1

Disciplina: TEQ102- CONTROLE DE PROCESSOS

Função de Transferência
Processos de Primeira e Segunda Ordem

Profª Ninoska Bojorge

Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF

Sumário

2

Função de Transferência

1. Introdução
   - Definição
   - Vantagens
   - Propriedades
   - Ganho da Função de Transferência
   - Exemplos de Entradas
2. Função de transferência de Primeira Ordem
3. Resposta de Unidades de Processo de Integração
4. Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

Transformada de Laplace

Técnicas de Expansão Parcial

❖ Relembrando

Caso I: Todos os polos, pi, são distintos e reais

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} = \frac{\alpha_1}{(s+p_1)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(s+p_n)}$$

$$\alpha_i = (s+p_i)\left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=-p_i}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t) = \alpha_1 e^{-p_1 t} + \alpha_2 e^{-p_2 t} + \ldots + \alpha_n e^{-p_n t}$$

Transformada de Laplace

Técnicas de Expansão Parcial

❖ Relembrando

Caso II: Algumas raízes são repetidos

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p)^r} = \frac{b_{r-1}s^{r-1} + \cdots + b_0}{(s+p)^r} = \frac{\alpha_1}{(s+p)} + \cdots + \frac{\alpha_r}{(s+p)^r}$$

$$\alpha_{r-i} = \frac{1}{i!}\frac{d^{(i)}}{ds^{(i)}}\left.\left((s+p)^r \frac{N(s)}{D(s)}\right)\right|_{s=-p} \quad (\, i = 0, \ldots, r\text{-}1)$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t) = \alpha_1 e^{-pt} + \alpha_2 e^{-pt} + \ldots + \frac{\alpha_r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-pt}$$

Transformada de Laplace

Técnicas de Expansão Parcial

❖ Relembrando

Caso III: Algumas raízes são complexas

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + d_1 s + d_0} = \frac{\alpha_1 (s+b) + \beta_1 \omega}{(s+b)^2 + \omega^2}$$

Cada um dos fatores repetidos devem ser separados em primeiro lugar. Logo,

$$\frac{\alpha_1 (s+b) + \beta_1 \omega}{(s+b)^2 + \omega^2} = \alpha_1 \frac{(s+b)}{(s+b)^2 + \omega^2} + \beta_1 \frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2}$$

onde:

$$b = d_1 / 2, \quad \omega = \sqrt{d_0 - d_1^{\,2} / 4}$$

$$\alpha_1 = c_1, \quad \beta_1 = (c_0 - \alpha_1 b) / \omega$$

$\mathcal{L}^{-1}$:

$$f(t) = \alpha_1 e^{-bt} \cos \omega t + \beta_1 e^{-bt} \,\mathrm{sen}\, \omega t$$

Função de Transferência

- A dinâmica de processos tem como objetivo avaliar o comportamento do processo durante variações nas suas entradas (alimentação ou carga) do processo.
- Várias plantas industriais são bem representadas por funções de transferência (modelos matemáticos) de primeira ou segunda ordem.
- Os sinais podem ser representados utilizando:
  - Variáveis contínuas ou discretas.
  - As funções de transferência, através das transformadas de Laplace e transformada z.

Função de Transferência

- Uma função de transferência é um modelo matemático dado por um cociente que relaciona a resposta de um sistema (Y(s)) a uma sinal de entrada ou excitação (U(s)).
- Por definição uma função de transferência se pode determinar segundo a expressão:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Num(s)}{Den(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s_n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

onde:
G (s) é a função de transferência (também denotada como *H(s)*);
Y (s) é a transformada de Laplace da resposta do processo e
U (s) é a transformada de Laplace da sinal de entrada ao processo.

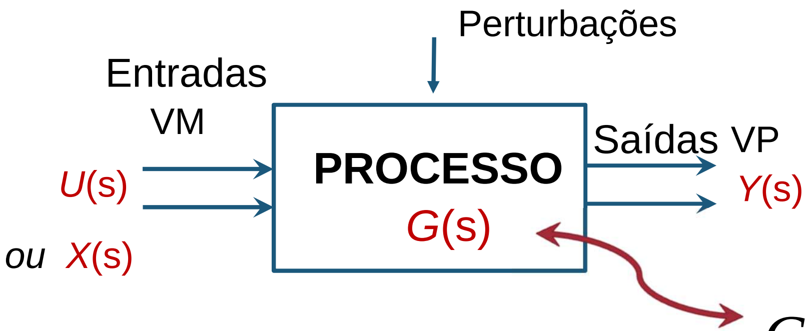
Função de Transferência

<u>A função de transferencia de um sistema:</u>

- Se usa extensivamente na análise e projeto de sistemas lineais invariantes no tempo.
- É um modelo matemático do sistema, no sentido de que expressa a equação diferencial que relaciona a variável de saída com respeito às variáveis de entrada.
- É uma propriedade do sistema, completamente independente do sinal de entrada.
- Relaciona as variáveis de entrada e de saída, mas não proporciona informação sobre a estrutura física do sistema.

Função de Transferência

- Defini-se também como a transformada de Laplace da resposta ao impulso do sistema.
- Se a função de transferência de um sistema é conhecida, pode estudar-se o comportamento do sistema para diferentes funções de entrada.



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Ganho do processo

- Ganho em estado estacionário: A relação entre as mudanças finais na entrada e saída do processo.

$$Ganho = K = \frac{\left(y(\infty) - y(0)\right)}{\left(u(\infty) - u(0)\right)}$$

- Para uma mudança degrau unitário na entrada, o ganho é a mudança na saída,
  - Ganho podem ser não definidos: por exemplo, processos de integração e processos com oscilação constante na saída

Ganho do processo

- A partir do teorema do valor final, para uma variação degrau na entrada com condição inicial de zero tem se:

$$K = \frac{y(\infty)}{1} = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} G(s)$$

- A resposta para a mesma função de transferência para um impulso na entrada, será

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) L\big(\delta(t)\big) = G(s)$$

Função de Transferência

Para encontrar a função de transferência, vamos :

1) Encontrar o ponto de operação (ou de equilíbrio),
2) Se o sistema não for linear, então se vai linearizar em torno ao ponto de equilíbrio,
3) Introduzir variáveis de desvio,
4) Aplicar transformada de Laplace e resolver para a saída,
5) Aplicar a transformada Inversa de Laplace e recuperar as variáveis originais das variáveis de desvio.

