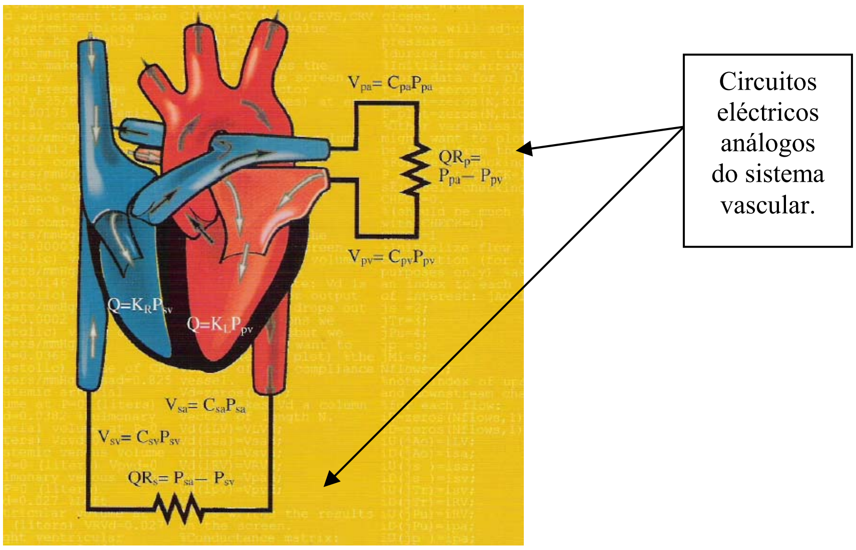
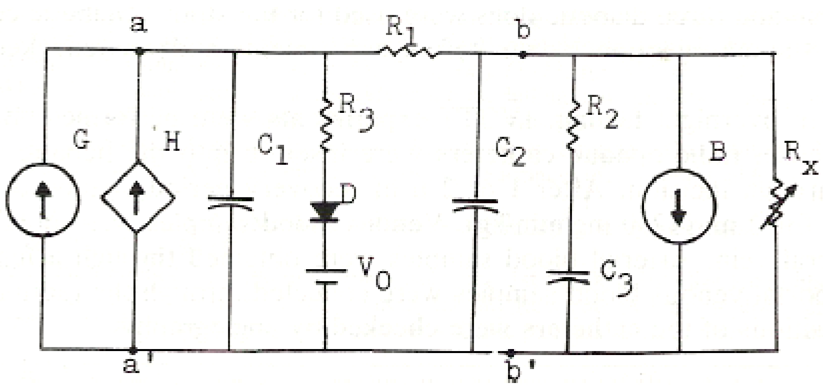
Capítulo 2. Modelização matemática por equações diferenciais

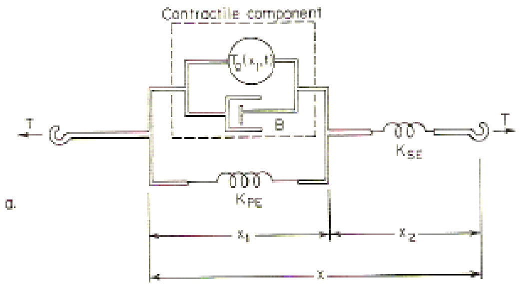
Se quisermos definir uma taxonomia de sistemas, que nos apoie no estabelecimento de uma teoria unificadora, poderemos usar o critério da energia e classificá-los conforme o tipo de energia que neles circula. Teremos assim sistemas eléctricos, mecânicos, térmicos, fluídicos, químicos, etc. Os sistemas biológicos e fisiológicos são mais complexos e não podem ser vistos com essa simplicidade. Eles contêm subsistemas daqueles tipos, mas têm propriedades emergentes em relação a eles - as que derivam da própria vida. Por isso começaremos por uma análise breve daqueles tipos de sistemas. Veremos depois que é possível definir um conjunto de características básicas dos sistemas que atravessam todos os tipos, permitindo definir um conjunto de analogias entre eles. Estas analogias permitem-nos usar um dado tipo de sistema (eléctrico, por exemplo), para estudar outros. A figura seguinte, por exemplo, representa a carga do coração humano por um circuito eléctrico equivalente (capa do livro de Hoppensteadt)



