

CONTROLE DE PROCESSOS

1 - HISTÓRICO

- O primeiro trabalho significativo em controle automático foi o de James Watt, que construiu um controlador centrífugo para controle de velocidade de uma máquina a vapor no século XVIII.
- Em 1922, Minorsky trabalhou em controladores automáticos para pilotagem de navios e estudou a estabilidade de sistemas a partir das equações diferenciais que descrevem o sistema.
- Em 1932, Nyquist desenvolveu um procedimento relativamente simples para determinar a estabilidade de sistemas de malha fechada.
- Em 1934, Hazen, que introduziu o termo "servomecanismo" para sistemas de controle de posição, discutiu o projeto de servomecanismos a relé capazes de seguir muito de perto uma entrada variável.
- Nos anos 40 até o início dos anos 50 o método do lugar das raízes para projeto de sistemas de controle foi completamente desenvolvido.
- Os métodos de resposta de frequência e lugar das raízes que correspondem ao coração da teoria de controle clássica levaram a sistemas que são estáveis e satisfazem um conjunto de requisitos de desempenho mais ou menos arbitrários. Desde os anos 50, a ênfase nos projetos de controle tem sido transferido do projeto de um dos muitos sistemas que operam para o projeto de um sistema ótimo.
- Em virtude dos processos modernos com muitas entradas e saídas tornarem-se mais e mais complexos, a descrição de um sistema de controle moderno exige um grande número de equações. A teoria de controle clássica, que trata apenas sistemas de entrada-simples-saída-simples (SISO: "SINGLE INPUT-SINGLE OUTPUT"), é muito impotente para sistemas de múltiplas - entradas-múltiplas-saídas (MIMO: "MULTIPLE INPUT MULTIPLE OUTPUT"). Desde 1960, aproximadamente, a teoria de controle moderna tem sido desenvolvida para competir com a complexidade crescente de processos modernos e requisitos rigorosos e estreitos em precisão, peso e custo.
- Devido à real disponibilidade de computadores digitais, analógicos e híbridos eletrônicos para uso em cálculos complexos, a utilização de computadores no projeto de sistemas de controle e o uso de computadores on-line na operação de sistemas de controle constituem atualmente uma prática comum.

2 - OBJETIVOS DE CONTROLE EM UNIDADE DE PROCESSO

O controle de processos estabelece, através de sua ação, uma série de facilidades que serão descritas a seguir:

1) segurança, bem-estar pessoal. Controlando-se a operação de um processo onde seus constituintes tragam algum risco (explosão, vazamento, etc)

2) atendimento de especificações.

3) atendimento de legislação ambiental . Liberação de efluentes com atendimento à especificações de legislação de proteção ambiental.

4) restrições operacionais. Temperatura em processos reacionais, NPSH de bombas, vazões adequadas em processos de escoamento, etc.

5) economia. Mínimo custo, máximo benefício.

- Os objetivos de um controle de processo químico são os seguintes:

1) suprimir a influência de perturbações externas.

2) buscar a estabilidade de um processo químico.

3) otimizar a performance de um processo químico.

4) a combinação dos objetivos acima.

3 - CLASSIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE UM SISTEMA DE CONTROLE

Variáveis de entrada: efeito das redondezas sobre o processo químico.

Variáveis de saída: efeito do processo sobre as redondezas.

As variáveis de entrada podem ser manipuladas ou podem ser perturbações. As variáveis de saída podem ser medidas ou não medidas.

4 - ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE CONTROLE

Sistema de controle: disposição de componentes (elétricos, mecânicos, hidráulicos, pneumáticos, etc.), conectados entre si, de modo a controlar um processo ou sistema.

Os componentes básicos de um sistema de controle são os seguintes:

-processo: o equipamento material onde as operações unitárias de transformação têm lugar;

-sensores;

-linhas de transmissão: usadas para conduzir o sinal de medida do sensor ao controlador e do controlador para o elemento final de controle, podendo ser pneumáticas ou elétricas;

-controlador: também inclui a função do comparador. Esta é a unidade com lógica que decide como mudar o valor da variável desejada (set point);

-elemento final de controle: usualmente, uma válvula de controle ou uma bomba dosadora. Este é um instrumento que recebe o sinal do controle pelo controlador e implementa a ação de controle, pelo ajuste físico do valor da variável manipulada.

5 - FERRAMENTAS BÁSICAS

- Transformadas de Laplace;
- Linearização de funções a uma ou mais variáveis;
- Funções de transferência
- Diagramas de blocos e sua álgebra;

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

O uso de Transformadas de Laplace oferece um simples e elegante método de solução de equações diferenciais lineares ou linearizadas, as quais resultam da modelagem de processos químicos industriais.

A Transformada de Laplace também permite o desenvolvimento simples de modelos de sistemas “INPUT-OUTPUT” para propósitos de controle e uma análise qualitativa direta de como o processo reage à influências externas.

Ainda há mais razões para utilização da Transformada de Laplace em teoria de controle:

- usando-se a transformada de Laplace, podem-se converter muitas funções comuns, tais como funções senoidais, funções senoidais amortecidas e funções exponenciais em funções algébricas de uma variável complexa;

- operações, como diferenciação e integração podem ser substituídas por operações algébricas no campo complexo. Desta forma uma equação diferencial linear pode ser transformada em uma equação algébrica em uma variável complexa;

- permite o uso de técnicas gráficas para prever, direta e rapidamente, o desempenho de sistemas sem a necessidade de resolver as equações diferenciais dos mesmos, além de fornecer diretamente a relação entre entradas e saídas.

DEFINIÇÃO

Considerando uma função $f(t)$, a sua Transformada de Laplace $L[f(t)] = F(s)$ é definida como o seguinte:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

A tabela 1 apresenta a Transformada de Laplace de algumas funções básicas.

FUNÇÕES TRANSLADADAS

a) $f(t + t_0) \Rightarrow L[f(t + a)] = e^{s.a}.F(s)$

b) $f(t - t_0) \Rightarrow L[f(t - a)] = e^{-s.a}.F(s)$

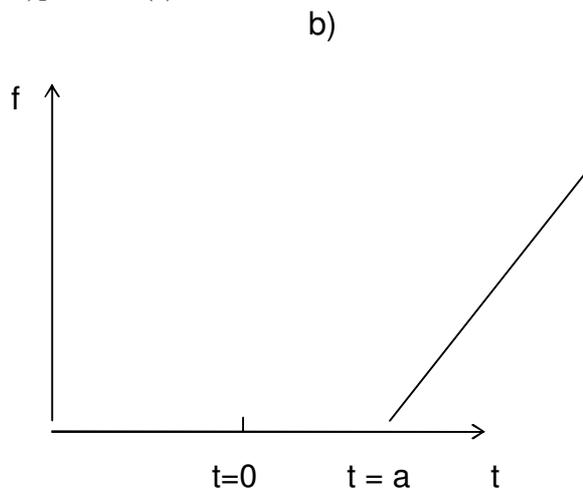
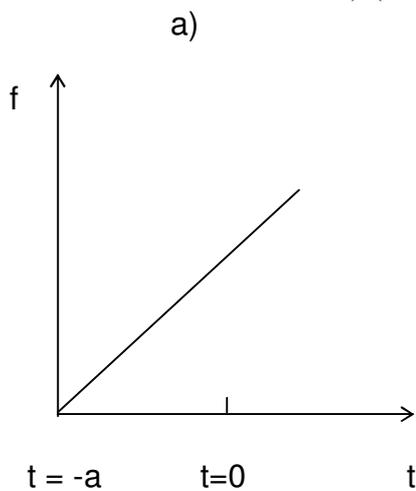


TABELA 1. Transformadas de Laplace de algumas funções.

| f(t) | F(s) |
|---------------------|---------------------------------|
| A | $\frac{A}{s}$ |
| A.t | $\frac{A}{s^2}$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-a.t}$ | $\frac{1}{s + a}$ |
| $t^n . e^{-a.t}$ | $\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$ |
| sen(w.t) | $\frac{w}{s^2 + w^2}$ |
| cos(w.t) | $\frac{s}{s^2 + w^2}$ |
| senh(w.t) | $\frac{w}{s^2 - w^2}$ |
| cosh(w.t) | $\frac{s}{s^2 - w^2}$ |
| $e^{-a.t}.sen(w.t)$ | $\frac{w}{(s + a)^2 + w^2}$ |
| $e^{-a.t}.cos(w.t)$ | $\frac{s + a}{(s + a)^2 + w^2}$ |

| | |
|-----------------------------------|-------------------------|
| $\frac{e^{-a.t} - e^{-b.t}}{b-a}$ | $\frac{1}{(s+a).(s+b)}$ |
| $1 - e^{-t/a}$ | $\frac{1}{s.(as+1)}$ |

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE DERIVADAS

$$L\left[\frac{d^{(n)}f(t)}{dt}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}.f(0) - s^{n-2}.f'(0) - \dots - s.f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE INTEGRAIS

$$L\left[\int_0^t f(t).dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

TEOREMA DO VALOR FINAL

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.F(s)$$

TEOREMA DO VALOR INICIAL

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s.F(s)$$

TRANSFORMADAS INVERSAS

Será verificado através de exemplos para cada caso.

PÓLOS REAIS DISTINTOS

$$X(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^3 - 2.s^2 - s + 2} = \frac{s^2 - s - 6}{(s-1).(s-2).(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2}$$

$$s^2 - s - 6 \equiv A.(s-2).(s+1) + B.(s-1).(s-2) + C.(s-1).(s+1)$$

$$s^2 - s - 6 \equiv (A+B+C).s^2 - (A+3.B).s - 2.A + 2.B - C$$

$$\begin{bmatrix} A+B+C=1 \\ A+3.B=1 \\ -2.A+2.B-C=-6 \end{bmatrix}$$

$$A=3; B=-\frac{2}{3}; C=-\frac{4}{3}$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{3}{s-1}\right] + L^{-1}\left[\frac{-2}{3.(s+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{-4}{3.(s-2)}\right] = 3.e^t - \frac{2}{3}.e^{-t} - \frac{4}{3}.e^{2.t}$$

PÓLOS REAIS IGUAIS

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{(s+1)^3} = \frac{A}{(s+1)^1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

$$s^2 - 2s + 2 \equiv A.(s+1)^2 + B.(s+1) + C \equiv A.s^2 + (2.A+B).s + A+B+C$$

$$\begin{bmatrix} A = 1 \\ 2.A + B = -2 \\ A + B + C = 2 \end{bmatrix}$$

$$B = -4; C = 5$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{4}{(s+1)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{5}{(s+1)^3}\right] = e^{-t} - 4.t .e^{-t} + 2,5.t^2 .e^{-t}$$

PÓLOS COMPLEXOS

$$Z(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4.s + 5} = \frac{A.s+B}{s^2 + 4.s + 5} = \frac{s+1}{s^2 + 4.s + 5} = \frac{s+1}{(s+2)^2 + 1} = \frac{s+2-1}{(s+2)^2 + 1} =$$

$$= \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} - \frac{1}{(s+2)^2 + 1}$$

$$s+1 \equiv A.s+B$$

$$A = 1; B = 1$$

$$z(t) = e^{-2.t} . \cos t - e^{-2.t} . \sin t = e^{-2.t} . \sqrt{2} . \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

obs.: os casos vistos acima são aplicados quando a ordem do polinômio no numerador for menor que a ordem do denominador. Caso a ordem do numerador seja maior ou igual que a do denominador, será necessário proceder à deflação.

LINEARIZAÇÃO DE FUNÇÕES

A Transformada de Laplace somente é aplicável à sistemas lineares. Quando o sistema de interesse não é linear pode-se linearizá-lo expandindo-o através de uma Série de Taylor truncada no termo de ordem unitária.

LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS COM UMA VARIÁVEL

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \cdot \frac{x-x_0}{1!} + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x_0} \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots +$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} (x-x_0)$$

$$E = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!}$$

E = erro

VARIÁVEIS DE DESVIO

x_s é o valor em estado estacionário de x descrevendo a condição inicial do sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= 0 = f(x_s) \\ \frac{dx}{dt} &= f(x_s) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_s} (x - x_s) \\ \frac{d(x - x_s)}{dt} &= \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_s} (x - x_s) \\ \frac{dx^*}{dt} &= \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_s} \cdot x^* \end{aligned}$$

A variável de desvio x^* é uma nova variável que mede a variação em torno da variável em estado estacionário. Ela será importante no momento de aplicarmos a Transformada de Laplace em equações diferenciais onde a $f(0)$ não é conhecida, ou se é conhecida e se seu valor é diferente de zero.

LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS COM MUITAS VARIÁVEIS

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0) + \left(\frac{df}{dy}\right)_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Chama-se função de transferência de um sistema linear a relação entre a transformada de Laplace da variável de saída (resposta) e a transformada de Laplace da variável de entrada (excitação), para todas as condições iniciais nulas. Ou, em outras palavras, é uma função, no domínio da frequência, que leva uma excitação a um outro nível, outra situação, caracterizada como resposta.

A função de transferência de um sistema é uma relação que descreve a sua dinâmica, sem incluir qualquer informação sobre a sua estrutura interna.

EXEMPLO: seja um sistema descrito pela seguinte equação diferencial linear:

$$3 \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot x + 4 \cdot \int_0^t x \cdot dt = y(t)$$

onde x é a saída, com condições iniciais nulas, e y é a entrada ou excitação.