Função de Transferência

A FT é uma expressão algébrica para a relação dinâmica entre a entrada e a saída do modelo de processo

Exemplo: $5\frac{dy}{dt} + 4y = u; \qquad y(0) = 1$

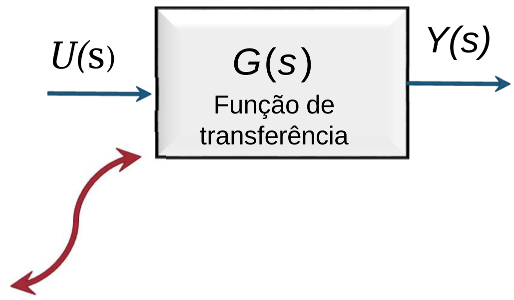
Aplicando transformada de Laplace:

$$5L\left[\frac{d\hat{y}}{dt}\right] + 4L\left[\hat{y}\right] = L\left[\hat{u}\right]$$

$$5\left[sY(s) - y(0)\right] + 4Y(s) = U(s)$$

$$(5s+4)Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(5s+4)} = \frac{0.25}{(1.25s+1)} = G(s)$$

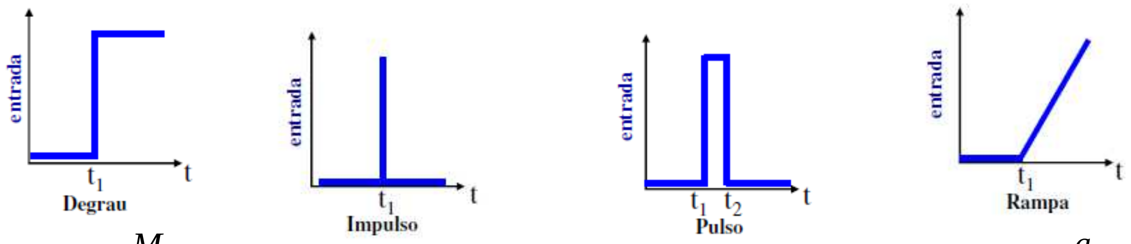


Função de Transferência

- **A função de transferência**
  - **Representa a relação entre os sinais de entrada *U*(*s*) & saída *Y*(*s*) no domínio do Laplace**
  - **Usualmente denotada como *G*(*s*)**
  - ***Y*(*s*) = G(*s*)*U*(*s*)**
  - **Somente aplicável pra modelo linear!**

Função de Transferência: Tipos de Entradas

- **Degrau**: ocorre uma variação abrupta da entrada. Pode ser executada na prática. Por exemplo, uma variação degrau em uma vazão volumétrica pode ser obtida pela abertura brusca de uma válvula.
- **Impulso**: é uma variação abrupta da entrada, entretanto de curtíssima duração (instantânea). Perturbação ideal.
- **Pulso**: é uma variação na entrada, de duração finita (instantânea). Pode ser executada na prática. Utilizada em identificação de sistemas.
- **Rampa**: a entrada varia linearmente com o tempo.

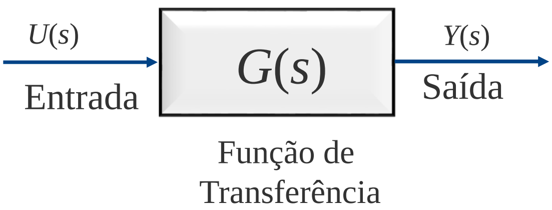


$X_s(s) = \frac{M}{s}$ $\quad X_{impulse}(s) = 1$ $\quad X_{RP}(s) = \frac{h}{s}(1 - \exp(-t_w s))$ $\quad X_R(s) = \frac{a}{s^2}$

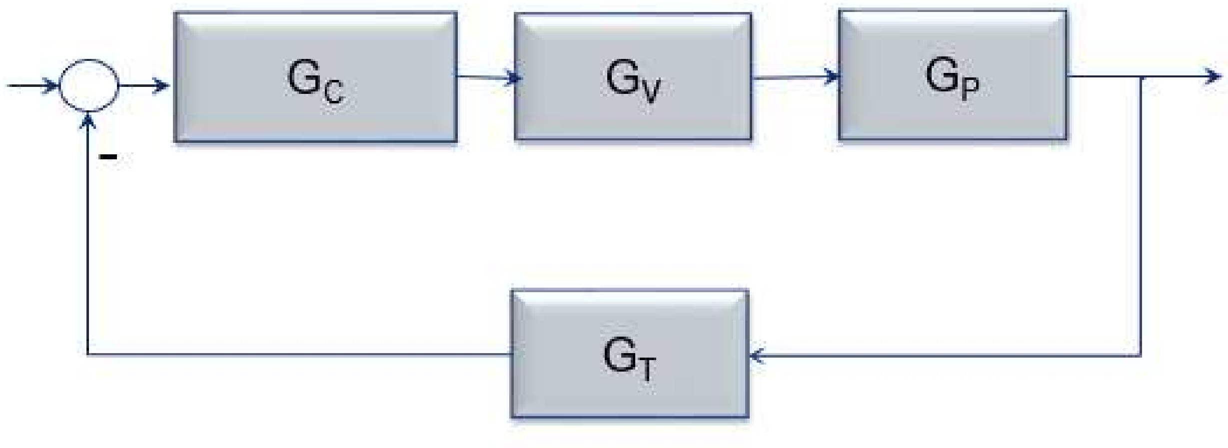
Função de Transferência: Variável de saída

- Definida como a diferencia entre variável e seu valor no estado estacionário
- A função de transferência sempre deve ser especificada em termos de variáveis desvio
- $Y'(s) = G(s)U'(s)$
- Usualmente se omite a notação prima ou “^” para simplicidade

$$u'(t) = u(t) - \bar{u} \quad U'(s) = L[u'(t)] \quad y'(t) = y(t) - \bar{y} \quad Y'(s) = L[y'(t)]$$



na malha de controle feedback...

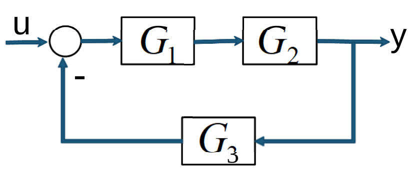


Vantagens da Função de Transferência

- Uma vez conhecida a FT, a resposta de saída para várias entradas pode ser obtido facilmente.