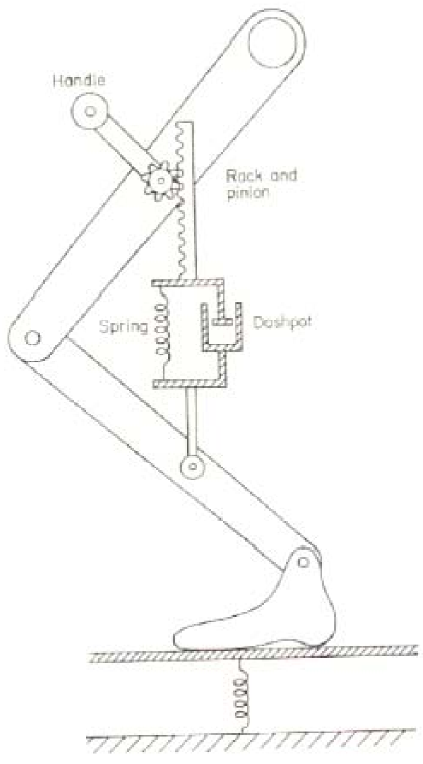
Na literatura de engenharia biomédica encontram-se muitos outros exemplos, com o seguinte (Witten (Ed), *An electrical equivalent circuit model of glucose-insulin kinetics during intravenous glucose tolerance tests in dogs and in man*, p. 1188))



Os estudos dos músculos e do movimento humanos recorrem intensamente a modelos mecânicos, como ilustra a figura seguinte (de McMahon, 1984)

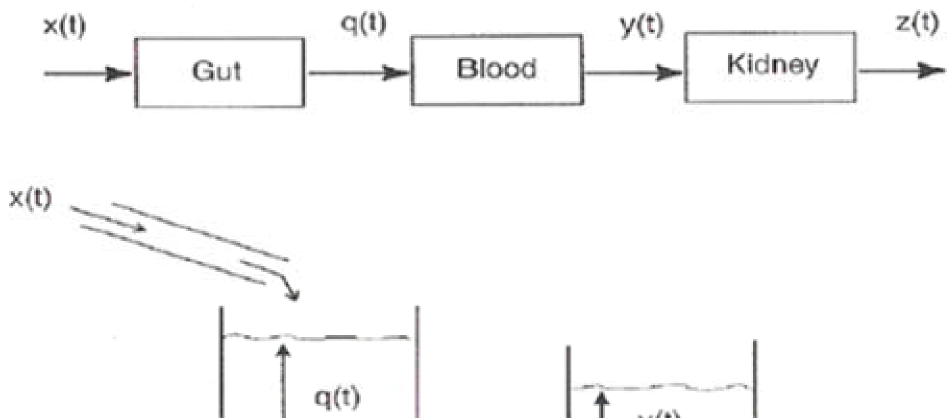


Modelo mecânico de um músculo activo (McMahon)



Modelo de uma perna (McMahon)

Os elementos dos sistemas térmicos, fluídicos e químicos são ferramentas indispensáveis em estudos de modelos compartimentais (muito usados em farmacologia e medicina).. Por exemplo a figura seguinte mostra um sistema fluídico que permite modelizar a ingestão oral de um fármaco, a sua absorção pela corrente sanguínea no intestino e a sua excreção no rim (de Bruce, pp. 107).

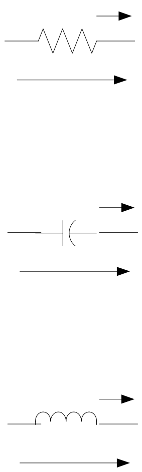


Por isso (re) veremos alguns fundamentos destes tipos de sistemas.

2.1. Sistemas eléctricos

Os circuitos eléctricos são o tipo de sistemas eléctricos mais comuns, com resistências, capacidades, bobinas, fontes de tensão e fontes de corrente.

Cada tipo de componente tem a sua missão específica.



Para a resistência R, $v(t) = \mathrm{R}\, i(t)$

A energia dissipada é dada pelo efeito de Joule: $W_R = \mathrm{R}\, i(t)^2$

A resistência não armazena energia, dissipa-a apenas. Se se tirar do circuito nela nada permanece.

Para o condensador C, $v(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

A energia armazenada num condensador é dada por $W_C = \dfrac{1}{2}\mathrm{C}\, v^2$.