Aplicando Laplace

$$3.s.X(s) + 2.X(s) + 4.\frac{X(s)}{s} = Y(s)$$

$$\left(3.s + 2 + \frac{4}{s}\right).X(s) = Y(s)$$

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{s}{3.s^2 + 2.s + 4} = G(s)$$

Portanto $G(s)$ é a FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA descrito pelo modelo apresentado através da equação diferencial acima.

FORMAS DE EXCITAÇÃO

a) DEGRAU: quando a entrada, aproveitando o exemplo acima, é dada como sendo $y(t)$ igual a uma constante (2, por exemplo). Assim, como a função de transferência existe no domínio da frequência (s)

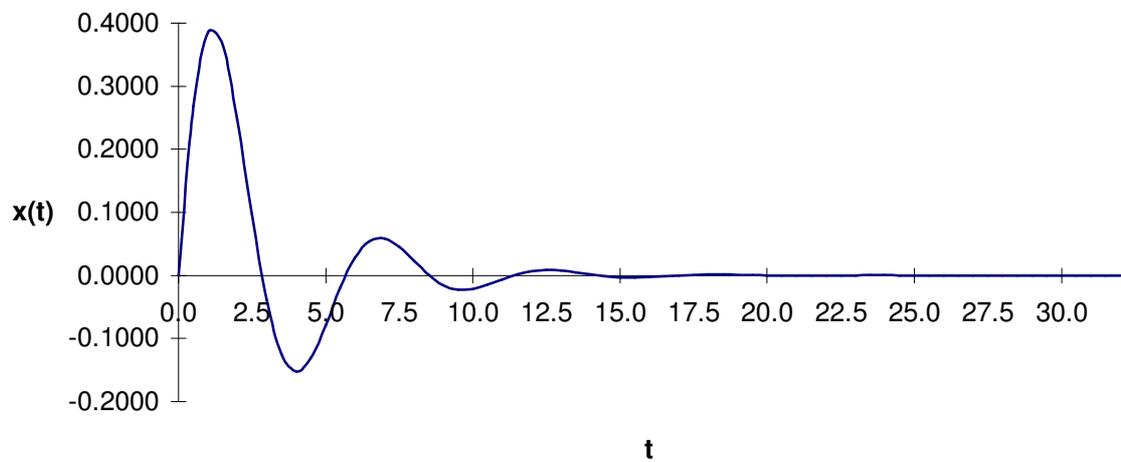
$$Y(s) = \frac{2}{s}$$

Assim, a resposta a esta excitação, $x(t)$, será dada como sendo:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2.s}{s.(3.s^2 + 2.s + 4)} = \frac{2}{3.s^2 + 2.s + 4} = \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + \frac{2}{3}.s + \frac{4}{3}} = \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + \frac{2}{3}.s + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{11}} \cdot e^{\frac{-t}{3}} \cdot \text{sen} \left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t \right) \\ x(t) &= \frac{2}{\sqrt{11}} \cdot e^{\frac{-t}{3}} \cdot \text{sen} \left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t \right) \end{aligned}$$

A resposta a esta excitação pode ser vista no gráfico a seguir



b)RAMPA: quando a excitação é uma reta que passa pela origem do tipo $y = At$ tendo, assim, uma forma de rampa. Para o exemplo de estudo, vamos supor que a excitação, agora, seja uma rampa dada por:

$$y(t) = 2.t$$

Logo

$$Y(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$X(s) = \frac{s}{3.s^2 + 2.s + 4} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{2}{s.(3.s^2 + 2.s + 4)} = \frac{\frac{2}{3}}{s.(s^2 + \frac{2}{3}.s + \frac{4}{3})} = \frac{A}{s} + \frac{B.s + C}{s^2 + \frac{2}{3}.s + \frac{4}{3}}$$

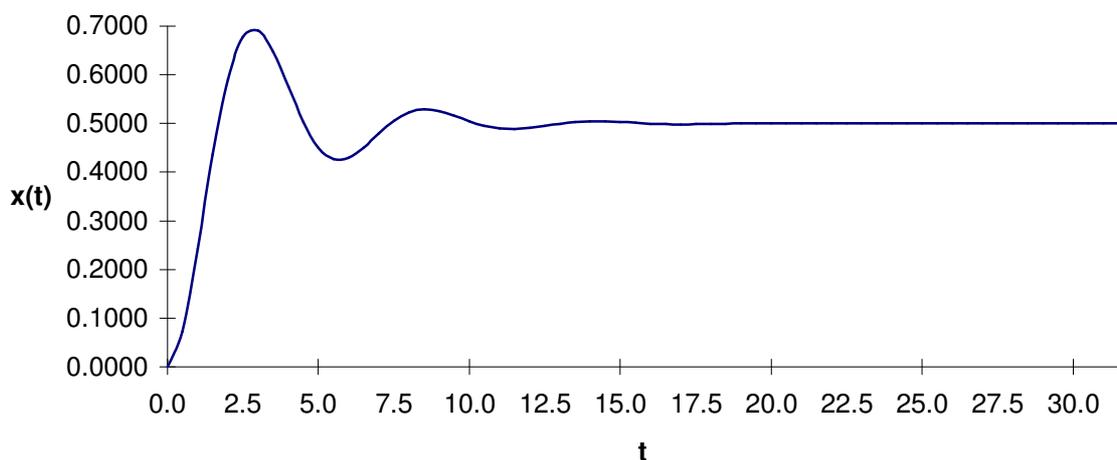
$$\frac{2}{3} \equiv A \cdot \left(s^2 + \frac{2}{3}.s + \frac{4}{3} \right) + B.s^2 + C.s = (A+B).s^2 + \left(\frac{2}{3}.A + C \right).s + \frac{4}{3}.A$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.A; A = \frac{1}{2}$$

$$A = -B; B = -\frac{1}{2}; C = -\frac{2}{3}.A; C = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B.s+C}{s^2 + \frac{2}{3}.s + \frac{4}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}.s + \frac{1}{3}}{s^2 + \frac{2}{3}.s + \frac{4}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(s + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(s + \frac{1}{3}\right)}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} - \frac{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{11}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} \\
 x(t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{2} \right] - L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(s + \frac{1}{3}\right)}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} \right] - L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{11}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} \right] \\
 x(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t\right) - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t\right) \\
 x(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{11}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t + 1,278\right) \right] \\
 x(t) &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{11}} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t + 1,278\right)
 \end{aligned}$$

Assim, a resposta obtida no sistema, para a excitação em rampa é mostrada no gráfico a seguir:



c) PERIÓDICA: quando a excitação é uma função sinusoidal do tipo $A \sin \omega t$. Para a mesma função de transferência dos casos anteriores, vamos fazer

$$y(t) = 2 \cdot \text{sen}(t)$$

Logo

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 1}$$

Então

$$X(s) = \frac{2 \cdot s}{(3 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 4) \cdot (s^2 + 1)}$$

$$X(s) = \frac{\frac{2}{3} \cdot s}{\left(s^2 + \frac{2}{3} \cdot s + \frac{4}{3}\right) \cdot (s^2 + 1)} = \frac{A \cdot s + B}{\left(s^2 + \frac{2}{3} \cdot s + \frac{4}{3}\right)} + \frac{C \cdot s + D}{(s^2 + 1)}$$

$$\frac{2}{3} \cdot s = (A \cdot s + B) \cdot (s^2 + 1) + (C \cdot s + D) \cdot \left(s^2 + \frac{2}{3} \cdot s + \frac{4}{3}\right) =$$

$$= A \cdot s^3 + B \cdot s^2 + A \cdot s + B + C \cdot s^3 + D \cdot s^2 + \frac{2}{3} \cdot C \cdot s^2 + \frac{2}{3} \cdot D \cdot s + \frac{4}{3} \cdot C \cdot s + \frac{4}{3} \cdot D =$$

$$= s^3 \cdot (A + C) + s^2 \cdot \left(B + D + \frac{2}{3} \cdot C\right) + s \cdot \left(A + \frac{2}{3} \cdot D + \frac{4}{3} \cdot C\right) + B + \frac{4}{3} \cdot D$$

$$\begin{bmatrix} A + C = 0 \\ B + D + \frac{2}{3} \cdot C = 0 \\ A + \frac{2}{3} \cdot D + \frac{4}{3} \cdot C = \frac{2}{3} \\ B + \frac{4}{3} \cdot D = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A = \frac{-2}{5} \\ B = \frac{-16}{15} \\ C = \frac{2}{5} \\ D = \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{A \cdot s + B}{\left(s^2 + \frac{2}{3} \cdot s + \frac{4}{3}\right)} + \frac{C \cdot s + D}{(s^2 + 1)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot s}{(s^2 + 1)} + \frac{\frac{4}{5}}{(s^2 + 1)} - \frac{\frac{2}{5} \cdot s + \frac{16}{15}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot s}{(s^2 + 1)} + \frac{\frac{4}{5}}{(s^2 + 1)} - \frac{\frac{2}{5} \cdot \left(s + \frac{1}{3}\right)}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} - \frac{\frac{14}{15} \cdot \sqrt{\frac{9}{11}} \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}}$$

$$x(t) = L^{-1} \left[\frac{\frac{2}{5} \cdot s}{(s^2 + 1)} \right] + L^{-1} \left[\frac{\frac{4}{5}}{(s^2 + 1)} \right] - L^{-1} \left[\frac{\frac{2}{5} \cdot \left(s + \frac{1}{3}\right)}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} \right] - L^{-1} \left[\frac{\frac{14}{15} \cdot \sqrt{\frac{9}{11}} \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}}{\left(s + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}} \right]$$

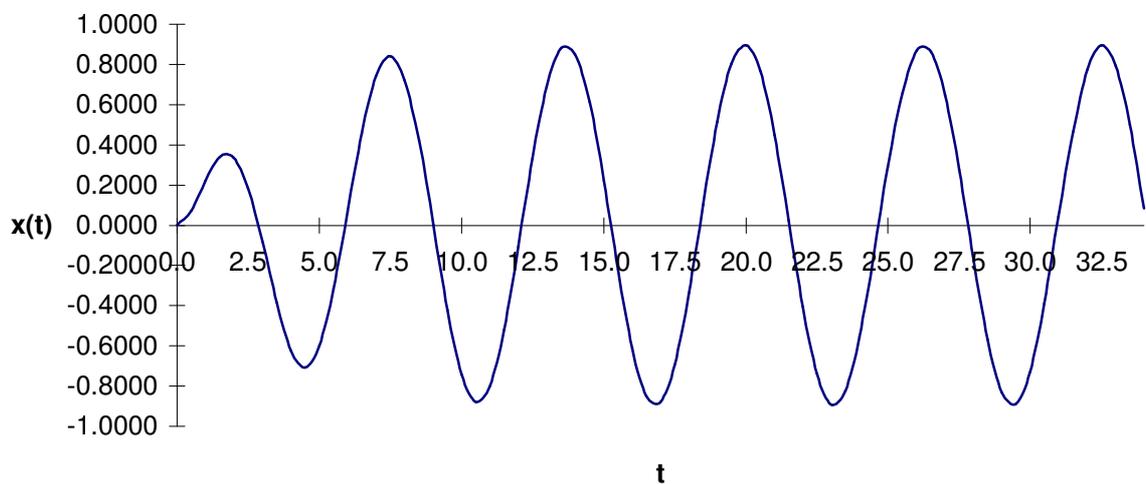
$$x(t) = \frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \cdot \text{sent} - \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t\right) - \frac{14}{5 \cdot \sqrt{11}} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t\right) =$$

$$x(t) = \frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \cdot \text{sen} t - \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t\right) - \frac{14}{5 \cdot \sqrt{11}} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t\right) =$$

$$x(t) = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \text{sen}(t + 0,46365) - \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{60}{11}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t + 0,44247\right)$$

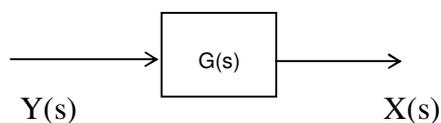
$$x(t) = 0,894543 \cdot \text{sen}(t + 0,46365) - 0,93420 \cdot e^{-\frac{t}{3}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{3} \cdot t + 0,44247\right)$$

O gráfico, a seguir, mostra a resposta do sistema para uma entrada periódica.

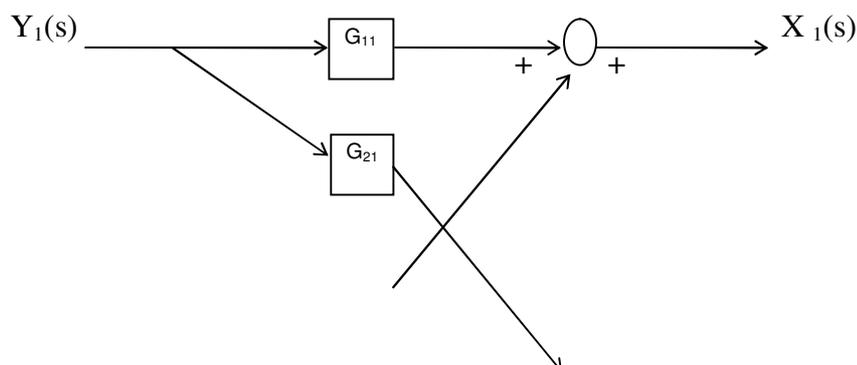


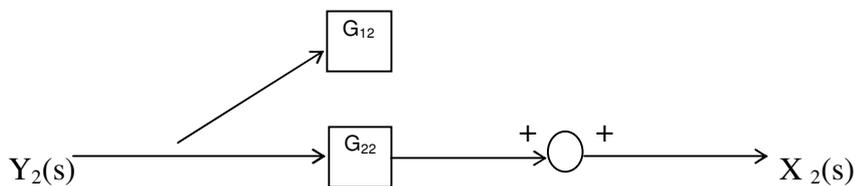
DIAGRAMAS DE BLOCOS

As funções de transferência também podem ser representadas por diagramas de blocos.



