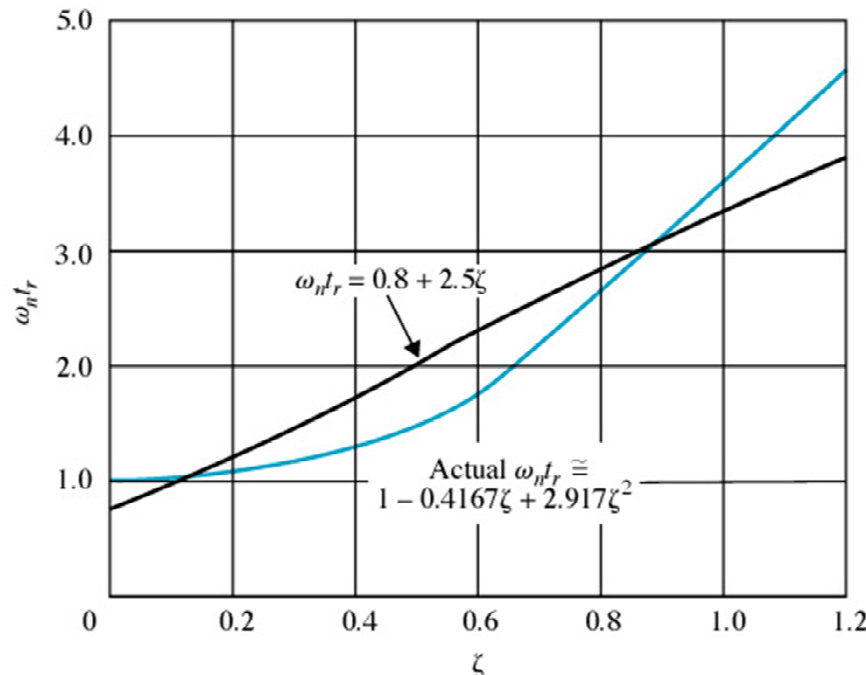
$$t_d \cong \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1.0$$

### 3 Sistemas de segunda ordem

Podemos encontrar uma aproximação melhor usando uma equação de segundo grau para  $t_d$

$$t_d \cong \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1.0$$

Podemos encontrar o *tempo de subida*  $t_r$ , para o qual a resposta ao degrau vai de 10 a 90% do valor final. O gráfico de  $\omega_n t_r$  versus  $\zeta$  é mostrado na figura a seguir. Neste caso, a relação pode novamente ser aproximada por uma linha reta no intervalo de  $\zeta$ .



$$t_r \cong \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1.0$$

### 3 Sistemas de segunda ordem

Podemos encontrar uma aproximação melhor usando uma equação de segundo grau para  $t_r$

$$t_r \cong \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1.0$$

#### TEMPO DE ASSENTAMENTO

Para determinar o *tempo de assentamento* é preciso obter o tempo para o qual  $y(t)$  atinge a faixa de  $\pm 2\%$  do valor de regime estacionário, em torno desse valor e permanece nessa faixa. Utilizando a definição, o tempo de assentamento é o tempo necessário para a amplitude da senóide ser reduzida até atingir o valor 0.02, isto é,

$$e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02$$

### 3 Sistemas de segunda ordem

Explicitando-se  $t$  na equação anterior, o tempo de assentamento  $t_s$  pode ser escrito por,

$$t_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$

Verifica-se que o numerador da equação anterior varia de 3.91 até 4.74 quando  $\zeta$  varia de 0 até 0.9. Pode-se assim, utilizar a seguinte aproximação para o tempo de assentamento,

$$t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Outra faixa de valores utilizada é a de 5% do valor final, que resulta em