Não depende da corrente, e permanece mesmo quando esta se extingue.

A corrente no condensador dada por

A tensão v no condensador depende da corrente nele acumulada, isto é,

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dv}{dt} \quad (\text{porque } Q = CV) \text{ e portanto } \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

integrando ambos os lados da equação obtém-se .

$$v(t) = \frac{1}{\mathrm{C}}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^t i(t)dt + v_o$$ sendo 0 o instante inicial e v_0 a tensão inicial.

R i(t)

Se se retirar o condensador do circuito, depois de o carregar, a sua energia permanece nele. Por isso se pode chamar energia potencial, que se poderá usar colocando o condensador num circuito (tal como a energia hídrica contida numa barragem).

Para a bobina L,

\+ -

$$v(t) = \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt}$$

V

integrando ambos os lados da equação .

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)dt = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + i_0$$ sendo 0 e i_0 o instante e a corrente iniciais.

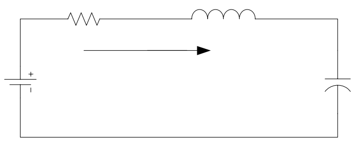
A energia armazenada numa bobina é dada por $W_L = \dfrac{1}{2}\mathrm{L}\, i^2$ e existe portanto apenas quando há circulação de corrente. Ela é armazenada no campo magnético criado pela

C i(t)

\+ -

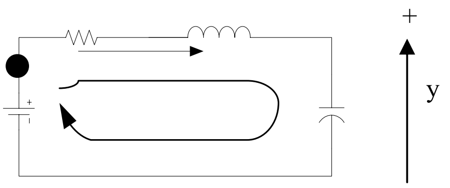
corrente quando circula na bobina. Retirando a bobina do circuito, nada nela permanece. Por isso a sua energia se pode chamar de cinética, por depender do movimento (da circulação da corrente de electrões).

Muitos sistemas contêm os três tipos de elementos do circuito RLC: dissipador de energia, armazenador de energia potencial e armazenador de energia cinética. Estes elementos recebem energia das fontes (de energia) do sistema. Em muitos casos poderemos reduzir os fenómenos no sistema a estas trocas (e dissipações) de energia.



Para esse obter um modelo matemático do circuito, aplicam-se as leis dos circuitos eléctricos: de Ohm, de Kirchoff, do condensador e da bobina.

Lei de Kirchoff: numa malha fechada, em qualquer circuito eléctrico, a soma das tensões é nula. Considere-se o ponto negro no circuito e uma malha fechada que dele parte e a ele regressa. Aplicando a lei de Kirchoff das tensões:



$$v_R + v_L + v_C - u = 0$$

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt - u(t) = 0$$

Se definirmos a saída do nosso sistema eléctrico como a tensão no condensador C, teremos

$$i(t) = \mathrm{C}\frac{dy(t)}{dt} = \mathrm{C}\,\dot{y}, \qquad \frac{di(t)}{dt} = \mathrm{C}\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \mathrm{C}\,\ddot{y}$$

Substituindo na equação da malha, e simplificando a escrita,

$$\mathrm{RC}\,\ddot{\mathrm{y}} + \mathrm{LC}\,\dot{y} + y - u = 0$$

ou, dividindo tudo por RC,

$$\ddot{\mathrm{y}} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}u$$

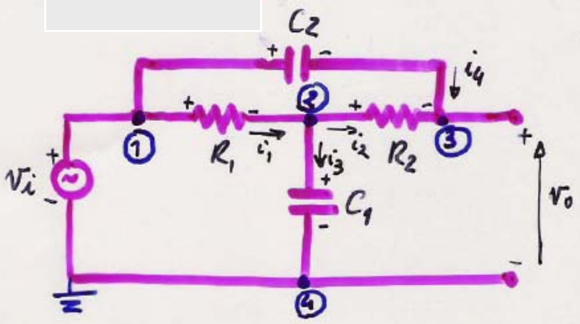
uma equação diferencial de 2ª ordem que relaciona a entrada do sistema (o circuito) com a sua saída. Poderemos representar o circuito pelo diagrama de blocos seguinte

Os elementos armazenadores de energia deste sistema são o condensador e a bobina. A resistência não armazena, dissipa.

Se quiséssemos guardar informação sobre o passado do circuito (a corrente que nele circulou) quais os elementos do circuito que o permitem fazer?