No esquema acima está representado um sistema SISO (uma entrada, uma saída). No caso de sistemas multivariáveis, tem-se uma matriz de transferência, que aqui será representado para um caso 2 x 2.





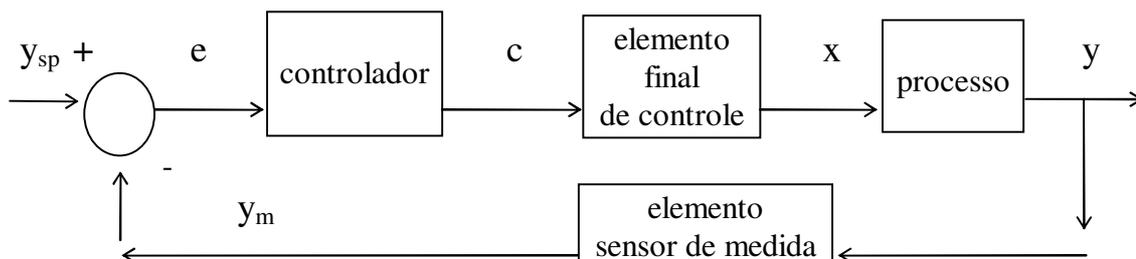
Diagramas de blocos complexos podem ser reduzidos a diagramas mais simples através de determinadas operações. Como as funções de transferência representam sistemas lineares, a multiplicação é comutativa. A tabela 2 fornece as reduções mais comuns.

TABELA 2. Regras para redução de diagramas.

| REGRAS | DIAGRAMA ORIGINAL | DIAGRAMA EQUIVALENTE |
|--|-------------------|----------------------|
| BLOCOS EM CASCATA | | |
| MOVER UM PONTO DE SOMA PARA DEPOIS DE UM BLOCO | | |
| MOVER UM PONTO DE SOMA PARA ANTES DE UM BLOCO | | |
| MOVER UM PONTO DE TOMADA PARA ANTES DE UM BLOCO | | |
| MOVER UM PONTO DE TOMADA PARA DEPOIS DE UM BLOCO | | |
| ELIMINAR UMA MALHA DE RETROAÇÃO | | |
| BLOCOS EM PARALELO | | |

CONTROLE EM “FEEDBACK”

Mede a variável de importância direta após que uma perturbação tenha efeito sobre ela. Esta forma de controle age após o efeito.



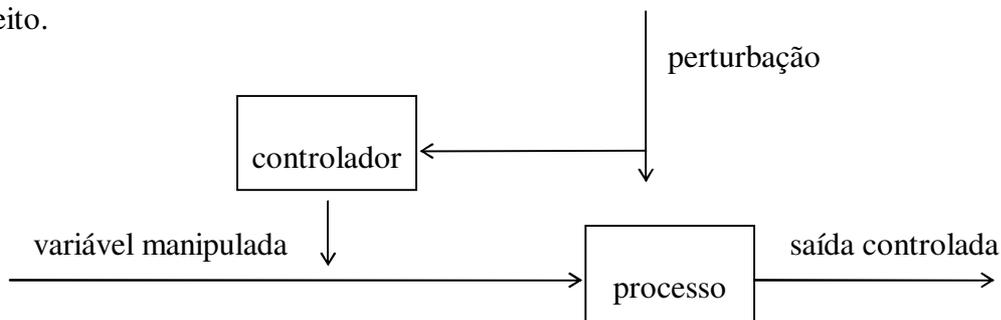
Mede o valor da saída utilizando o sensor apropriado. Compara o valor indicado y_m com o ponto de ajuste, y_{sp} . O valor de desvio e é processado pelo controlador, através de uma dinâmica específica (proporcional, integral, derivativa e/ou uma composição destas três), mudando o valor da variável x através da ação de controle sobre o elemento final, visando minimizar o desvio e .

Mais detalhes, desta forma de controle, serão vistas mais adiante, no decorrer do texto.

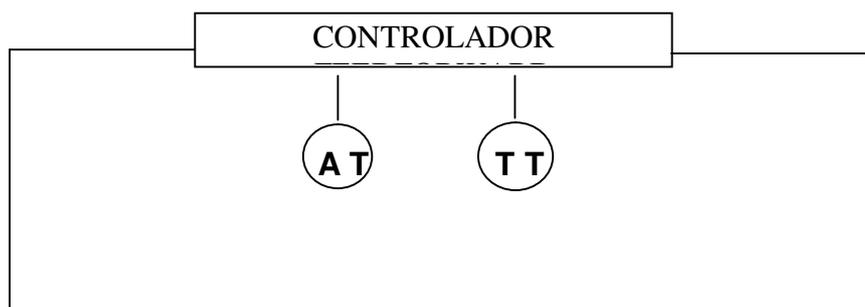
CONTROLE EM “FEEDFORWARD”

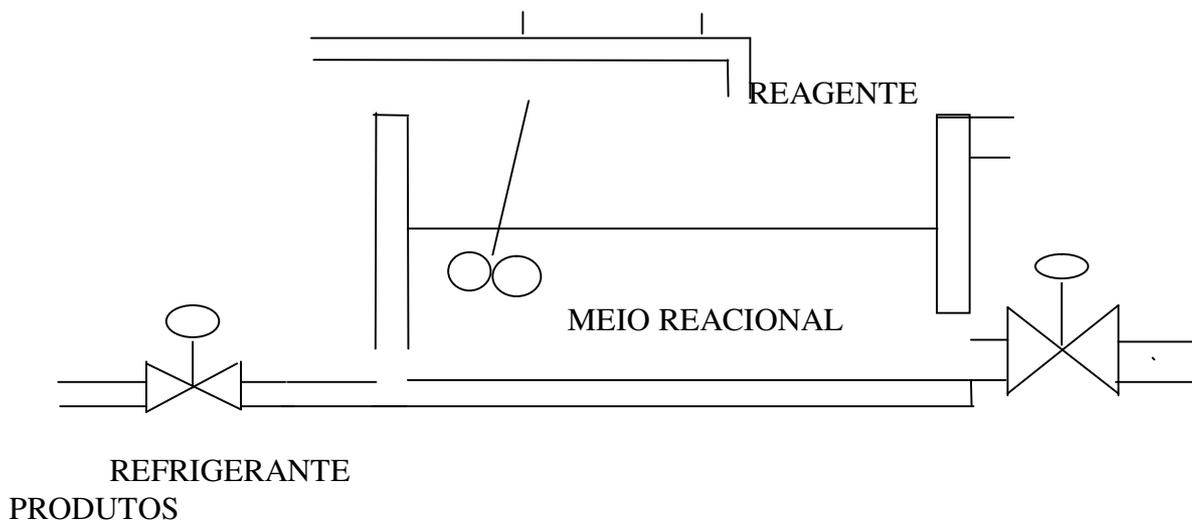
Malhas de controle em “feedback” nem sempre serão um controle perfeito de um processo químico, isto é, manter a saída do processo continuamente no valor de “set point” na presença de perturbações ou de alterações de “set point”. A razão é simples: um controlador em “feedback” reage somente após detectado um desvio em torno do “set point”.

Diferente de sistemas em “feedback”, um controle “feedforward” mede a perturbação diretamente e tem ação de controle eliminando seu impacto na saída do processo. Ademais, controladores “feedforward” tem o potencial teórico do controle perfeito.



EXEMPLO: CSTR

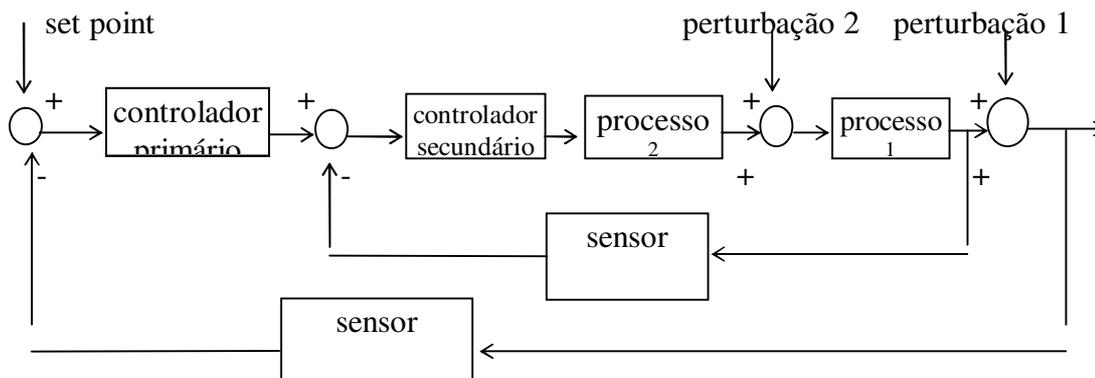




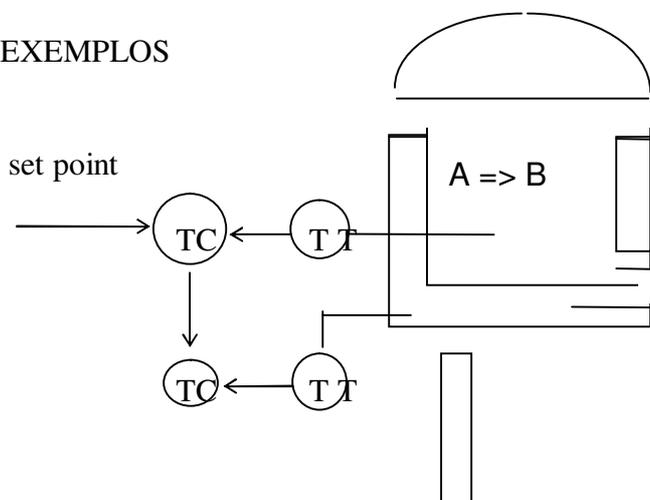
A temperatura e a concentração de entrada são as perturbações. As variáveis manipuladas são a vazão de produtos e a vazão de refrigerante. O objetivo é manter a composição e a temperatura constantes dentro do CSTR.

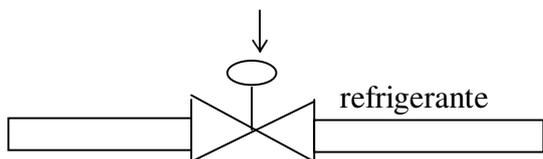
CONTROLE EM CASCATA

Consta de uma variável manipulada e mais de uma variável medida. O controle em cascata processa uma melhoria sobre uma malha em “feedback”. A representação em diagrama de blocos é a seguinte:



EXEMPLOS



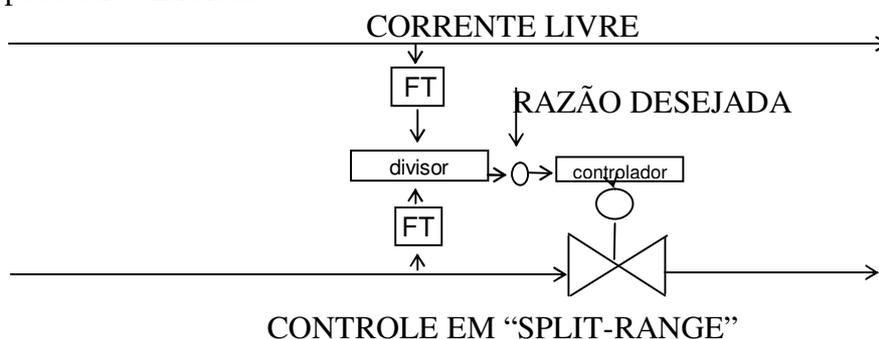


Pode-se melhorar a resposta da malha em “feedback” quando há mudanças na temperatura do fluido térmico e tendo ação de controle antes de sentir-se seu efeito na mistura reacional.

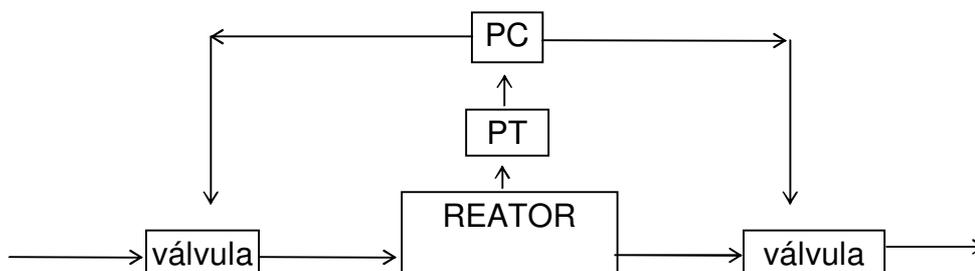
A malha que mede a temperatura do meio reacional é a malha primária e usa um “set point” fornecido pelo operador, enquanto que a malha que mede a temperatura do fluido térmico usa a saída do controlador primário como seu “set point” e é chamada de malha secundária.

CONTROLE RAZÃO

É um tipo especial de controle “feedforward”, onde duas perturbações são medidas e mantidas em uma relação constante. É bastante utilizado para controlar a razão de taxas de fluxo de duas correntes. Ambas vazões são medidas, mas somente uma pode ser controlada.