$$t_s \cong \frac{3.2}{\zeta\omega_n}$$

## 4 Pólos dominantes

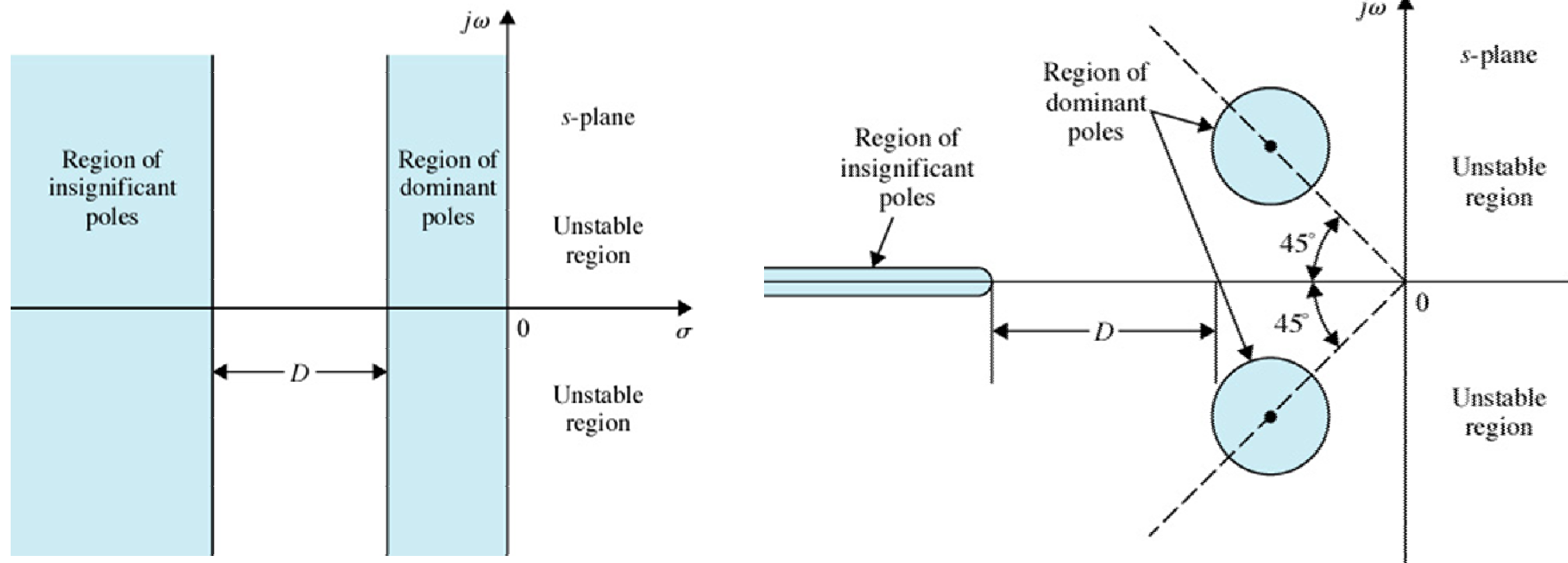
De acordo com as sessões anteriores, fica evidente que a localização dos pólos de uma função de transferência no plano- $s$  afeta diretamente a resposta transiente do sistema. Para propósitos de análise e projeto, é importante identificar os pólos que possuem efeito dominante na resposta transiente do sistema, os quais denominam-se *pólos dominantes*.

Em projeto, podemos utilizar os pólos dominantes para controlar o desempenho dinâmico do sistema, enquanto os pólos insignificantes são usados com o propósito de assegurar que a função de transferência do controlador possa ser realizada por componentes físicos.