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)U(s)] \neq L^{-1}[G(s)]L^{-1}[U(s)]$$

- Sistema interligado podem ser analisados facilmente. Por álgebra de diagrama de blocos;



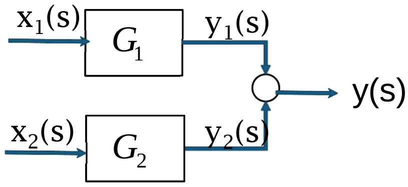
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

- Analisar facilmente o comportamento qualitativo de um processo, tal como a estabilidade, velocidade de resposta, oscilação, etc.
  - Ao inspecionar "polos" e "zeros"
    - Polos: todas raízes satisfazendo, D (s) = 0
    - Zeros: todas raízes satisfazendo, N (s) = 0

Propriedades da Função de Transferência

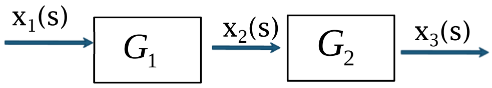
Propriedade Aditiva

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$
$$= G_1(s)x_1(s) + G_2(s)x_2(s)$$



Propriedade Multiplicativa

$$X_3(s) = G_2(s)X_2(s)$$
$$= G_2(s)[G_1(s)x_1(s)] = G_2(s)G_1(s)X_1(s)$$



Realizabilidade física

- Em uma função de transferência, a ordem do numerador (m) é maior do que a ordem do denominador (n) é chamada: "fisicamente irrealizável"

- Se a ordem da derivada para a entrada for mais elevada do que a da saída (requer futuros valores de entrada para corrente de saída).

Veremos mais detalhes em Diagrama de Blocos

Ordens do Sistema

- Função de Transferência Geral

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\theta s}$$

- Ordem do Sistema
  - Ordem do polinômio do denominador, $D(s)$
  - Geralmente igual ao número de EDOs da qual $G(s)$ foi derivada
- Sistema de Primeira-ordem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

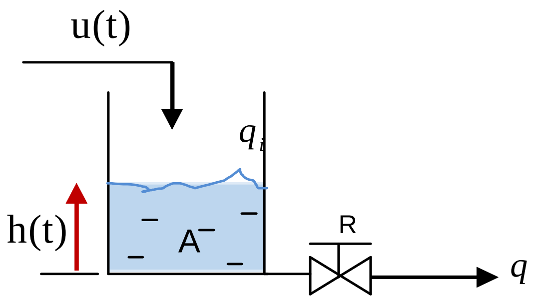
- Sistema de Segunda-ordem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K(\tau_a s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

Função de Transferência de Primeira Ordem

Função de Transferência de Primeira Ordem

- Resposta do Modelo de Primeira Ordem



Esquema de um tanque de fluxo por gravidade

- qi : vazão volumétrica de entrada;
- q : vazão volumétrica de saída;
- A : área de seção transversal do tanque;
- ρ : densidade do líquido;
- R : resistência à passagem do fluxo de saída devido à força de atrito na tubulação de saída;
- h : nível de líquido no tanque (variável de saída do processo), aquela que temos o interesse em controlar.

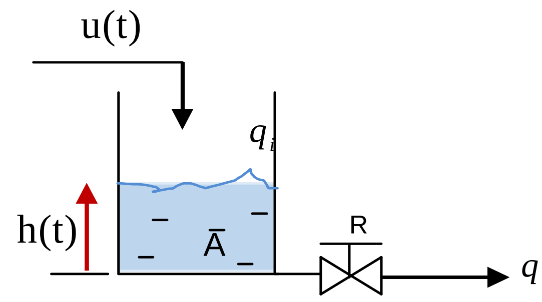
Aplicando Leis de Conservação e de relações constitutivas:

$$q_i(t).\rho_i(t) - q(t).\rho(t) = A\rho(t)\frac{dh(t)}{dt} \qquad (1)$$

$$q(t) = \frac{h(t)}{R} \qquad (2)$$

Função de Transferência de Primeira Ordem

- Resposta do Modelo de Primeira Ordem...



Esquema de um tanque de fluxo por gravidade

Subst. (2) em (1) e reordenando:

$$A\rho(t)\frac{dh(t)}{dt}+\frac{h(t)}{R}.\rho(t)=q_i(t).\rho_i(t)$$

$$RA\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=Rq_i(t)$$

$\mathcal{L}$

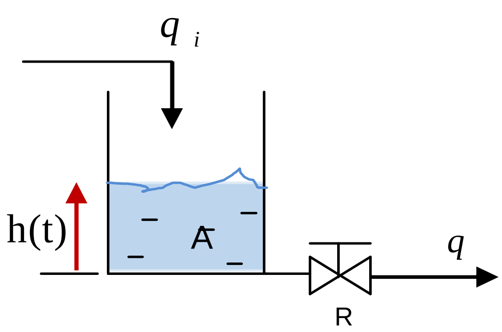
$$h(s)=\frac{R}{1+\underbrace{R.A}_{\tau}s}q_i(s)$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$h(t)=Rq_i(1-e^{-t/\tau})$$

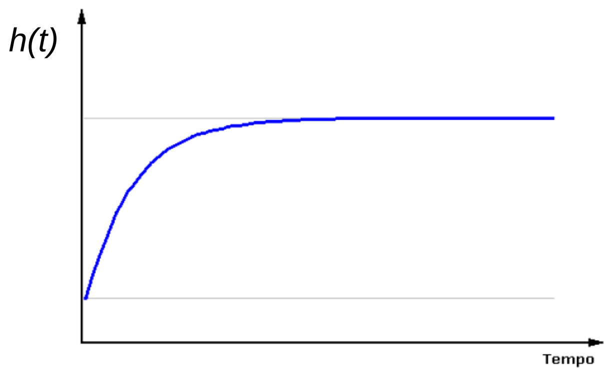
Função de Transferência de Primeira Ordem

- Resposta do Modelo de Primeira Ordem...



Esquema de um tanque de fluxo por gravidade

$$h(t)=Rq_i(1-e^{-t/\tau})$$



Resposta a degrau para um sistema de 1ª ordem

Função de Transferência de Primeira Ordem

Forma Geral de uma Função de Transferência de Primeira Ordem

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad (5.1)$$

onde K é o ganho estático o processo e τ é a constante de tempo.