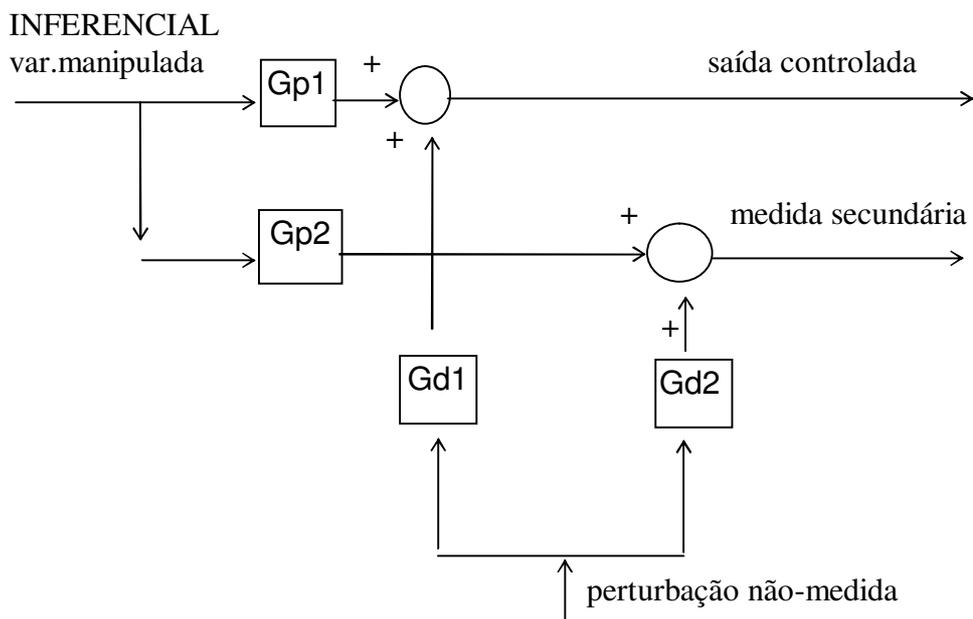
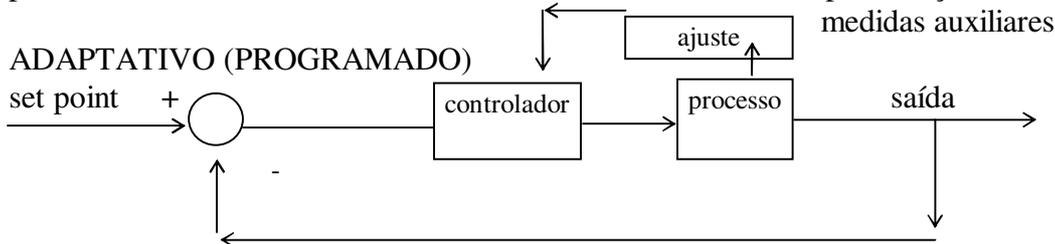
Diferente do controle em cascata o controle em “split-range” tem uma variável medida e mais do que uma variável manipulada.



CONTROLE ADAPTATIVO E INFERENCIAL

O controle adaptativo é um sistema de controle que pode ajustar seus parâmetros automaticamente de modo a compensar as variações nas características do processo que controla.

O controle inferencial é utilizado quando nenhuma das configurações resolve o problema de controle; o sistema faz uma estimativa do valor da perturbação.



CONTROLE EM “OVERRIDE”

Operação que limita o processo em níveis de operação alto ou baixo para evitar danos em equipamentos, através de ações de liga-desliga.

SISTEMA DIGITAL DE CONTROLE DISTRIBUÍDO

Sistemas de controle distribuído: esta classe de instrumentação (ent./saída; controladores, interfaces para operadores) formam-se para executar funções de controle fixas e também permitem transmissão de informações de medidas, controladores e informações de operação de e para um único ou uma pluralidade de usuários conectados por uma linha de comunicação.

Controlador compartilhado: instrumento que contém uma pluralidade de algoritmos pré-programados que permite ao usuário recuperar, configurar, conectar e definir estratégias de controle ou funções a ser implementadas.

CONTROLADORES LÓGICOS PROGRAMÁVEIS

Sistema facilmente programável e reprogramável, confiável e instalado no “chão de fábrica”. Surgiram nos anos 60 para substituir relés e interruptores eletromecânicos. São equipamentos que funcionam como parte de um computador podendo realizar uma grande variedade de funções em adição àquelas realizadas por relés. Consistem de interfaces para entrada/saída, um processador com memória, um compilador de linguagem e uma fonte.

ALARMES E INTERTRAVAMENTOS

Tem como objetivo dar proteção, segurança pessoal visando a continuidade da produção.

7 - MODELAGEM DE SISTEMAS FÍSICOS

A análise e o projeto de um sistema de controle, em geral, a descrição matemática dos elementos físicos que os constituem, a fim de que a resposta dos mesmos possa ser avaliada.

O tratamento matemático de um sistema de controle exige os seguintes procedimentos.

- 1) Definição do sistema e de seus componentes.
- 2) Formulação do modelo matemático, listagem das hipóteses simplificadoras necessárias e linearização (se possível) do sistema.
- 3) Obtenção das equações diferenciais correspondentes, a partir das leis físicas adequadas.
- 4) Resolução das equações diferenciais (em geral pelo método de Transformada de Laplace, no caso de equações lineares).
- 5) Exame das soluções (respostas) e das hipóteses simplificadoras.
- 6) Reanálise (exame da resposta transiente, do erro permanente - “offset”, e da estabilidade) ou projeto do sistema de controle.

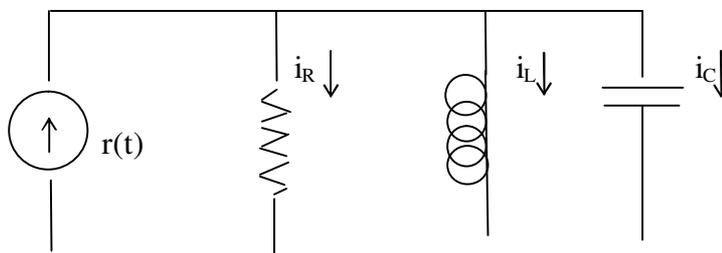
Tabela 3. Leis físicas de algumas grandezas.

| TIPO DO ELEMENTO | ELEMENTO FÍSICO | EQUAÇÃO |
|------------------|------------------|----------------------------|
| | INDUTOR ELÉTRICO | $v_{21} = L \frac{di}{dt}$ |

| | | |
|------------------------------|------------------------------|---|
| ARMAZENADORES INDUTIVOS | MOLA TRANSLACIONAL | $v_{21} = \frac{1}{K} \frac{dF}{dt}$ |
| | MOLA TORCIONAL | $\omega_{21} = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$ |
| | INÉRCIA FLUIDA | $P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$ |
| ARMAZENADORES CAPACITIVOS | CAPACITOR ELÉTRICO | $i = C \frac{dv_{21}}{dt}$ |
| | MASSA TRANSLACIONAL | $F = M \frac{dv}{dt}$ |
| | MASSA TORCIONAL | $T = J \frac{d\omega}{dt}$ |
| | CAPACITOR FLUIDICO | $Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$ |
| | CAPACITOR TÉRMICO | $q = C_t \frac{d\theta}{dt}$ |
| DISSIPADORES DE ENERGIA | RESISTOR ELÉTRICO | $i = \frac{1}{R} v_{21}$ |
| | AMORTECEDOR TRANSLACIONAL | $F = f v_{21}$ |
| | AMORTECEDOR TORCIONAL | $T = f \omega_{21}$ |
| | RESISTOR FLUIDICO | $Q = \frac{1}{R_r} P_{21}$ |
| | RESISTOR TÉRMICO | $q = \frac{1}{R_t} \theta_{21}$ |

EXEMPLOS

Circuito RLC paralelo

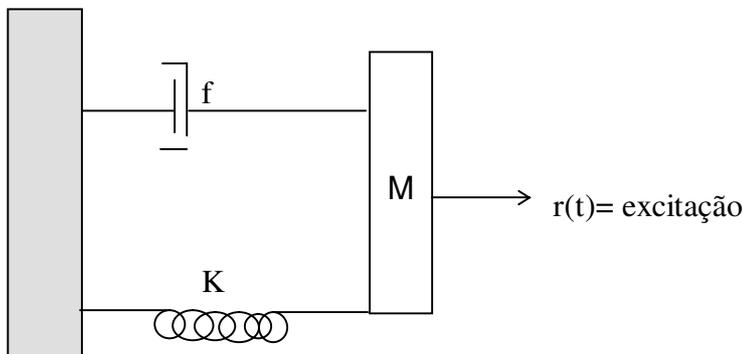


$$r(t) = \text{corrente de excitação} = i_R + i_L + i_C$$

balanço:

$$r(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) \cdot dt + C \cdot \frac{d.v(t)}{dt}$$

Sistema mecânico translacional MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

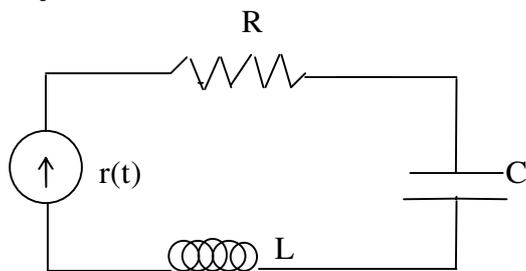


$$r(t) = f \cdot v(t) + K \cdot \int_0^t v(t) \cdot dt + M \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

ANALOGIAS

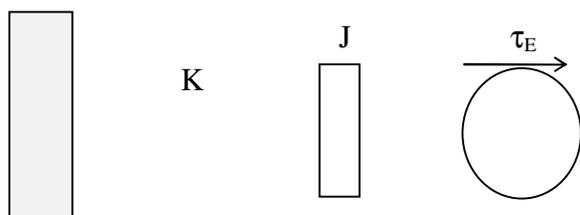
Os sistemas verificados nos exemplos anteriores são análogos, pois são constituídos pela mesma série de operações matemáticas. No caso a analogia em questão é a analogia FORÇA - CORRENTE. Estas analogias são interessantes no momento da análise da resposta destes sistemas.

Analogia FORÇA - VOLTAGEM

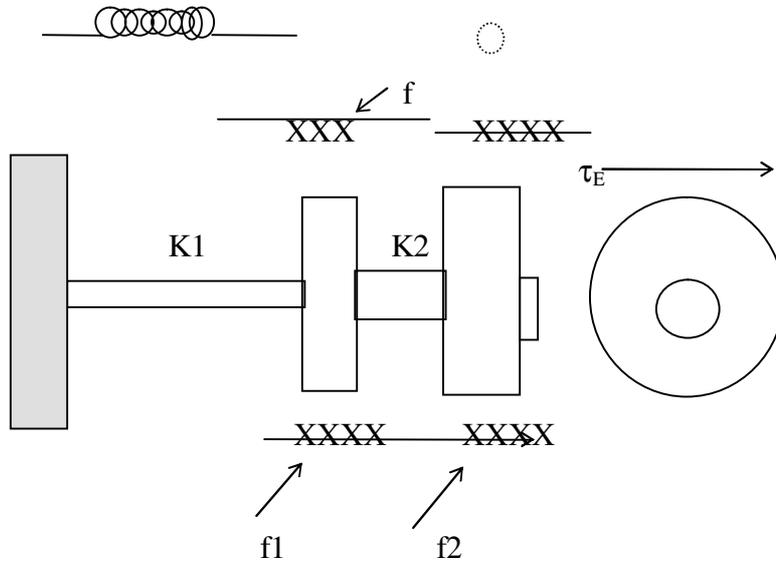


$$r(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

MAIS EXEMPLOS



$$\tau_E = K\theta + f \cdot \frac{d\theta}{dt} + J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