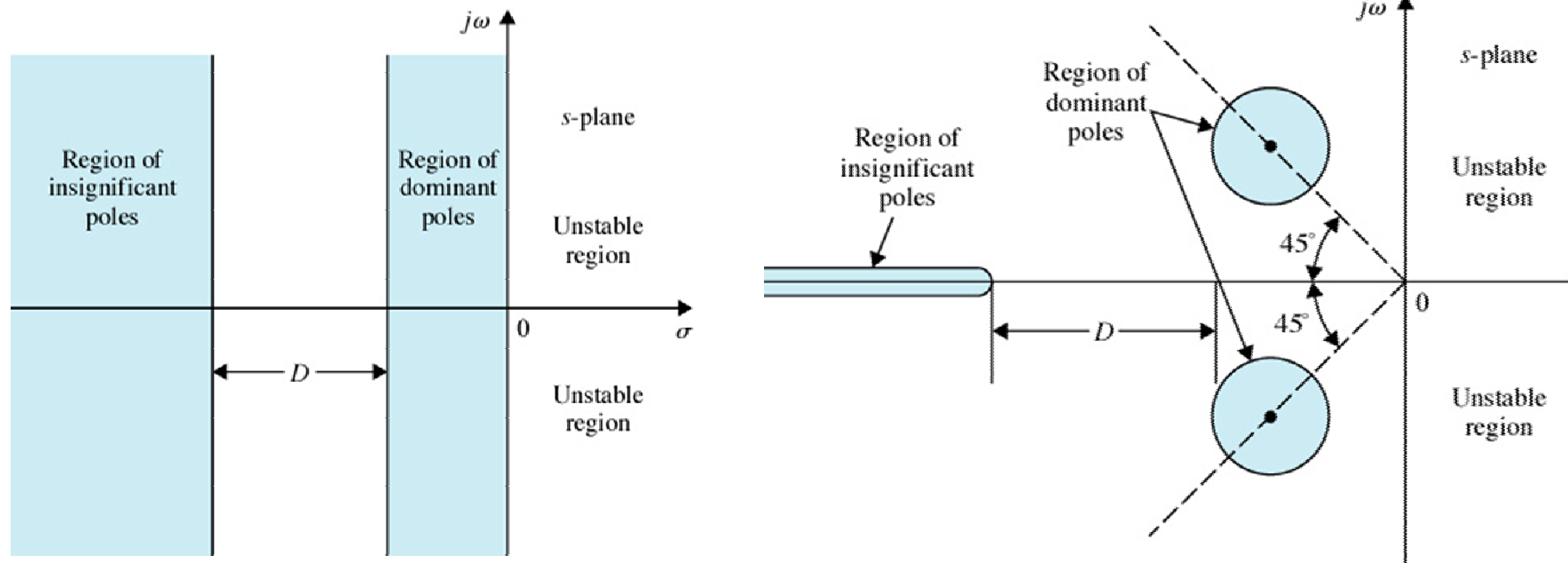
# 4 Pólos dominantes

Os pólos que estão próximos do eixo imaginário no lado esquerdo do plano complexo proporcionam grandes respostas transitórias que vão decaindo de forma relativamente lenta, enquanto os pólos que estão localizados mais distantes do eixo, correspondem às respostas temporais de decaimento mais rápido. A distância  $D$  entre a região dominante e a região menos significativa e expostas nas figuras a seguir.



# 4 Pólos dominantes

A discussão é : Quão grande um pólo é considerado realmente grande ? Observa-se na literatura que se a magnitude da parte real e um pólo for *5 a 10 vezes* que a de um pólo dominante ou a de um par de pólos complexos dominantes, então o pólo pode ser considerado insignificante para a resposta transiente.



# 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

## EFEITO DE PÓLOS ADICIONAIS

Nesta seção as condições a serem atendidas visando a se aproximar o comportamento de um sistema com três pólos de um sistema de dois pólos são agora discutidas. Considere um sistema com três pólos, sendo dois complexos e um sobre o eixo real. Admitindo que os pólos complexos estejam em  $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  e o pólo real esteja em  $-\alpha_r$ , a resposta ao degrau do sistema pode ser determinada a partir de uma expansão em frações parciais. Assim, a transformada da saída fica