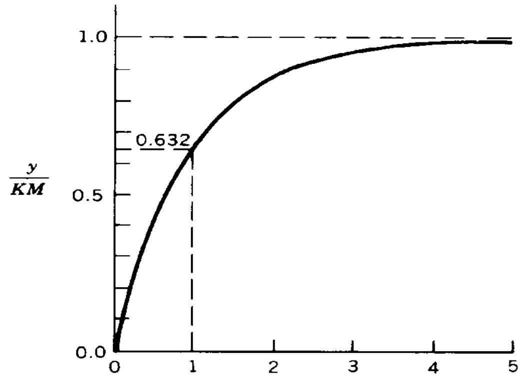
Encontrar Y(s) e y(t) para alguma entrada particular *X(s)*?

1. Resposta degrau.

$$X(s) = \frac{M}{s} \qquad (5.2)$$

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{M}{s} \qquad (5.3)$$

$$y(t) = KM\,(1 - \exp(-t/\tau)) \qquad (5.4)$$

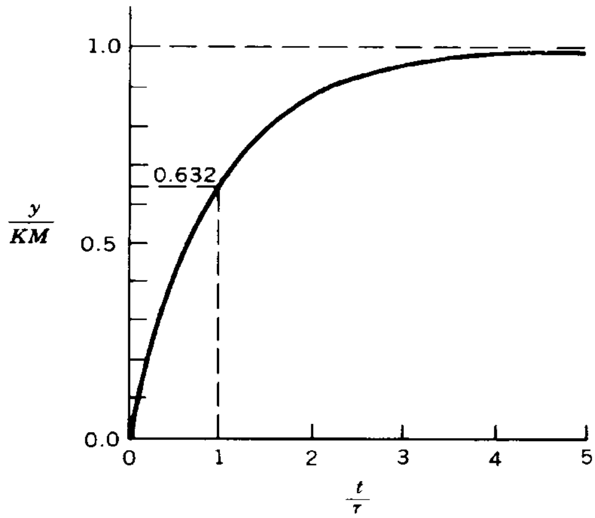


Resposta ao Degrau

$$y(t) = KM\,(1 - \exp(-t/\tau)) \qquad (5.4)$$

Resposta de sistema de 1ª ordem a entrada degrau

t	y/KM = 1 – e $^{-t/\tau}$
0	0
τ	0,6321
2τ	0,8647
3τ	0,9502
4τ	0,9817
5τ	0,9933

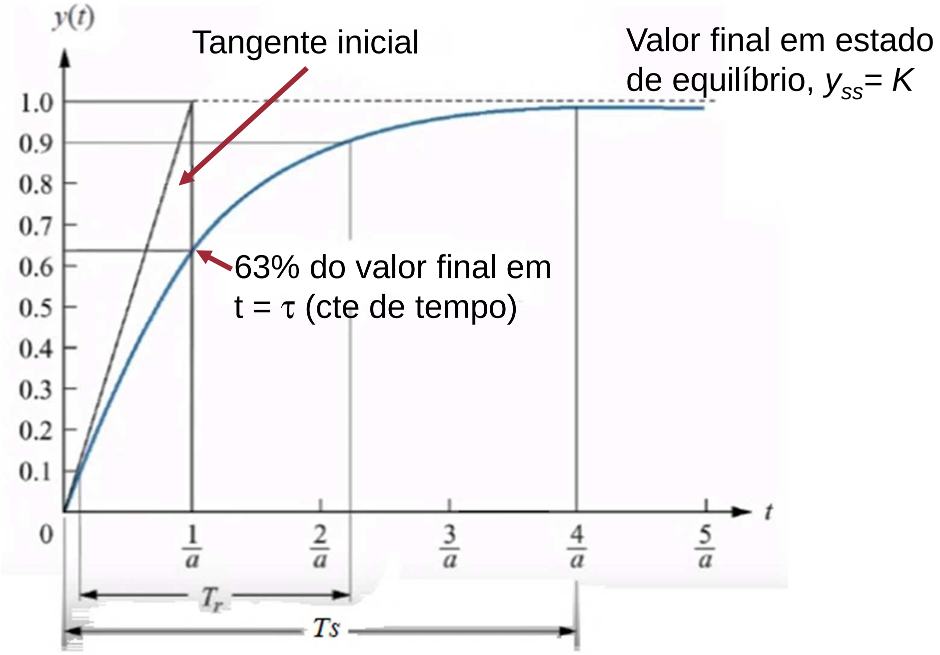


Uma característica de sistema de primeira ordem é que não responde instantaneamente a uma súbita mudança na sua entrada, se não que se da depois de um intervalo de tempo igual à constante de tempo do processo (τ), a resposta do processo é apenas 63,2% da variação total.

Teoricamente, o resultado do processo nunca atinge o novo valor do estado estacionário, uma aproximação do novo valor obtém-se quando t é igual a 3 - 5 vezes a constante de tempo do processo.

Função de Transferência de Primeira Ordem

Resposta ao degrau



Função de Transferência de Primeira Ordem

Medidas de desempenhos

Constante de tempo τ = 1/a: Tempo que leva a resposta degrau ao 63% do valor final

$$y(t)\Big|_{t=\tau} = 1 - e^{-at}\Big|_{t=\tau} = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}37 = 0{,}63$$

Tempo de elevação *Tr:* tempo que toma a resposta degrau para ir de 10% pra 90 % do valor final.

$$1 - e^{-at}\Big| = 0{,}1 \rightarrow t_{0,1} = \frac{0{,}105}{a}$$

$$1 - e^{-at} = 0.9 \rightarrow t_{0,9} = \frac{2{,}303}{a}$$

$$T_r = t_{0,9} - t_{0,1} \approx \frac{2{,}2}{a} = 2{,}2\tau$$

Tempo de assentamento *Ts:* tempo que toma a resposta degrau para atingir ± 2% do seu valor final.