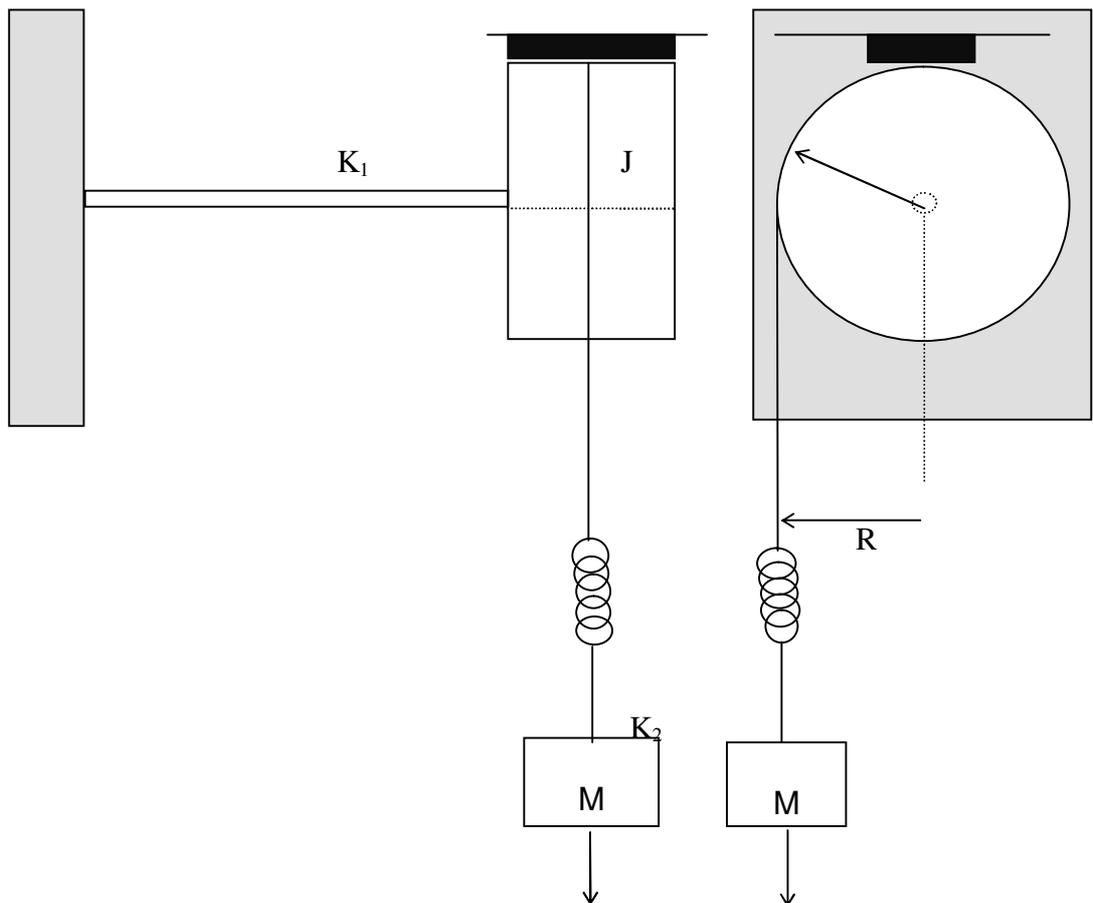
DISCO 2

$$\tau_E = K_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) + f_2 \cdot \frac{d\theta_2}{dt} + J_2 \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

DISCO 1

$$K_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) = K_1 \cdot \theta_1 + f_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + J_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$$

OUTRO EXEMPLO:

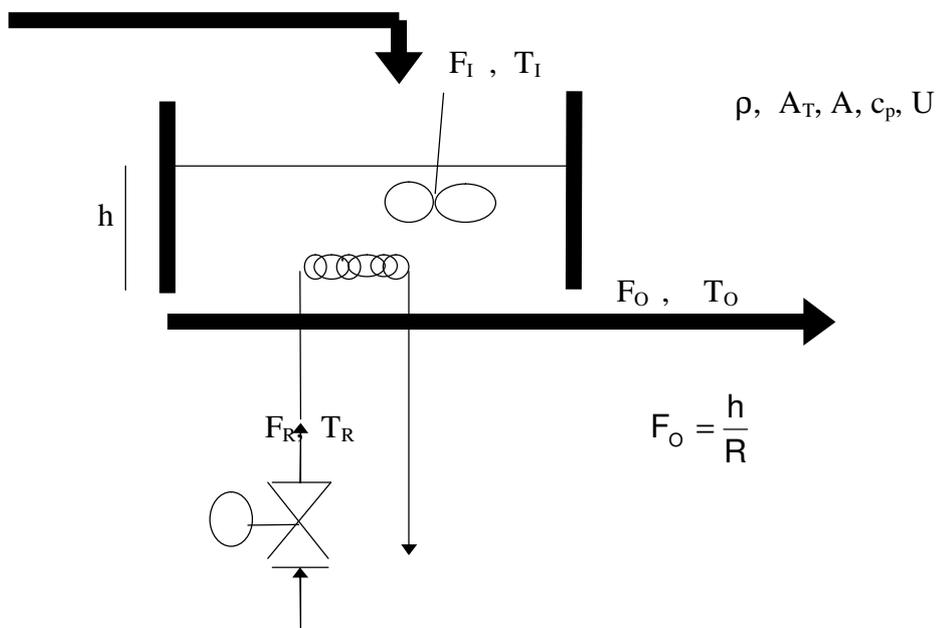


$$F_e(t) + M.g = M. \frac{d^2x}{dt^2} + K_2(x - R.\theta)$$

$$R.K_2(x - R.\theta) = K_1\theta + f. \frac{d\theta}{dt} + J. \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$F_c(t)$

AQUECEDOR DE UM TANQUE AGITADO



balanço de massa no tanque:

[massa que acumula] = [massa que entra]-[massa que sai]+[massa gerada]-
=-[massa consumida]

$$\frac{d(\rho.A.h)}{dt} = \rho F_I - \rho.F_O$$

balanço de energia no tanque:

[energia que acumula] = [energia que entra]-[energia que sai]-[energia gerada]-
=+[energia consumida] e/ou [energia fornecida]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{d[\rho.A.h.c_p.(T_O - T_{REF})]}{dt} = \rho.F_I.c_p.(T_I - T_{REF}) - \rho.F_O.c_p.(T_O - T_{REF}) + UA_T.(T_R - T_O)$$

8 - COMPORTAMENTO DE SISTEMAS DINÂMICOS

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

Um sistema de primeira ordem é aquele cuja saída $y(t)$ (p.ex.), é modelada por uma equação diferencial de primeira ordem. Assim, no caso de um sistema linear ou linearizado dado por

$$a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b \cdot f(t).$$

Onde $f(t)$ é a entrada do sistema. Se $a_0 \neq 0$, então a equação anterior fica

$$\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{dy}{dt} + y = \frac{b}{a_0} \cdot f(t)$$

Definindo

$$\frac{a_1}{a_0} = \tau_p$$

$$\frac{b}{a_0} = K_p$$

$$\tau_p \cdot \frac{dy}{dt} + y = K_p \cdot f(t)$$

τ_p é conhecido como a constante de tempo do processo e K_p é chamado o ganho em estado-estacionário ou ganho estático ou simplesmente ganho do processo. Seu significado físico ficará mais claro, a seguir.

Se $y(t)$ e $f(t)$ forem dados (se necessário) em forma de variáveis de desvio em torno do estado estacionário, as condições iniciais são $y(0) = f(0) = 0$. Assim, aplicando a Transformada de Laplace, obteremos a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{\tau_p \cdot s + 1}$$

Se $a_0 = 0$, então

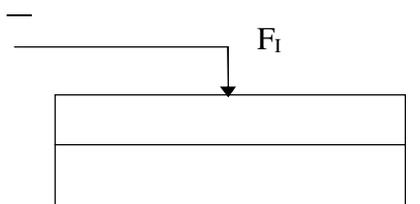
$$\frac{dy}{dt} = \frac{b}{a_1} \cdot f(t) = K_p^{\#} \cdot f(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K_p^{\#}}{s}$$

Neste caso, o processo é chamado de PURAMENTE CAPACITIVO OU DE CAPACITÂNCIA PURA.

EXEMPLOS

ARMAZENAGEM DE LÍQUIDOS



$$F_0 = \frac{h}{R}$$

Na corrente de saída há uma resistência ao escoamento e assumiremos que F_0 se relaciona linearmente com a pressão hidrostática do nível de líquido h através da seguinte expressão:

$$F_0 = \frac{h}{R}$$

Aqui abre-se um parêntese para entendermos um pouco mais os conceitos RESISTÊNCIA (R) E CAPACITÂNCIA (C).

A definição que logo vem a mente para o conceito de resistência é a analogia que fazemos com a resistência elétrica, que é dada por

$$R = U/i = \text{ddp}/\text{movimento de elétrons} .$$

Para o caso de um escoamento que seja proporcionado pela descarga de um tanque, a analogia elétrica pode ser dada do seguinte modo:

$$R = \frac{\Delta P}{\dot{m}} = \frac{\rho \cdot g \cdot h}{\rho \cdot F} = \frac{g \cdot h}{F}$$

Fazendo $R^* = R/g$, que em realidade, para o mesmo sistema, são valores constantes, podemos fazer, sob o ponto de vista de notação $R^* = R$. Assim

$$R = \frac{h}{F}$$

não esquecendo que R , nesta expressão está levando em conta a aceleração da gravidade.

Por este motivo é que foi definido que $F_0 = h/R$, sendo R uma resistência ao escoamento.

Outro conceito que freqüentemente é citado no texto é a capacitância. Vamos defini-la, então:

CAPACITÂNCIA = a variação de massa necessária para provocar uma variação unitária na pressão do tanque ou do vaso.

$$C = \frac{dm}{dp} [=] \frac{\text{massa}}{\text{pressão}}$$

Fechando o parêntese, retornemos para o balanço de massa no tanque.

$$\frac{d(\rho \cdot A \cdot h)}{dt} = \rho \cdot F_1 - \rho \cdot \frac{h}{R} = A \cdot \frac{dh}{dt} = F_1 - \frac{h}{R}$$

Este é o balanço de massa no tanque para qualquer instante. Para obtermos a função de transferência do sistema devemos conhecer a condição inicial, que para o processo será a condição de estado-estacionário. Portanto, vamos proceder a um balanço de massa nesta condição.

$$0 = F_{IEE} - \frac{h_{EE}}{R}$$

$$F_{IEE} = \frac{h_{EE}}{R}$$

Assim, podemos agora proceder à criação das variáveis de desvio em torno do estado estacionário.

$$F^{\#} = F - F_{IEE}$$

$$h^{\#} = h - h_{EE}$$

Veremos que estas variáveis de desvio que, na realidade, nada mais são do que uma simples mudança de variável, pois assim $F^{\#}(0) = 0$ e $h^{\#}(0) = 0$ no estado estacionário que é a nossa condição inicial. Fazendo uma simples diferença entre o balanço de massa em qualquer instante e o balanço de massa no estado estacionário.

$$A \frac{dh}{dt} - 0 = F_1 - F_{IEE} - \frac{h}{R} + \frac{h_{EE}}{R}$$

$$\frac{dh_{EE}}{dt} = 0$$

$$A \cdot \frac{d(h - h_{EE})}{dt} = F_1 - F_{IEE} - \frac{h - h_{EE}}{R}$$

$$A \cdot \frac{dh^{\#}}{dt} = F^{\#} - \frac{h^{\#}}{R}$$

Com o sistema expresso em termos de variáveis de desvio podemos agora proceder à obtenção da função de transferência que relaciona o nível do tanque com a vazão de entrada. Aplicando Laplace e lembrando que $F^{\#}(0) = h^{\#}(0) = 0$ obteremos o seguinte.

$$A \cdot s \cdot H^{\#}(s) + \frac{H^{\#}(s)}{R} = F^{\#}(s)$$

$$\frac{(R \cdot A \cdot s + 1)}{R} \cdot H^{\#}(s) = F^{\#}(s)$$

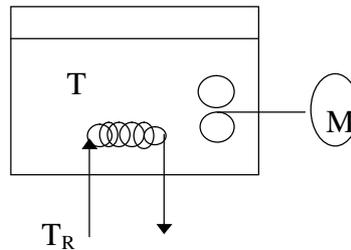
$$G(s) = \frac{H^{\#}(s)}{F^{\#}(s)} = \frac{R}{R \cdot A \cdot s + 1}$$

$\tau_p = R \cdot A =$ constante de tempo do processo.

$K_p = R =$ ganho em estado estacionário do processo.

A medida da área do tanque (A) é a medida da capacitância de armazenagem de massa do tanque. A constante de tempo, portanto, será o produto entre a resistência ao escoamento e a capacitância do tanque.

ARMAZENAGEM DE LÍQUIDOS COM AQUECIMENTO OU RESFRIAMENTO



Procedendo a um balanço de energia no tanque teremos o seguinte.

$$V \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} = U \cdot A_T \cdot (T_R - T)$$

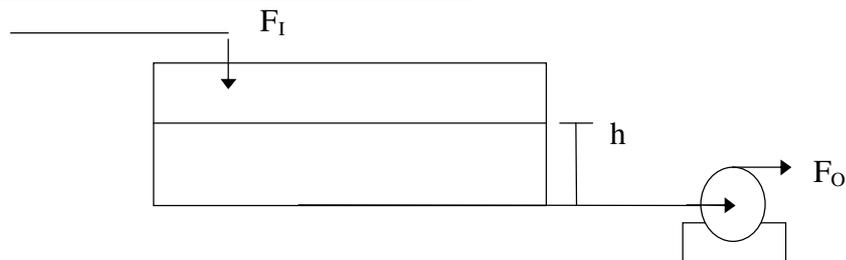
no estado estacionario

$$0 = U \cdot A_T \cdot (T_{REE} - T_{EE})$$

$$V \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{dT^\#}{dt} = U \cdot A_T \cdot (T_R^\# - T^\#)$$

$$G(s) = \frac{T^\#(s)}{T_R^\#(s)} = \frac{1}{\tau_p \cdot s + 1}; \tau_p = \frac{V \rho \cdot c_p}{U \cdot A_T}$$

SISTEMA DE CAPACITÂNCIA PURA



Agora F_O é a vazão transferida pela bomba, que tem um comportamento constante para variações infinitesimais do nível do tanque.