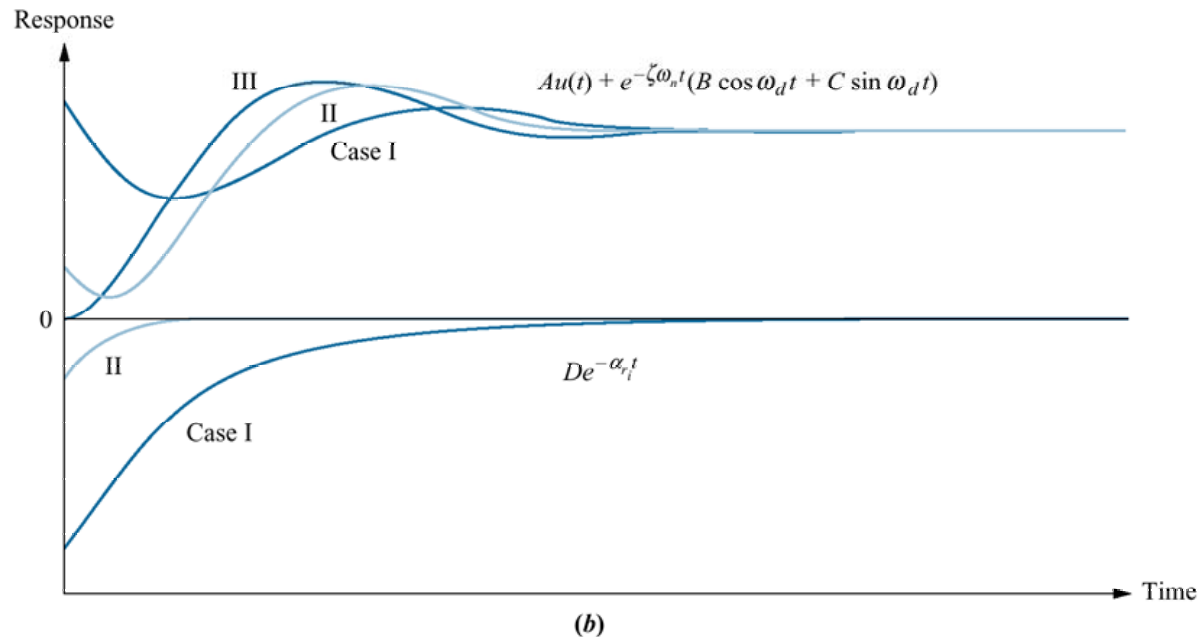
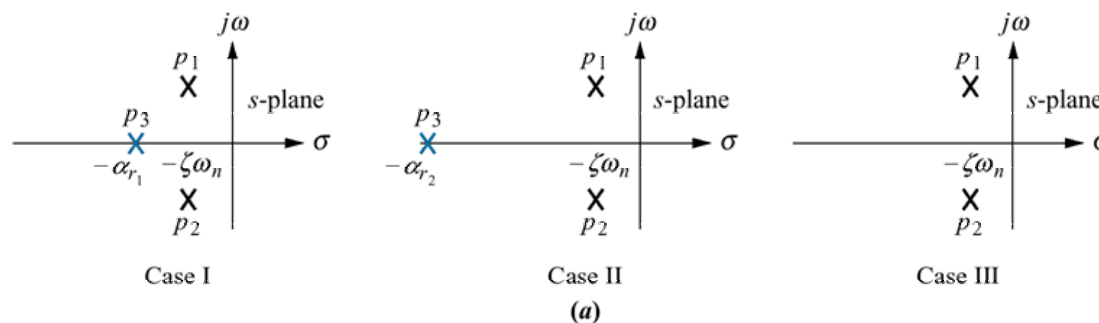
$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s + \zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s + \alpha_r} \quad (1)$$

ou no domínio do tempo,

$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t} (B \cos \omega_d t + C \sin \omega_d t) + De^{-\alpha_r t} \quad (2)$$

# 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

As partes componentes de  $c(t)$  estão mostradas na figura a seguir para os três casos de  $\alpha_r$ . Para o caso I,  $\alpha_r = \alpha_{r1}$  e não é muito maior que  $\zeta\omega_n$ ; para o caso II,  $\alpha_r = \alpha_{r2}$  e é muito maior que  $\zeta\omega_n$ ; e para o caso III,  $\alpha_r = \infty$ .



## 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

Recapitulando a figura anterior e a equação (2). Se  $\alpha_r \gg \zeta\omega_n$  (caso II), a exponencial pura será atenuada muito mais rápido do que a resposta de segunda ordem subamortecida ao degrau. Se o termo da exponencial pura se reduz a um valor insignificante no tempo do primeiro sobrevalor os parâmetros como sobrevalor percentual, o tempo de assentamento e o tempo de pico serão gerados pela componente da resposta ao degrau de segunda ordem subamortecida.