$$1 - e^{-at}\Big| = 0{,}98 \rightarrow t_s \approx \frac{4}{a} = 4\tau$$

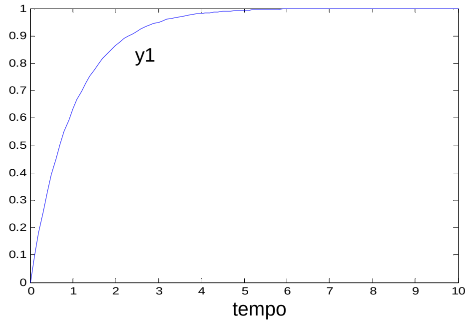
Função de Transferência de 1ª Ordem

Efeito do ganho, *K*

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{\tau s+1}$$

$$G_1(s)=\frac{1}{s+1}$$

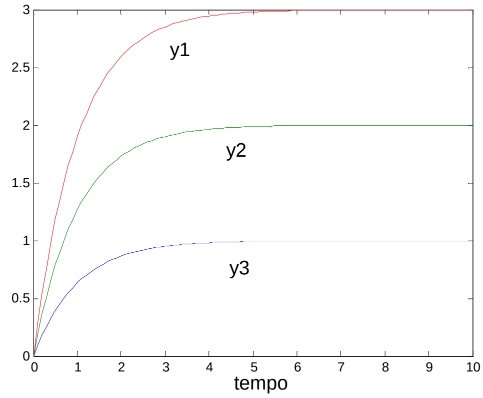
```
G1= tf(1,[1,1]);
t = [0:0.1:10]';
plot(t,y1)
```



$$G_2(s)=\frac{2}{s+1}$$

$$G_2(s)=\frac{3}{s+1}$$

```
G1= tf(1,[1,1]);
G2 = tf(2,[1,1]);
G3 = tf(3,[1,1]);
t = [0:0.1:10]';
y1 = step(G1,t);
y2 = step(G2,t);
y3 = step(G3,t);
plot(t,y1,t,y2,t,y3)
```



Função de Transferência de 1ª Ordem

Efeito da constante de tempo, τ

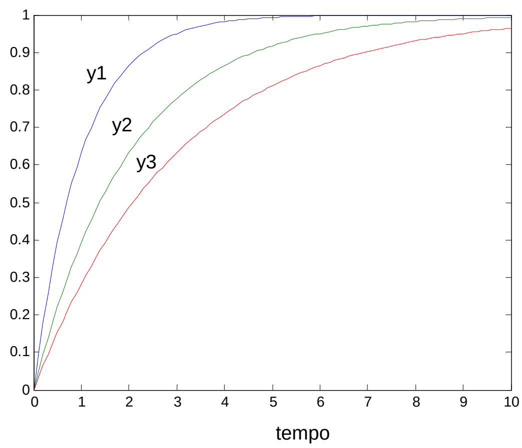
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{\tau s+1}$$

$$G_1(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$G_2(s)=\frac{1}{2s+1}$$

$$G_2(s)=\frac{1}{3s+1}$$

```
G1= tf(1,[1,1]);
G2 = tf(2,[2,1]);
G3 = tf(3,[3,1]);
t = [0:0.1:10]';
y1 = step(G1,t);
y2 = step(G2,t);
y3 = step(G3,t);
plot(t,y1,t,y2,t,y3)
```



2. Resposta Rampa

$$X(s)=\frac{a}{s^2} \qquad (5.5)$$

$$Y(s)=\frac{Ka}{s^2(\tau s+1)}=\frac{Ka\tau^2}{\tau s+1}-\frac{Ka\tau}{s}+\frac{Ka}{s^2}$$

Propriedade interessante para grandes valores de tempo (t >>τ).

$$y(t)=Ka\tau(\exp(-t/\tau)-1)+kat \qquad (5.7)$$

$$y(t)\approx Ka\tau(t-\tau) \qquad (5.8)$$

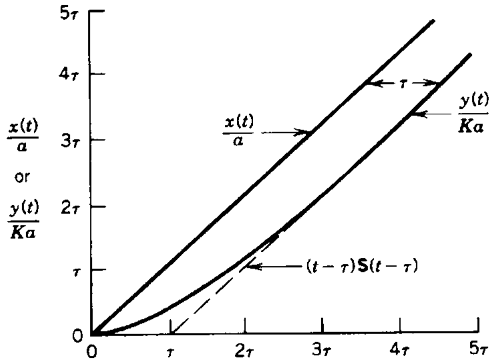


Figura resposta Rampa
- Comparação de entrada e saída

Após um período inicial transitório, a entrada Rampa produz uma saída rampa com inclinação igual a Ka, mas deslocada no tempo, pela cte de tempo do processo, τ.

3. Resposta Senoidal

$$X(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (5.9)$$

$$Y(s)=\frac{KA\omega}{(s^2+\omega^2)(\tau s+1)}=\frac{KA}{\omega^2\tau^2+1}\left[\frac{\omega\tau^2}{\tau s+1}-\frac{s\omega\tau}{s^2+\omega^2}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] \qquad (5.10)$$

– Por identidades trigonométricas.

$$y(t)=\frac{KA}{\omega^2\tau^2+1}\left[\omega\tau\exp(-t/\tau)-\omega\tau\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\right] \qquad (5.11)$$

onde:

$$y(t)=\frac{KA\omega\tau}{\omega^2\tau^2+1}\exp(-t/\tau)+\frac{KA}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}\sin(\omega t+\phi) \qquad (5.12)$$

- Por identidades trigonométricas

$$\phi=\tan^{-1}(\omega\tau)$$

onde:

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi) \qquad (5.13)$$

$$\phi=\tan^{-1}(b/a)$$

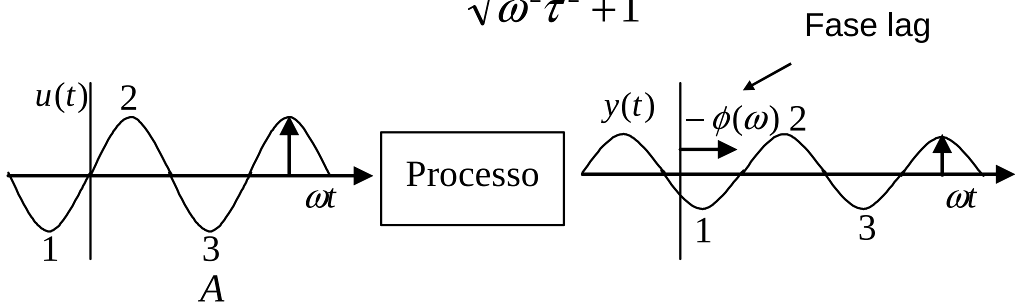
Função de Transferência de Primeira Ordem

Observações:

Em ambos (5.11) e (5.12), qdo $t \to \infty$ o termo exponencial, tende para zero e fica como uma resposta pura senoidal.