Assim

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = F_i - F_o$$

no estado estacionario

$$0 = F_{IEE} - F_o$$

$$A \frac{dh^{\#}}{dt} = F_i^{\#}$$

$$G(s) = \frac{H^{\#}(s)}{F^{\#}(s)} = \frac{1}{s}$$

COMPORTAMENTO DINÂMICO DA RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 1ª ORDEM

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{\tau_p \cdot s + 1}$$

Vamos submeter este sistema a um degrau unitário, ou seja, $f(t)=1$. Então

$$Y(s) = \frac{K_p}{s \cdot (\tau_p \cdot s + 1)} = \frac{K_p}{s} - \frac{K_p \cdot \tau_p}{\tau_p \cdot s + 1}$$

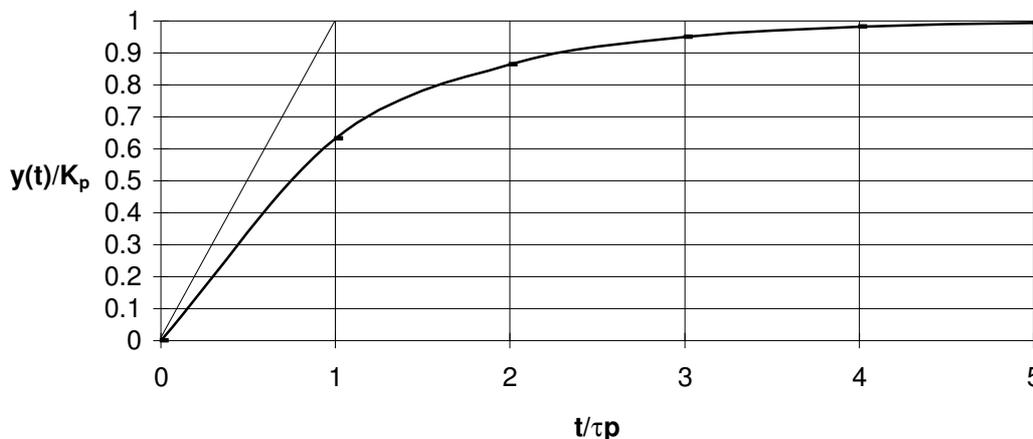
$$y(t) = K_p \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}})$$

Trabalhando a resposta e deixando-a de forma adimensionalizada ela fica da seguinte forma.

$$\frac{y(t)}{K_p} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}})$$

O gráfico a seguir mostra o comportamento dinâmico da resposta de um sistema de primeira ordem.

RESPOSTA DINÂMICA DE UM SISTEMA DE 1ª ORDEM



Algumas formas do gráfico acima são características da resposta de sistemas de primeira ordem, que são as seguintes:

I - um sistema de primeira ordem é auto-regulado. Diferente de sistemas de capacitância pura (onde a resposta, para uma entrada em degrau, é na forma de uma rampa) ela alcança um novo estado estacionário. Para o caso do tanque de armazenagem de líquidos visto anteriormente, quando a vazão afluyente aumenta de um degrau, o nível de líquido segue este aumento. Como o nível de líquido aumenta, a pressão hidrostática também aumentará, que por sua vez aumenta a vazão efluente. Esta ação recoloca o sistema novamente em equilíbrio;

II - a inclinação da resposta a t = 0 é igual a 1.

$$\left. \frac{d\left(\frac{y(t)}{K_p}\right)}{d\left(\frac{t}{\tau_p}\right)} \right|_{t=0} = \left(e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right)_{t=0} = 1$$

Isto implica que se a taxa inicial da mudança de y(t) fosse mantida, o valor deveria alcançar seu valor final na constante de tempo. Daí podemos concluir o seguinte: “quanto menor o valor da constante de tempo, mais adormecida a resposta inicial do sistema” ou, de forma equivalente, “a constante de tempo de um processo é a medida de tempo necessária para o processo ajustar-se a uma mudança em sua entrada”;

III - o valor da resposta y(t) alcança 63,2% de seu valor final quando o tempo decorrido é igual à constante de tempo. Após, quando o tempo decorrido é igual à quatro vezes a constante de tempo, a resposta, praticamente, já alcançou seu último valor de resposta ou valor em estado-estacionário;

IV - o novo valor em estado-estacionário é igual à K_p para uma entrada em degrau unitário (ou A.K_p para uma entrada em degrau de valor A). Isto se vê facilmente quando o tempo decorrido tende ao infinito: a resposta tenderá ao valor de A.K_p. Esta característica explica o nome do parâmetro K_p: ganho em estado-estacionário ou ganho estático; para uma alteração em degrau, na entrada, a mudança na saída, no estado-estacionário será dada por Δ(saída) = K_p Δ(entrada). Esta conclusão também nos mostra de quando nós deveríamos mudar o valor da entrada para realizar uma alteração desejada na saída, para um processo com um dado valor de K_p. Assim, para efetuar a mesma mudança na saída, nós necessitamos: “uma pequena

mudança na entrada se K_p é grande (sistemas muito sensíveis) ou uma grande mudança na entrada se K_p é pequeno”.

SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

Um sistema de segunda ordem é aquela resposta $y(t)$ que é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem.

$$a_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b \cdot f(t)$$

$$a_0 \neq 0$$

$$\tau^2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\tau\zeta \frac{dy}{dt} + y = K_p \cdot f(t)$$

$$\tau^2 = \frac{a_2}{a_0} \quad 2\tau\zeta = \frac{a_1}{a_0} \quad K_p = \frac{b}{a_0}$$

τ = período natural de oscilação do sistema

ζ = fator de amortecimento

K_p = ganho em estado - estacionário do sistema

O significado físico dos parâmetros τ e ζ será mostrado mais adiante. K_p tem o mesmo significado visto em sistemas de primeira ordem.

Com a equação acima sendo expressa em variáveis de desvio (se necessário, que significa dizer que as condições iniciais do sistema são conhecidas) podemos aplicar a Transformada de Laplace. Isto resulta em

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 \cdot s^2 + 2\zeta \cdot \tau \cdot s + 1} = \frac{K_p}{s^2 + 2\zeta \cdot \omega \cdot s + \omega^2}$$

Sistemas de segunda ordem ou de ordens mais altas podem proceder de muitas situações físicas. Podem ser classificadas em três categorias:

I - processos de multi-capacitâncias. Processos que consistem de duas ou mais capacitâncias (sistemas de primeira ordem) em série através do qual escoam massa ou energia;

II - sistemas inerentemente de segunda ordem. Como componentes mecânicos sólidos ou fluidos de um processo que possui inércia e são sujeitos a uma aceleração;

III - um sistema controlado. Uma malha de controle em “feedback” contendo um controlador com sua respectiva lei de controle pode exibir dinâmicas de segunda ordem ou maiores.

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE RESPOSTAS DE SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

Vamos analisar o sistema de segunda ordem submetendo-o a uma entrada em degrau unitário

$$Y(s) = \frac{K_p}{s \cdot (\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1)}$$

Os dois pólos (raízes do polinômio de segunda ordem que fazem parte do denominador) são os seguintes:

$$\begin{aligned} \tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1 &= 0 \\ p_1 &= -\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad p_2 = -\frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \\ Y(s) &= \frac{\frac{K_p}{\tau^2}}{s \cdot (s - p_1) \cdot (s + p_2)} \end{aligned}$$

A forma da resposta $y(t)$ dependerá da localização dos pólos, p_1 e p_2 , no plano complexo. Assim, nós podemos distinguir três casos:

- CASO A: quando $\zeta > 1$ nós temos dois pólos reais distintos;
- CASO B: quando $\zeta = 1$ nós temos dois pólos reais iguais;
- CASO C: quando $\zeta < 1$ nós temos dois pólos complexos conjugados.

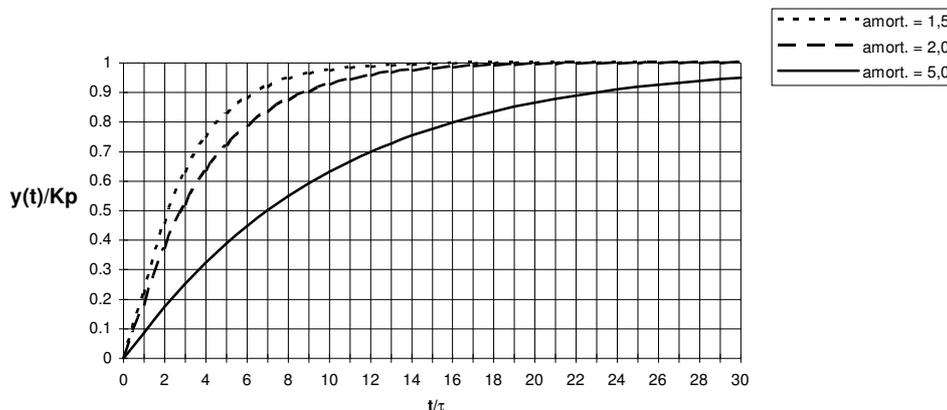
Vamos examinar cada caso, separadamente.

CASO A - RESPOSTA SOBREAMORTECIDA, quando $\zeta > 1$

$$y(t) = K_p \cdot \left[1 - e^{\frac{-\zeta \cdot t}{\tau}} \cdot \left(\cosh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \cdot \frac{t}{\tau} + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \cdot \frac{t}{\tau} \right) \right]$$

O gráfico da resposta, para este caso, é mostrado a seguir.

CASO A



A resposta plotada para vários valores de amortecimento $\zeta > 1$. Ela é conhecida como resposta sobreamortecida assemelha-se um pouco com a resposta de um sistema de primeira ordem submetida a uma entrada em degrau unitário. Mas quando comparada a uma resposta de primeira ordem nota-se que o sistema inicialmente demora para responder e então sua resposta fica mais preguiçosa. E esta “preguiça” aumenta com o aumento de ζ . Finalmente, nós notamos que quando o tempo passa, a resposta aproxima-se de seu valor em estado-estacionário assintoticamente. Como era no caso de um sistema de primeira ordem, o ganho é dado por

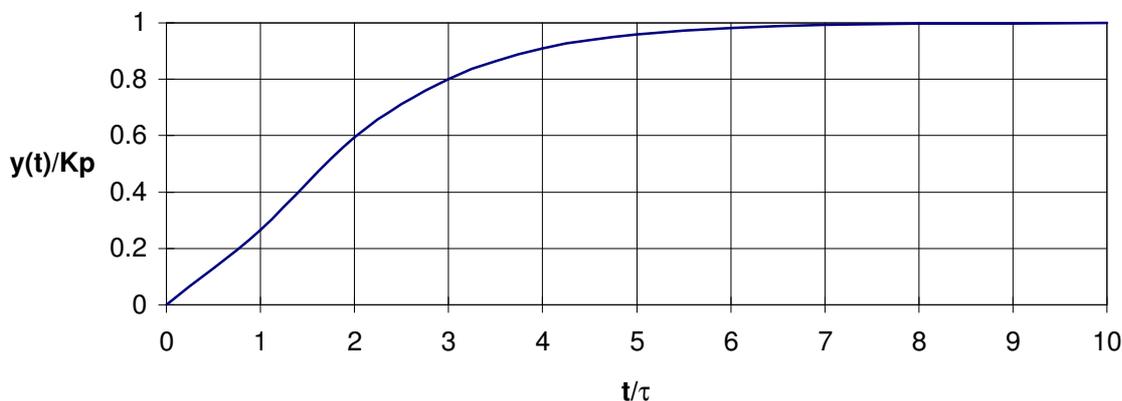
$$K_p = \frac{\Delta(\text{saida}_{\text{estacionaria}})}{\Delta(\text{entrada}_{\text{estacionaria}})}$$

CASO B - RESPOSTA CRITICAMENTE AMORTECIDA, quando $\zeta = 1$

$$y(t) = K_p \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

O gráfico da resposta para este caso é mostrado a seguir.

CASO B



Este caso, mostra-se semelhante a uma resposta sobreamortecida.

CASO C - RESPOSTA SUBAMORTECIDA, quando $\zeta < 1$

$$y(t) = K_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\frac{\zeta \cdot t}{\tau}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi) \right]$$

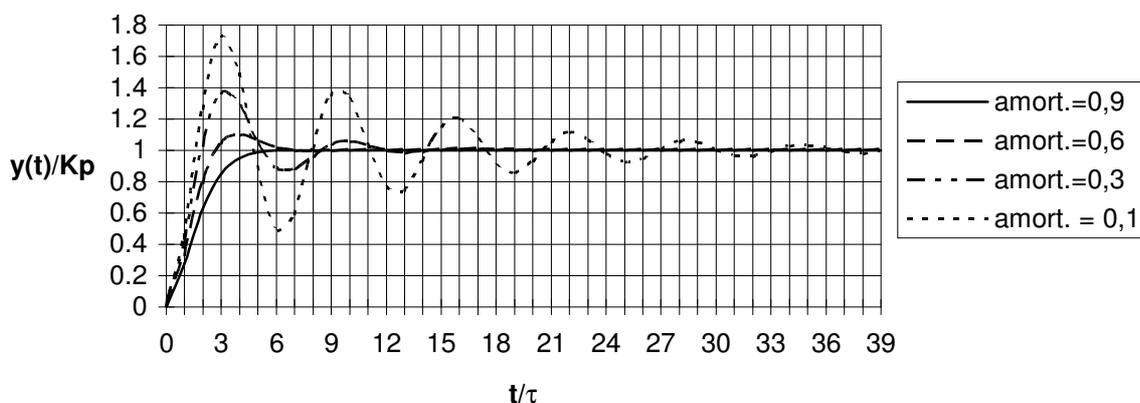
onde

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right]$$

A seguir, mostramos como fica o formato da resposta , para este caso.