Assim, a resposta total se aproximará da resposta de um sistema de segunda ordem puro (caso III). Caso contrário, o decaimento exponencial é significativo e o sistema não pode ser representado como um sistema de segunda ordem.

Admite-se que se o pólo for cinco vezes mais afastado para a esquerda do que os pólos dominantes, considera-se que o sistema possa ser representado por seu par de pólos de segunda ordem dominantes.

## 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

Pode-se mostrar, através de uma expansão em frações parciais, que a magnitude do resíduo do terceiro pólo, no sistema de três pólos com pólos de segunda ordem dominantes e sem zeros, realmente diminuirá quando o terceiro pólo for movimentado no sentido de afastar-se no semiplano esquerdo. Admita a seguinte resposta ao degrau,  $C(s)$ , de um sistema com três pólos:

$$C(s) = \frac{bc}{s(s^2 + as + b)(s + c)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + as + b} + \frac{D}{s + c}$$

Quando o pólo não-dominante tende a  $\infty$  ou  $c \rightarrow \infty$

$$A = 1; B = -1; C = -a; D = 0.$$

Assim, para este exemplo o resíduo do pólo não-dominante e sua resposta se tornam iguais a zero quando o pólo não-dominante tende ao infinito.

## 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

### EXEMPLO

Determine a resposta ao degrau de cada uma das funções de transferência apresentadas a seguir, comparando-as.

$$T_1(s) = \frac{24,542}{s^2 + 4s + 24,542}$$

$$T_2(s) = \frac{245,42}{(s + 10)(s^2 + 4s + 24,542)}$$

$$T_1(s) = \frac{73,626}{(s + 3)(s^2 + 4s + 24,542)}$$

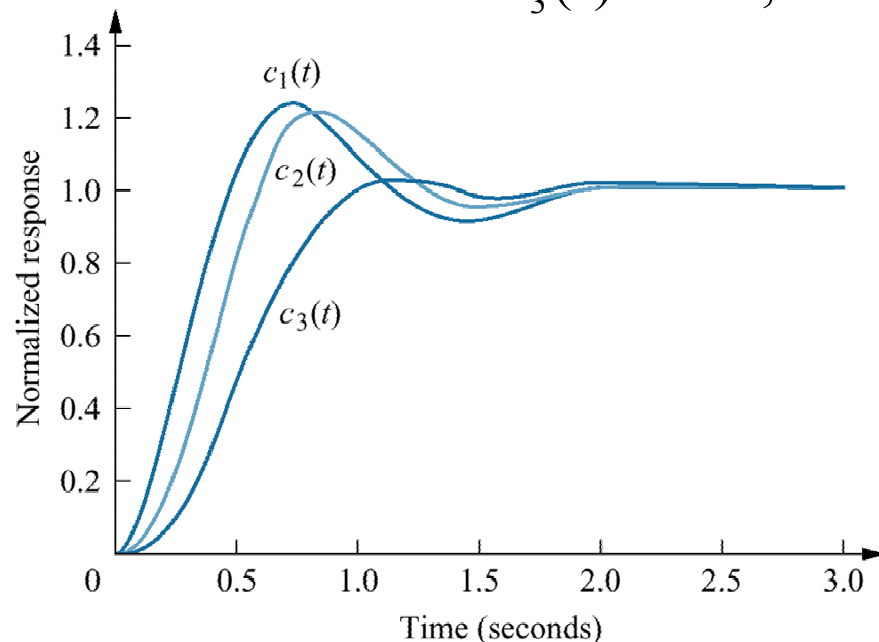
## 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

A resposta ao degrau,  $C_i(s)$ , para a função de transferência,  $T_i(s)$ , pode ser obtida multiplicando a função de transferência por  $1/s$ , e utilizando uma expansão em frações parciais, seguida pela transformada de Laplace inversa para obter a resposta,  $c(t)$ .