Resposta de Frequência! (será discutida em aulas posteriores).

$$y(t) = \frac{KA}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$$



Resposta típica senoidal

5.3 Resposta de Unidades de Processo de Integração

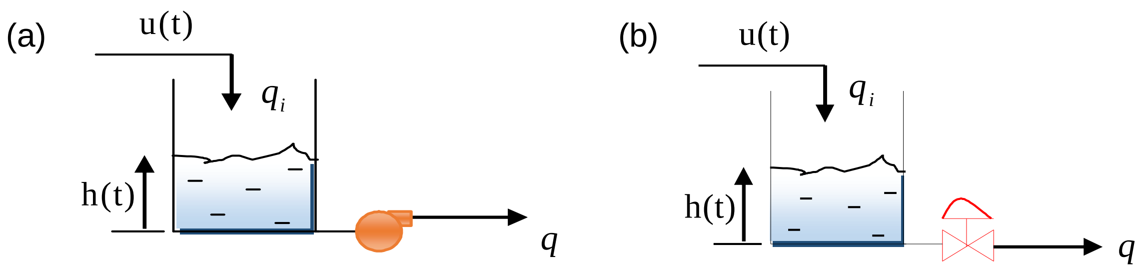
O que se entende por processo de integração?

Processo de integração tem um fator (1/s) em sua função de transferência.

- Em malha aberta o processo é instável (não-auto-regulação) .

Um processo que não pode chegar a um novo estado de equilíbrio quando é sujeito a mudanças degrau na entradas é chamado de “processo em malha aberta instável“ ou “Processo não-auto-regulatório".

Qual sistema é um processo de integração?



Sistema de nível de líquido com uma bomba (a) ou válvula (b).

Resposta: (a) é o processo de integração!

A vazão do efluente em (b) aumenta automaticamente se o nível aumenta . Portanto, se o nível no reservatório é maior, então a vazão do efluente aumentará. Se a vazão de efluentes aumenta também a vazão afluente aumentará, até o nível convergir.

◊ Sistema de nível de líquido com uma válvula é um processo estável (ou processo auto regulatório).

Mas, no sistema (a), independentemente do nível, a vazão do efluente é constante devido à bomba. Assim, se a vazão do afluente é maior que a vazão do efluente o nível sempre aumentará, e vice-versa. ou seja, a diferença entre a vazão do afluente e a vazão de efluente é integrado ao processo de saída (o nível).

◊ Sistema de nível de líquido com uma bomba é um processo instável (ou processo não-auto-regulatório).

- **Exemplo (para o caso A)**

$$A\frac{dh}{dt} = q_i(t) - q(t) \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar{h}}^{h(t)} dh = h(t) - \bar{h} = \frac{1}{A}\int_0^t [q_i(t^*) - q(t^*)]dt^* \quad (5.14)$$

onde *q* é independente do *h*

$$AsH(s) = Q_i(s) - Q(s) \qquad (5.15)$$

$$H(S) = \frac{1}{A}\boxed{\frac{1}{s}}Q_i(s) - \frac{1}{A}\boxed{\frac{1}{s}}Q(s) \qquad (5.16)$$

Processo de Integração

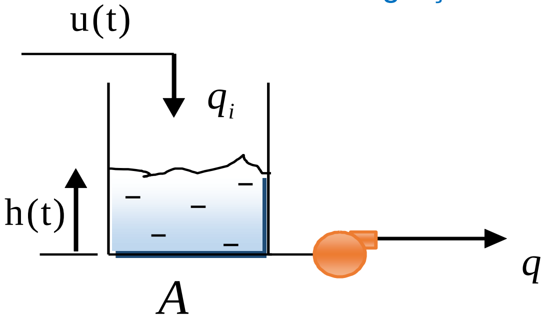
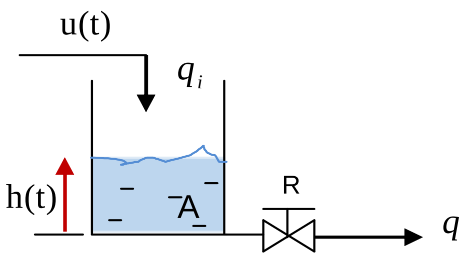


Figura – Sistema de Nível de Liquido com um bomba

Função de Transferência de Primeira Ordem

b) Modelo de Primeira Ordem



Esquema de um tanque de fluxo por gravidade

Subst. (2) em (1) e reordenando:

$$A\rho(t)\frac{dh(t)}{dt}+\frac{h(t)}{R}.\rho(t)=q_i(t).\rho_i(t)$$

$$RA\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=Rq_i(t)$$

$$h(s)=\frac{R}{1+R.A.s}q_i(s)$$

$$h(t)=Rq_i(1-e^{-t/\tau})$$

Função de Transferência de Segunda Ordem

5.4 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

1. Definição de sistema de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem é aquele cuja saída y(t) é descrita pela solução de uma equação diferencial de segunda ordem.

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a \ y = bu(t) \qquad 5.17$$

onde $u(t)$ é a entrada (ou função força).

Se a_0 é diferente de zero, a equação anterior se escreverá:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = K_P u(t) \qquad 5.18$$

5.4 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem ...cont.

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = K_P u(t) \qquad 5.18$$

onde: $\tau^2 = \frac{a_2}{a}, \quad 2\xi\tau = \frac{a_1}{a} \quad e \quad K_P = \frac{b}{a}$

a equação (5.18) é a forma normal de um sistema de segunda ordem, onde

τ : período de oscilação normal do sistema,

ξ : fator de amortecimento

K_p : ganho estacionário, ou ganho simples do processo.

A função de transferência padrão de um sistema de segundo ordem:

$$G(s) = \frac{\overline{y}(s)}{\overline{u}(s)} = \frac{K_P}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau \, s + 1} \qquad 5.19$$

5.4 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem ...cont.

A função de transferência de segunda ordem pode surgir fisicamente.