CASO C



Das curvas das respostas mostradas no gráfico acima nós podemos observar o seguinte:

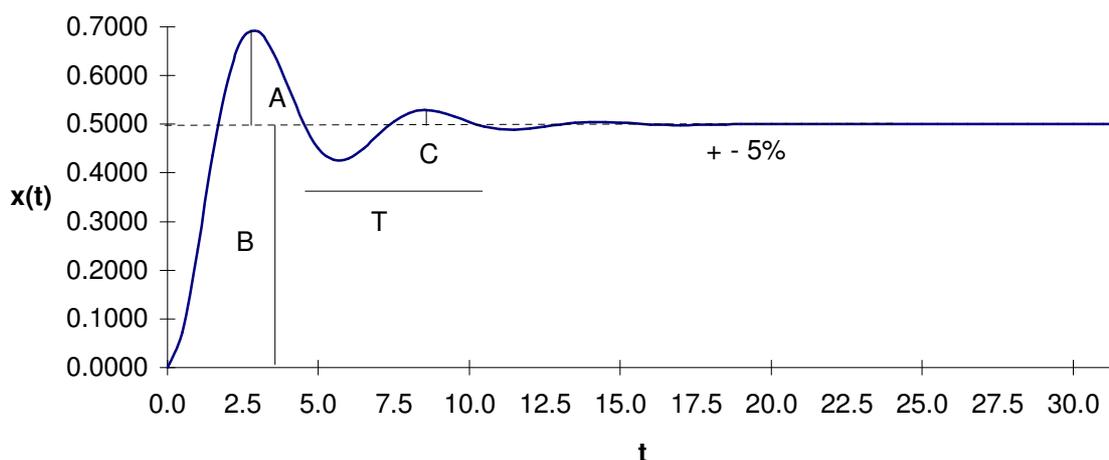
I - a resposta subamortecida é, inicialmente, mais rápida do que as respostas críticas e sobreamortecidas, que são caracterizadas como “preguiçosas”;

II - apesar da resposta subamortecida ser inicialmente mais rápida e alcançar seu valor em estado-estacionário mais rapidamente, ela não fica lá, iniciando oscilações com progressiva redução de amplitude . Esta oscilação torna a resposta deste caso bem distinta aos casos anteriores;

III - o comportamento oscilatório fica mais pronunciado com menores valores do fator de amortecimento.

É um tipo de resposta que será encontrada com frequência em análises de malhas em “feedback”. Assim sendo, ela possui algumas características, as quais podem ser obtidas facilmente, aplicando-se conhecimentos de cálculo básico; o escopo deste texto não tem como objetivo esta demonstração, que poderá ser encontrada em várias outras literaturas.

CARACTERÍSTICAS DE UMA RESPOSTA SUBAMORTECIDA



“overshoot”: é a relação A/B, onde B é o valor da resposta em estado-estacionário, e A é a máxima quantidade que a resposta excede seu valor em estado-estacionário. O “overshoot” é uma função de ζ , e pode ser mostrado que ele pode ser dado pela seguinte expressão:

$$\text{overshoot} = \frac{A}{B} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

razão de decaimento: é a relação C/A, isto é, é a relação de quantidades acima do último valor de dois picos sucessivos. A razão de decaimento é dada pela seguinte expressão:

$$\text{decaimento} = \frac{C}{A} = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \text{overshoot}^2$$

período de oscilação: a frequência das oscilações de uma resposta subamortecida é dada por

$$\text{frequencia amortecida} = \omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

Para encontrar o período de oscilação T, qual é o tempo decorrido entre dois picos sucessivos, usamos a definição de frequência

$$\omega = 2\pi.f$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{2\pi.\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

período natural de oscilação: um sistema de segunda ordem com $\zeta = 0$ é um sistema livre de amortecimento. Sua função de transferência é

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau^2 \cdot s^2 + 1} = \frac{\frac{K_p}{\tau^2}}{\left(s - j \cdot \frac{1}{\tau}\right) \cdot \left(s + j \cdot \frac{1}{\tau}\right)}$$

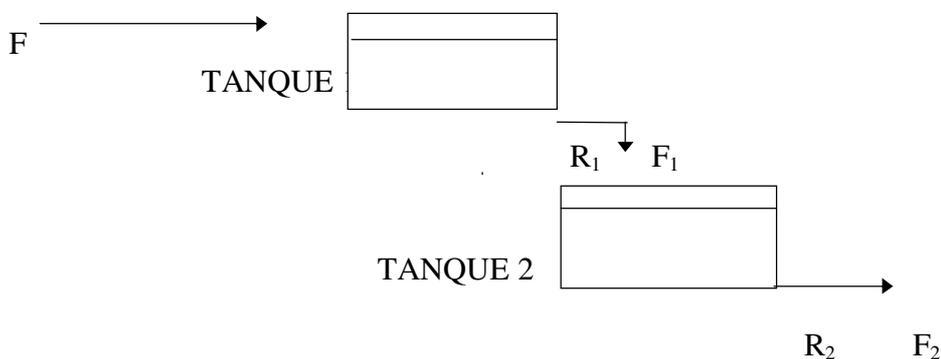
isto é, ela tem dois pólos (nos eixos imaginários) e ela oscilará continuamente com uma amplitude constante e uma frequência natural .

$$\omega_n = \frac{1}{\tau}$$

$$T_n = 2 \cdot \pi \cdot \tau$$

EXEMPLOS DE SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

CAPACITÂNCIAS NÃO-INTERATIVAS



$$\text{TANQUE 1: } A_1 \frac{dh_1^\#}{dt} = F^\# - \frac{h_1^\#}{R_1}$$

$$\text{TANQUE 2: } A_2 \frac{dh_2^\#}{dt} = \frac{h_1^\#}{R_1} - \frac{h_2^\#}{R_2}$$

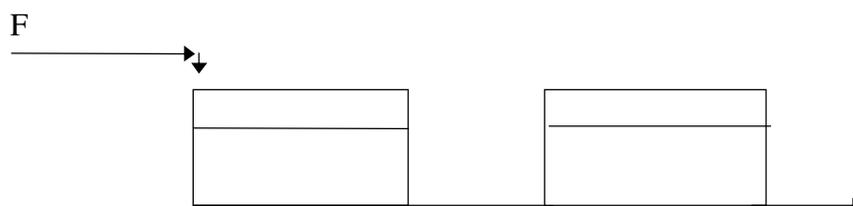
$$\frac{H_1^\#(s)}{F^\#(s)} = \frac{R_1}{R_1 \cdot A_1 \cdot s + 1} \text{ (funcao de transferencia para o tanque 1)}$$

$$\frac{H_2^\#(s)}{H_1^\#(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{R_2 \cdot A_2 \cdot s + 1} \text{ (funcao de transferencia para o tanque 2)}$$

$$\frac{H_2^\#(s)}{F^\#(s)} = \frac{R_2}{(R_1 \cdot A_1 \cdot s + 1) \cdot (R_2 \cdot A_2 \cdot s + 1)} = \frac{K_p}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1} \text{ (global)}$$

$$\tau^2 = R_1 \cdot A_1 \cdot R_2 \cdot A_2 \quad 2 \cdot \zeta \cdot \tau = R_1 \cdot A_1 + R_2 \cdot A_2 \quad K_p = R_2$$

CAPACITÂNCIAS INTERATIVAS

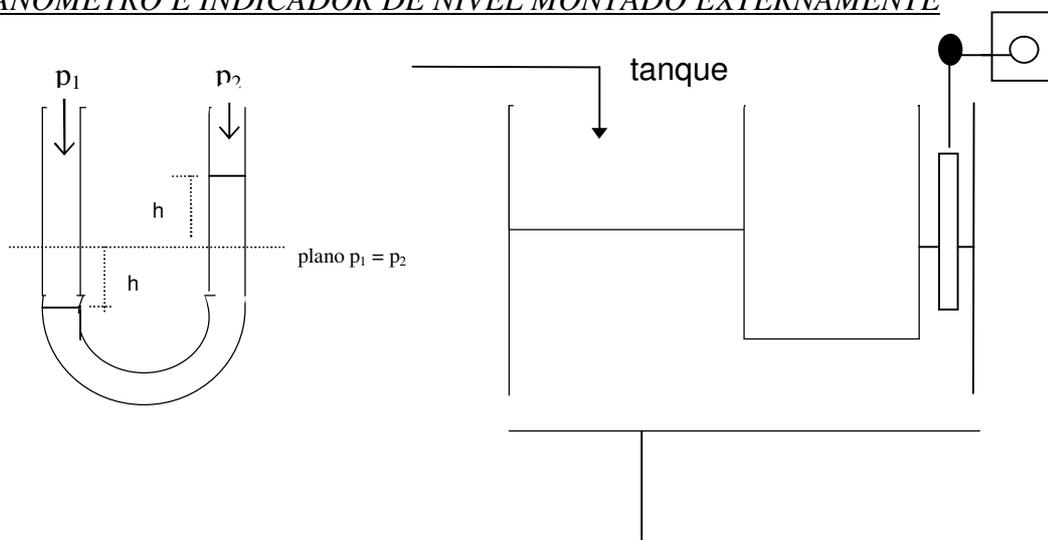


$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad R_1 \quad F_1 \qquad \qquad \qquad R_2 \quad F_2 \\
 F_1^\# &= \frac{h_1^\# - h_2^\#}{R_1} \\
 F_2^\# &= \frac{h_2^\#}{R_2} \\
 \left\{ \begin{aligned} A_1 \cdot \frac{dh_1^\#}{dt} &= F_1^\# - \frac{h_1^\# - h_2^\#}{R_1} \\ A_2 \cdot \frac{dh_2^\#}{dt} &= \frac{h_1^\# - h_2^\#}{R_1} - \frac{h_2^\#}{R_2} \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned} A_1 \cdot R_1 \cdot \frac{dh_1^\#}{dt} + h_1^\# - h_2^\# &= R_1 \cdot F_1^\# \\ A_2 \cdot R_2 \cdot \frac{dh_2^\#}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot h_2^\# - \frac{R_2}{R_1} \cdot h_1^\# &= 0 \end{aligned} \right. \\
 \frac{H_1^\#(s)}{H_2^\#(s)} &= \frac{\left[A_2 \cdot R_2 \cdot s + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \right]}{\frac{R_2}{R_1}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{H_2^\#(s)}{F_1^\#(s)} = \frac{R_2}{A_1 \cdot R_1 \cdot A_2 \cdot R_2 \cdot s^2 + (A_1 \cdot R_1 + A_2 \cdot R_2 + A_1 \cdot R_2) \cdot s + 1} = \frac{K_P}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$$

Comparando as funções de transferência de tanques não-interativos com tanques interativos, verificamos que a diferença é a quantidade $A_1 \cdot R_2$. Este termo representa o fator de interação e indica o grau de interação entre os dois tanques.

MANÔMETRO E INDICADOR DE NÍVEL MONTADO EXTERNAMENTE





Considere a figura sa esquerda. Quando a pressão no topo dos dois ramos é igual, os dois níveis de líquido permanecem no mesmo plano horizontal . Vamos assumir que de repente ocorra um $\Delta p = p_1 - p_2$ imposto nos dois ramos do manômetro. Vamos determinar como se dará a resposta dinâmica deste sistema.

Através de um balanço de forças no plano $p_1=p_2$ nós teremos o seguinte.

(Força devido à p_1 no ramo 1)-(força devido à p_2 no ramo 2)-(força devido à diferença de nível de líquido nos dois ramos)-(força devido à fricção di líquido)=(massa do líquido no tubo).(aceleração).

$$p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 - \rho \cdot \frac{g}{g_c} \cdot A_2 \cdot 2 \cdot h - \frac{8 \cdot \mu \cdot L \cdot A}{R^2 \cdot g_c} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{g_c} \cdot \frac{d^2h}{dt^2}$$

$$A_1 = A_2 = A$$

$$\Delta p \cdot A - \frac{2 \cdot \rho \cdot g \cdot A}{g_c} \cdot h - \frac{8 \cdot \mu \cdot L \cdot A}{R^2 \cdot g_c} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{g_c} \cdot \frac{d^2h}{dt^2}$$

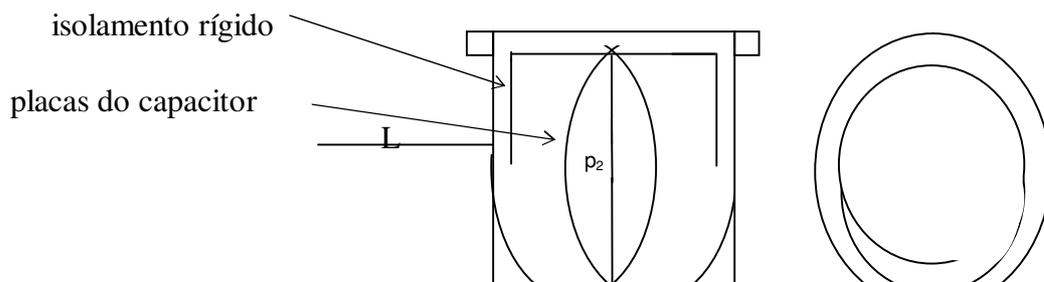
$$\left(\frac{L}{2 \cdot g} \right) \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{4 \cdot \mu \cdot L}{\rho \cdot g \cdot R^2} \cdot \frac{dh}{dt} + h = \frac{g_c}{2 \cdot \rho \cdot g} \cdot \Delta p$$