$$c_1(t) = 1 - 1,09e^{-2t} \cos(4,532t - 23,8^\circ)$$

$$c_2(t) = 1 - 0,29e^{-10t} - 1,189e^{-2t} \cos(4,532t - 53,34^\circ)$$

$$c_3(t) = 1 - 1,14e^{-3t} + 0,707e^{-2t} \cos(4,532t + 78,63^\circ)$$



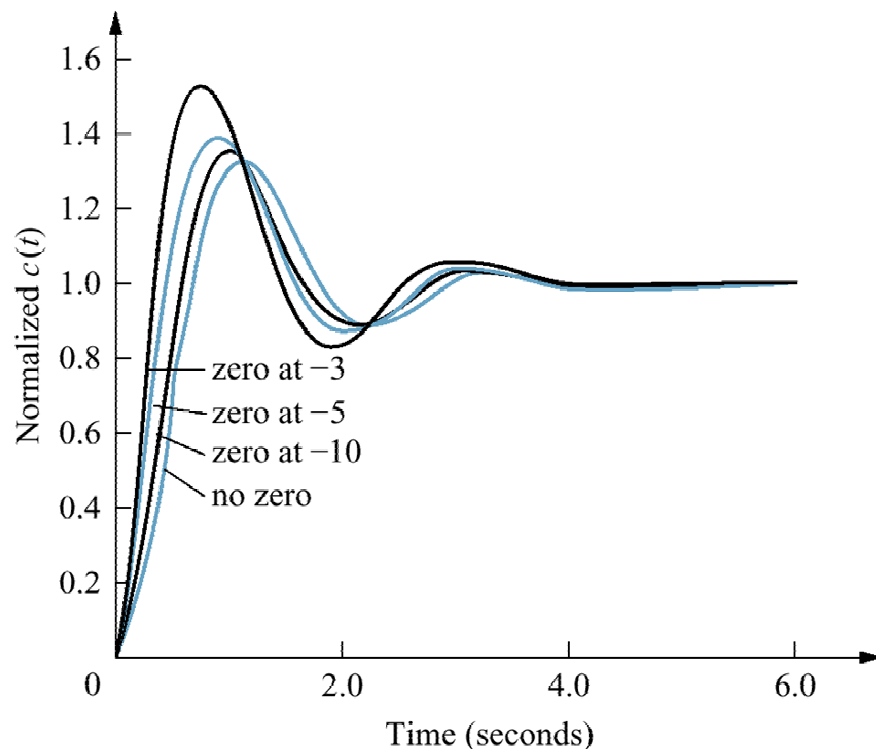
Nota-se na figura ao lado que  $c_2(t)$  com seu terceiro pólo em  $-10$  e o mais afastado dos pólos dominantes, é a melhor aproximação de  $c_1(t)$ , a resposta do sistema de segunda ordem puro;  $c_3(t)$ , com um terceiro pólo mais próximo aos pólos dominantes, fornece o maior erro.



# 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

## EFEITO DE ZEROS ADICIONAIS

Nesta seção adiciona-se um zero no eixo real a um sistema de dois pólos. O zero será adicionado primeiro no semiplano esquerdo e, em seguida, no semiplano direito, e seu efeito será observado e analisado. A seção é concluída realizando-se uma discussão sobre o cancelamento de pólos e zeros.



Considere inicialmente um sistema com dois pólos posicionados em  $(-1 \pm j2,828)$  ao qual são adicionados consecutivamente zeros em  $-3$ ,  $-5$  e  $-10$ . Os resultados normalizados para o valor em regime estacionário são mostrados na figura ao lado.

## 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

Pode-se observar que quanto mais próximo o zero estiver dos pólos dominantes, maior seu efeito na resposta transiente. Na medida em que um zero se afasta dos pólos dominantes, a resposta se aproxima daquela referente ao sistema de dois pólos. Esta análise pode ser confirmada via expansão por frações parciais.