- Dois processos de 1ª- ordem conectados em séries.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K_1K_2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}=\frac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \qquad (5.20)$$

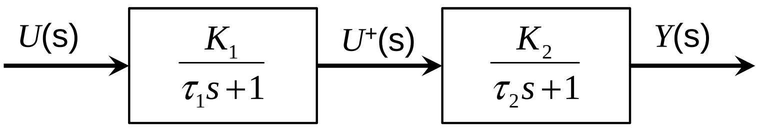
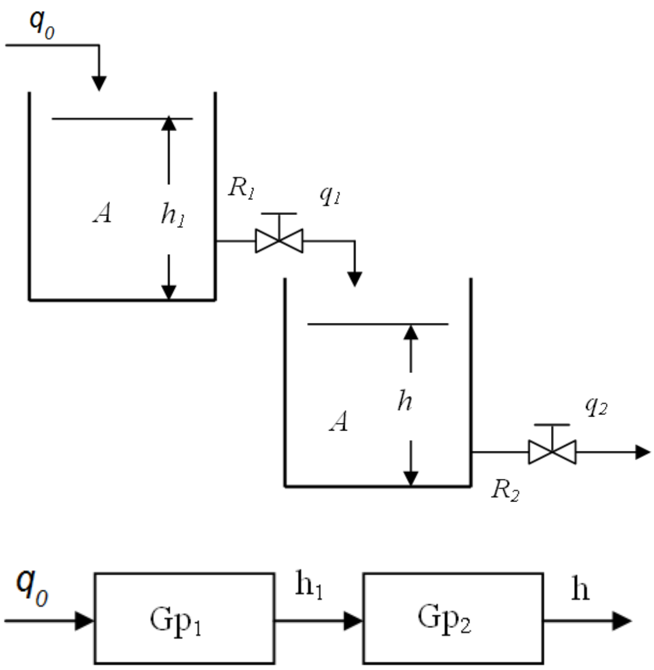


Figura – Dois sistemas de primeira ordem em série resulta num sistema de segunda ordem.

– O modelo do processo: equação diferencial de segunda ordem

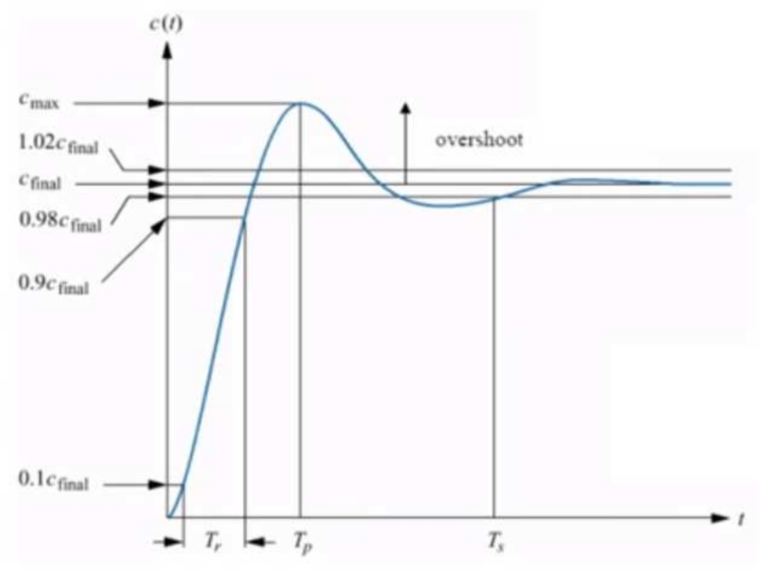
$$G(s)=\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}=\frac{K_P}{\tau^2 s^2+2\xi\tau\, s+1} \qquad 5.19$$

5.4 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem



Exemplo de Sistema de dois tanques em série

Resposta características do desempenho de um processo 2^{da}-ordem a um Degrau



1. t_r :Tempo de elevação.
2. t_P :Tempo do 1º pico.
3. T_S: Tempo de assentamento

Uma série de termos que descrevem a dinâmica dos processos subamortecidos.

1. **Tempo de elevação** (t_r) é o tempo a saída processo leva a primeira atingir o valor de estado estacionário de novo.
2. **Tempo do 1º pico** (t_P) é o tempo necessário para a saída para atingir o seu valor máximo em primeiro lugar.
3. **Tempo de assentamento** (t_S) é definido como o tempo necessário para atingir a saída do processo e permanecem dentro de uma banda cuja largura é = ± 5% da alteração total em y.
4. **Overshoot.** $OS = a/b$
5. **Tempo de Decaimento**

$$DR = c/a$$

6. **Período (*P*)** é o tempo entre dois picos sucessivos da resposta.

$$P = (OS)^2 = \exp(-2\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2})$$

- **Tempo de subida.**

$$t_r = \frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi - \psi)$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\exp(-\dfrac{\zeta t}{\tau})\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\dfrac{t}{\tau} + \psi) \\ \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\dfrac{t}{\tau} + \psi) = 0 \end{array}\right]$$

- **Tempo do 1ro pico** $\left[\quad dy/dt = 0\right]$

$$t_p = \frac{\tau\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- **Overshoot.**

$$OS = \exp(-\pi\zeta\big/\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$[\quad a = y(t = t_p) - b = KM\exp(-\pi\zeta\big/\sqrt{1-\zeta^2})]$$

- **Razão de decaimento** $DR = (OS)^2 = \exp(-2\pi\zeta\big/\sqrt{1-\zeta^2})$

$$[\quad c = y(t = 3\tau\pi\big/\sqrt{1-\zeta^2}) - b = KM\exp(-3\pi\zeta\big/\sqrt{1-\zeta^2})\ ]$$

- **Período de oscilação** $P = \dfrac{2\tau\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

- Três subcasos importantes.
  - Denominador de eq.(5.19):

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = \left(\frac{\tau s}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} + 1\right)\left(\frac{\tau s}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} + 1\right) \qquad (5.21)$$

– Raízes ;

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad (5.22) \qquad\qquad \tau_2 = \frac{\tau}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad (5.23)$$

Table 5.2 The Three Forms of Second-Order Transfer Functions

Case	*Range of Damping Coefficient*	*Characterization of Response*	*Roots of Characteristic Equation*
a	$\zeta > 1$	Overdamped	Real and unequal
b	$\zeta = 1$	Critically damped	Real and equal
c	$0 \leq \zeta < 1$	Underdamped	Complex conjugates (of the form $a + jb$ and $a - jb$)

4 $\zeta < 0$; sistema de segunda ordem instável que teria uma resposta sem limites para qualquer entrada.