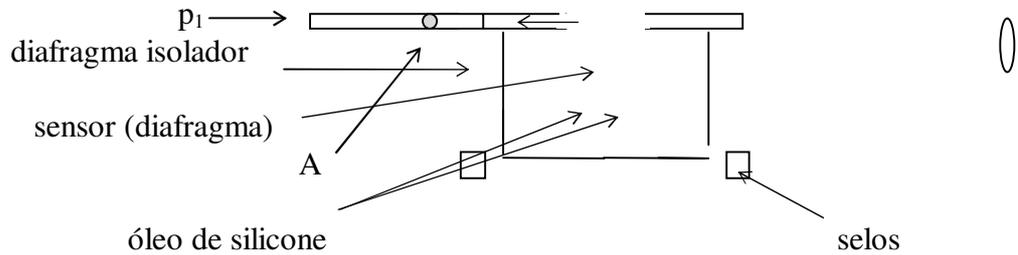
$$G(s) = \frac{H(s)}{\Delta P(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$$

Para a medida de níveis de líquidos é muito freqüente usarmos o medidor de nível montado externamente (mostrado à direita do tubo em U na página anterior). Nota-se que o sistema tanque-câmara de deslocamento tem muitas similaridades com o manômetro. As áreas de seção transversal dos dois ramos são diferentes e o Δp (a diferença de pressão externa) é causada pela mudança de nível de líquido no tanque. Portanto, nós esperamos que a resposta do nível na câmara de deslocamento (h_m) seguirá uma dinâmica de segunda ordem com respeito à mudança de nível de líquido no tanque.

$$\frac{H_m(s)}{H(s)} = \frac{K_{PM}}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$$

TRANSDUTOR DE PRESSÃO DIFERENCIAL COM CAPACITÂNCIA VARIÁVEL





O transdutor de pressão diferencial com capacitância variável é um instrumento muito popular utilizado para detectar e transmitir pressão diferencial. O sinal de pressão é transferido através de um diafragma isolador e um capilar selada cheio de líquido com um elemento sensor de pressão diferencial. Aqui a pressão diferencial é transmitida através de um segundo isolamento e cheio de líquido (óleo de silicone), em sensor (diafragma). Uma pressão de referência balanceará o diafragma sensor no outro lado deste diafragma. A posição do sensor é detectado pelas placas do capacitor em ambos os lados do diafragma. Uma mudança na pressão p_1 de um determinado processo fará a pressão p_2 mudar no tubo capilar.

Um balanço de forças no capilar fornecerá a função de transferência deste sistema.

(Força devido à pressão p_1 no final do capilar)-(força devido à pressão p_2 no final do capilar)=massa x aceleração

$$p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 = \frac{A \cdot L \cdot \rho}{g_c} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

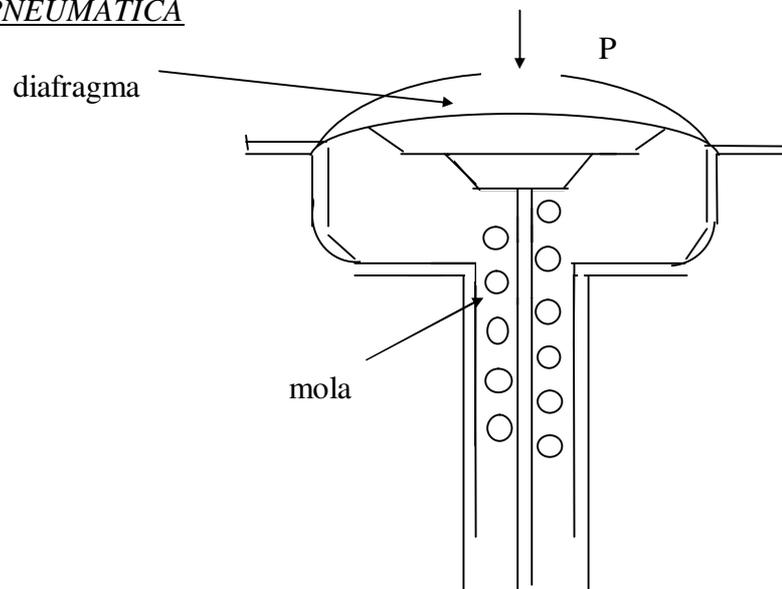
$p_2 \cdot A_2 = (\text{resistência exercida pelo diafragma agindo como uma mola}) + (\text{atrito do óleo})$

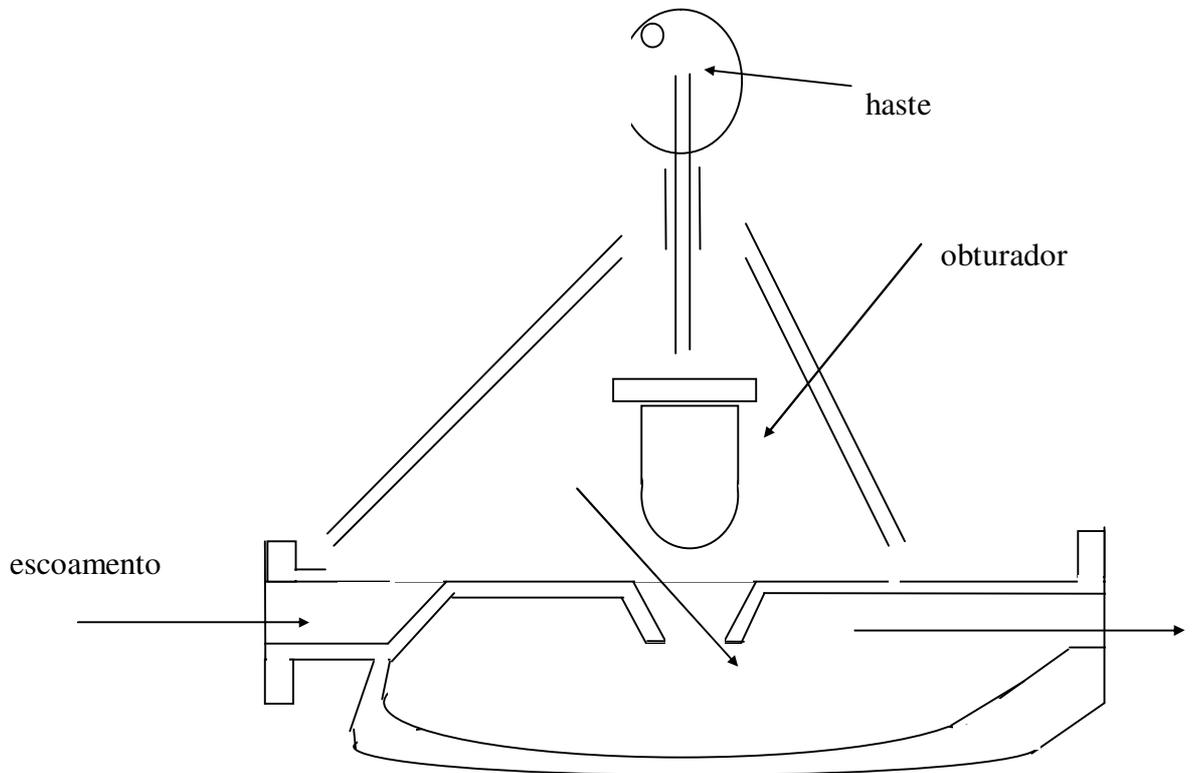
$$A_1 = A_2 = A$$

$$\left(\frac{A \cdot L \cdot \rho}{K \cdot g_c} \right) \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{K} \cdot \frac{dx}{dt} + x = \frac{A}{K} \cdot p_1$$

$$\frac{X(s)}{P_1(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$$

VÁLVULA PNEUMÁTICA





A válvula pneumática é o elemento final de controle mais comum. Ela exibe uma dinâmica de segunda ordem. Considerando a representação acima, a posição da haste (e/ou obturador) determinará o tamanho da abertura para o escoamento e, conseqüentemente, a vazão do escoamento. A posição da haste será dada pelo balanço de forças que agem sobre ela.

$$p \cdot A - K \cdot x - f \cdot \frac{dx}{dt} = \left(\frac{M}{g_c} \right) \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

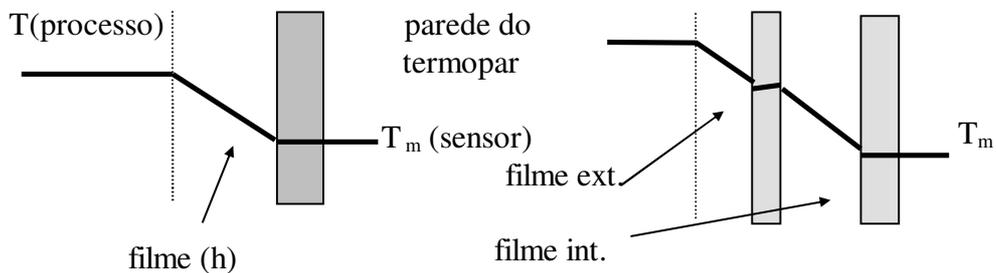
$$\left(\frac{M}{K \cdot g_c} \right) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f}{K} \cdot \frac{dx}{dt} + x = \frac{A}{K} \cdot p$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$$

SENSORES DE TEMPERATURA

Os mais comuns são os termopares. Fornecem uma medida em termos de sinais elétricos. Independentemente de seus aspectos construcionais, sua dinâmica pode ser vista através dos perfis de temperatura.

T



UMA CAPACITÂNCIA

DUAS CAPACITÂNCIAS

No sistema de uma capacitância temos a maior resistência térmica no lado externo ao termopar; assim, teremos uma modelagem de um sistema de primeira ordem.

$$\rho \cdot V \cdot c_p \cdot \frac{dT_m}{dt} = h_{ext} \cdot A_T \cdot (T - T_m)$$

$$\tau = \frac{\rho \cdot V \cdot c_p}{h_{ext} \cdot A_T}$$

$$\frac{T_m(s)}{T(s)} = \frac{1}{\tau \cdot s + 1}$$

No sistema de duas capacitâncias (em série) nós temos uma maior resistência térmica no lado externo e no lado interno da sonda. Como vimos para o caso de dois tanques de armazenagem de líquidos não-interativos, aqui também teremos uma dinâmica de segunda ordem.

$$\tau_1 \cdot \frac{dT_{int}}{dt} = (T - T_{int})$$

$$\tau_2 \cdot \frac{dT_m}{dt} = (T_{int} - T_m)$$

$$\frac{T_{int}(s)}{T(s)} = \frac{1}{\tau_1 \cdot s + 1}$$

$$\frac{T_m(s)}{T_{int}(s)} = \frac{1}{\tau_2 \cdot s + 1}$$

$$\frac{T_m(s)}{T(s)} = \frac{1}{(\tau_1 \cdot s + 1) \cdot (\tau_2 \cdot s + 1)} = \frac{1}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$$

SISTEMAS DE ORDEM SUPERIOR A DOIS

Como exemplo, podemos citar N-capacitâncias es série.

$$\frac{H(s)}{F(s)} = \frac{K_1.K_2.....K_N}{(\tau_1.s + 1).(\tau_2.s + 1).....(\tau_N.s + 1)}$$

DINÂMICA DE SISTEMAS COM TEMPO MORTO

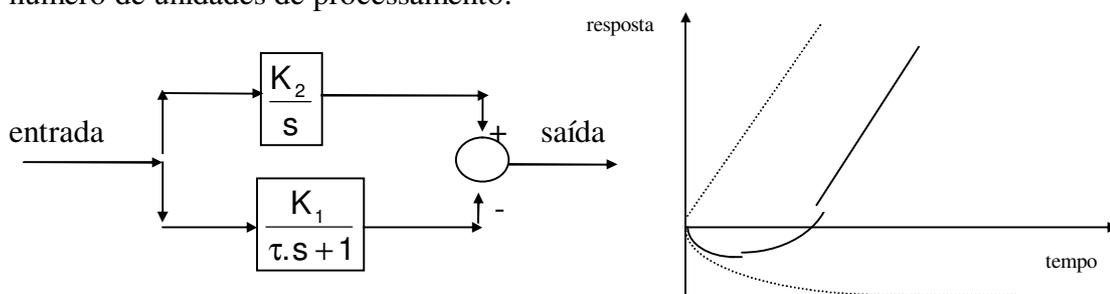
Para todos os sistemas examinados até aqui, nenhum deles exibiu um tempo “morto” (atraso) entre uma entrada e uma saída, isto é, quando uma mudança na entrada teve lugar na entrada, seu efeito foi instantaneamente observado na resposta. Na realidade, isto não acontece na grande maioria dos sistemas físicos; quase sempre haverá algum tipo de defasagem entre a entrada e a saída.

$$G(s) = \frac{K_P . e^{t_d \cdot s}}{\tau . s + 1}$$

$$G(s) = \frac{K_P . e^{t_d \cdot s}}{\tau^2 . s^2 + 2 . \zeta . \tau . s + 1}$$

DINÂMICAS DE SISTEMAS COM RESPOSTA INVERSA

O comportamento dinâmico de certos processos desvia-se drasticamente daqueles vistos até agora. As figuras, a seguir, mostram a resposta destes sistemas para uma entrada em degrau na entrada. Nota-se que inicialmente a resposta está na direção oposta de onde ela eventualmente finalizaria. Este comportamento é chamado de resposta inversa ou resposta em fase não-mínima e ela é exibida por um pequeno número de unidades de processamento.



Este exemplo demonstra que a resposta inversa é o resultado de dois efeitos opostos. Ela tem como característica uma função de transferência com um zero (raiz no numerador) com parte real positiva. Sistemas com resposta inversa são particularmente difíceis de controlar.

$$G(s) = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$