Se admitirmos um grupo de pólos e um zero afastado dos pólos, o resíduo de cada pólo será afetado da mesma forma pelo zero. Assim, basicamente, as amplitudes relativas permanecem as mesmas. Por exemplo, considere a expansão em frações parciais mostrada a seguir,

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{(s+a)}{(s+b)(s+c)} = \frac{A}{s+b} + \frac{B}{s+c} \\ &= \frac{\cancel{(-b+a)} / \cancel{(-b+c)}}{s+b} + \frac{\cancel{(-c+a)} / \cancel{(-c+b)}}{s+c} \end{aligned}$$

## 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

Se o zero for afastado dos pólos, então o parâmetro  $a$  será grande se comparado a  $b$  e  $c$ , e

$$T(s) \approx a \left[ \frac{1/(-b+c)}{s+b} + \frac{1/(-c+b)}{s+c} \right] = \frac{a}{(s+b)(s+c)}$$

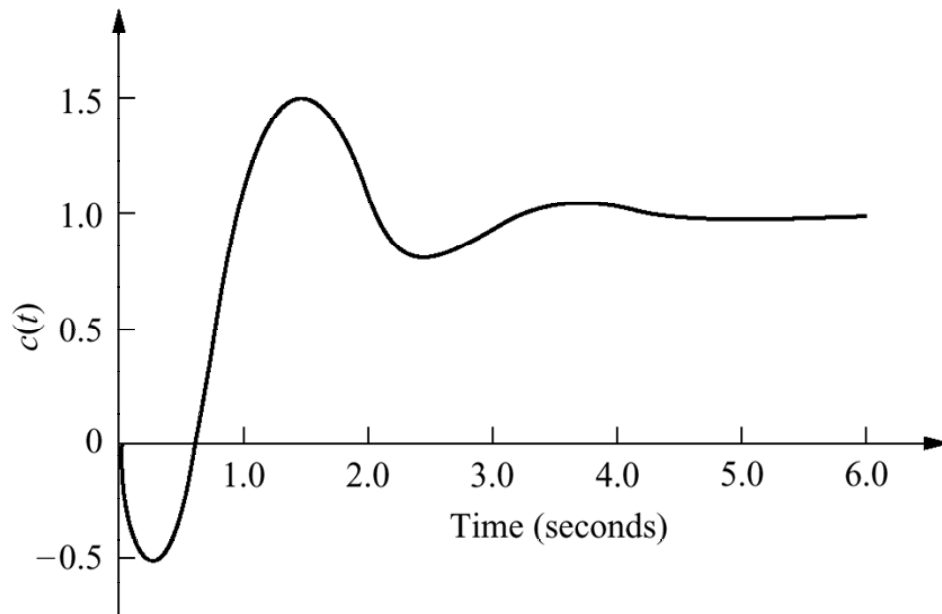
Portanto, o zero se comporta como um simples fator de ganho e não altera as amplitudes relativas das componentes da resposta.

Uma outra forma de se observar o efeito do zero é o seguinte: seja  $C(s)$  a resposta de um sistema,  $T(s)$  com a unidade no numerador. Ao se incluir um zero na função de transferência, obtendo-se  $(s+a)T(s)$ , a transformada de Laplace da resposta será.

$$(s+a)C(s) = sC(s) + aC(s)$$

## 5 Efeitos de pólos e zeros adicionais

Assim, a resposta de um sistema com um zero consiste em duas partes: a derivada da resposta original e uma versão em escala da resposta original. Na medida que  $a$  se torna menor, o termo da derivada contribui mais para a resposta e apresenta um efeito maior. Para as respostas ao degrau a derivada é, basicamente, positiva no início da resposta. Assim, para pequenos valores de  $a$  pode-se esperar um sobrevalor maior nos sistemas de segunda ordem, uma vez que o termo de derivada será aditivo.



No caso do zero estar no semiplano direito, observa-se que o termo derivativo, que normalmente é positivo nos instantes iniciais, será de sinal contrário ao termo da resposta em escala. Assim, de acordo com a figura ao lado, se o termo derivativo,  $sC(s)$ , for maior do que o termo em escala  $aC(s)$ , a resposta inicialmente seguirá termo derivativo no sentido oposto ao da resposta em escala (*sistema de fase não-mínima*).

**OBRIGADO**