Respostas da FT 2ª ordem para entrada tipo Degrau

$$X(s) = \frac{M}{s}, \quad Y(s) = \frac{KM}{(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)s} \qquad (5.24)$$

Caso a $\zeta > 1$, raízes são reais e distintas: **Sobreamortecida**

$$y(t) = KM\{1 - \exp(-\frac{\zeta t}{\tau})[\cosh(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sinh(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}t)]\} \quad (5.25)$$

Caso b. $\zeta = 1$, raízes duplas : **Criticamente amortecida**

$$y(t) = KM[1 - (1 + \frac{t}{\tau})\exp(-\frac{\zeta t}{\tau})] \qquad (5.26)$$

Caso c. $0 \leq \zeta < 1$, raízes complexas: **Subamortecida**

$$y(t) = KM\{1 - \exp(-\frac{\zeta t}{\tau})[\cos(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}t)]\}$$

$$= KM\{1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\exp(-\frac{\zeta t}{\tau})\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau} + \psi)\} \qquad (5.27)$$

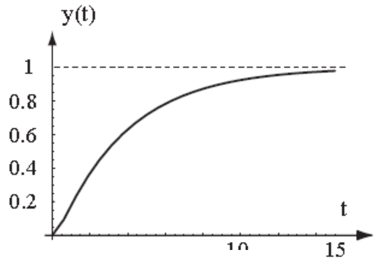
onde $\psi = \tan^{-1}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$

Respostas da FT 2ª ordem para entrada tipo Degrau

$$X(s) = \frac{M}{s}, \quad Y(s) = \frac{KM}{(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)s} \qquad (5.24)$$

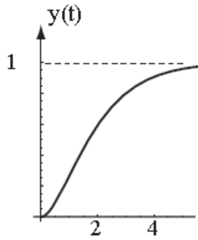
Caso a $\zeta > 1$, raízes são reais e $\neq$:

Sobreamortecida



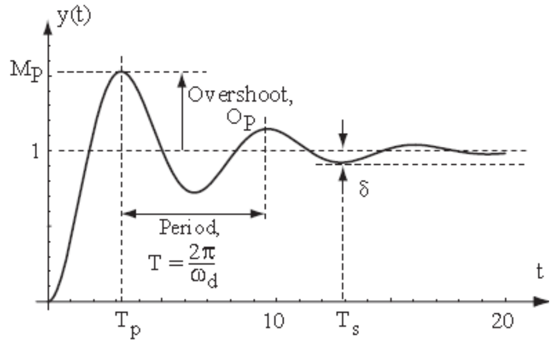
Caso b. $\zeta = 1$, raízes duplas :

Criticamente amortecida



Caso c. $0 \le \zeta < 1$, raízes complexas:

Subamortecida



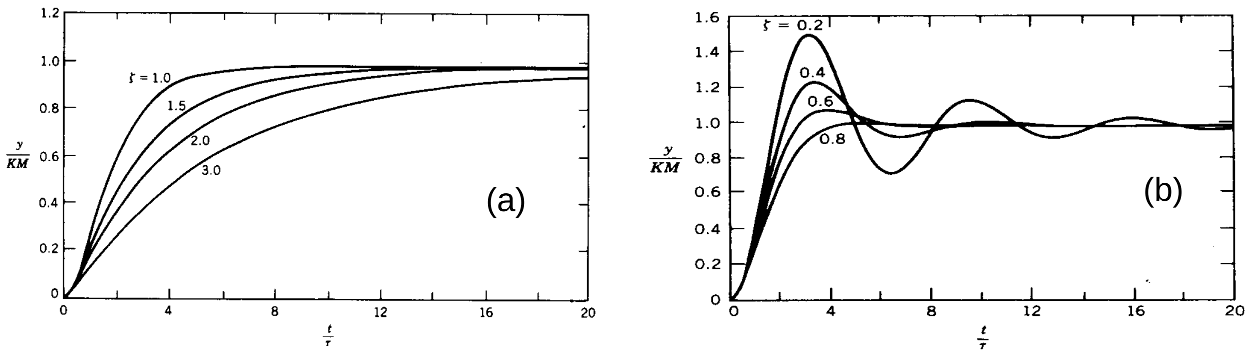


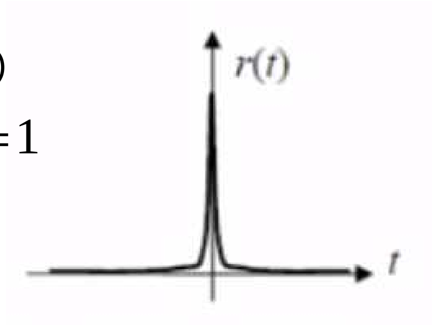
Figura - Resposta de processos de segunda ordem para perturbação Degrau
(a) sobreamortecida e criticamente amortecida (b) subamortecida

- **Observação**
  - Respostas que exibem oscilação e *overshoot* ($y/KM > 1$) são obtidas apenas para valores de ζ inferiores a hum.
  - Valores grandes de ζ resulta uma resposta lenta.
  - Resposta mais rápida, sem *overshoot* $\zeta = 1$ é obtida para o caso de amortecimento crítico.

Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

- **Resposta ao Impulso**

Considere a resposta ao impulso r(t) = δ(t)



$$Y(s) = G(s)R(s) \qquad com\, R(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{K}{(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)}$$

Para um sistema subamortecido (ζ <1) com polos complexo

$$s_1, s_2 = -\zeta\tau \pm j\tau\sqrt{1-\zeta^2}$$

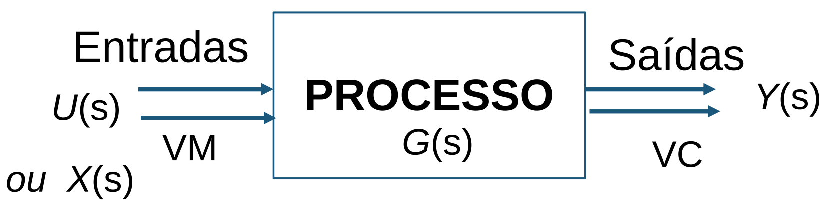
cuja T. L^{-1}

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\frac{\zeta t}{\tau}) \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau} + \cos^{-1}\zeta)\}$$

Decaimento exponencial com
parte real do polo em - ζ

Funções de Transferências comuns

K=Ganho; τ = constante de tempo; ζ= fator de amortecimento; t_D=tempo morto



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{VC}{VM}$$

Funções de Transferências comuns

K=Ganho; τ = constante de tempo; ζ= fator de amortecimento; t_D=tempo morto

- Sistema de primeira ordem $$\frac{VC(s)}{VM(s)}=\frac{K}{\tau s+1}$$
- Sistema de segunda ordem $$\frac{VC(s)}{VM(s)}=\frac{K}{\tau^2 s^2+2\tau\zeta s+1}$$
- Primeira ordem mais tempo morto $$\frac{VC(s)}{VM(s)}=\frac{K}{\tau s+1}e^{-t_D s}$$
- Segunda ordem mais tempo morto

$$\frac{VC(s)}{VM(s)}=\frac{K}{\tau^2 s^2+2\tau\zeta s+1}e^{-t_D s}$$