A carga actual do condensador é o efeito acumulado de todas as correntes que o atravessaram. Por isso se pode dizer que o condensador exprime, através da sua carga, toda a história passada (do ponto de vista da corrente). O mesmo se pode dizer da bobina (do ponto de vista das tensão). Quer dizer que esses dois componentes armazenadores de energia, o condensador e a bobina, contêm a história e portanto a memória do sistema.

Exemplo 2.



Técnica dos nós

i) - selecciona-se um nó de referência (a massa, em geral)

ii) - as tensões nos outros nós escolhem-se como incógnitas

iii) - escreve-se uma equação de Kirchoff (de corrente) para cada nó

iv) - exprimem-se as correntes em função das incógnitas e dos parâmetros do circuito

i) ④ é o nó de referência

ii) As incógnitas serão v_2 e v_3 ($v_1 = v_i$, a entrada)

iii) Equação no nó ②

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Equação no nó ③

$$i_2 + i_4 = 0$$

Note-se que o número de equações de nó deve ser igual ao número de incógnitas.

iv)
$$\frac{v_i - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \frac{dv_2}{dt}$$

$$\frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_2 \frac{d(v_i - v_3)}{dt} = 0$$

duas equações diferenciais de 1ª ordem, lineares de coeficientes constantes

Escrevendo-as em função de $v_{C_1} \triangleq v_2$ e de $v_{C_2} \triangleq v_1 - v_3$,
(agora $v_3 = v_i - v_{C_2}$)

$$\begin{cases} \dfrac{v_i - v_{C_1}}{R_1} = \dfrac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R} + C_1 \dfrac{d v_{C_1}}{dt} \\[2ex] \dfrac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R_2} + C_2 \dfrac{d\left(v_i - v_i + v_{C_2}\right)}{dt} = 0 \end{cases}$$

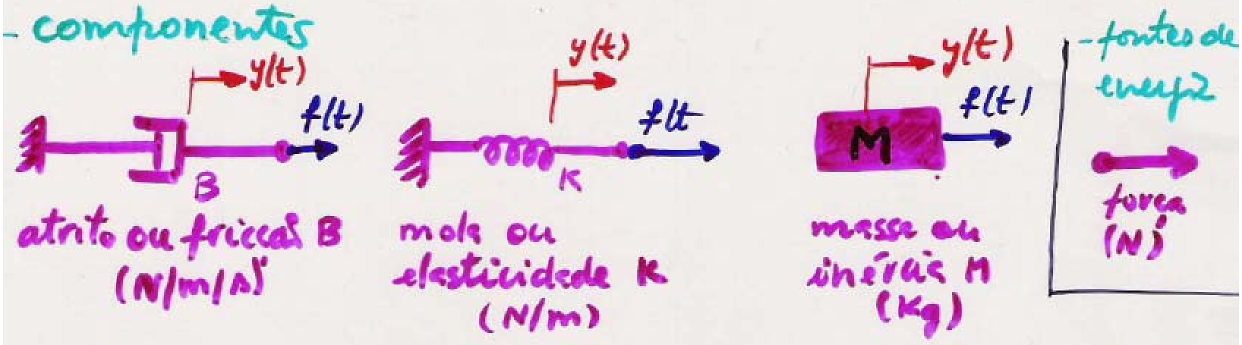
$$\dot{v}_{C_1} = -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_{C_1} - \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}\right) v_{C_2} + \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_i$$

$$\dot{v}_{C_2} = -\frac{1}{C_2 R_2} v_{C_1} - \frac{1}{C_2 R_2} v_{C_2} + \frac{1}{C_2 R_2} v_i$$

2.2. Sistemas mecânicos de translação

(movimento de translacção)

- componentes



Aplica-se uma força $f(t)$, produz-se um deslocamento $y(t)$.
(em repouso, antes de aplicar $f(t)$, o deslocamento é nulo, a posição é a de referência, $y \triangleq 0$)

- leis

atrito B
$$f(t) = B\frac{dy(t)}{dt}$$

mola K
$$f(t) = K\,y(t)$$

massa M
$$f(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt}$$

- parâmetros: B, K, M
- armazenadores de energia

mola : $e = \frac{1}{2} K y^2$ (potencial)

massa : $e = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M (\dot{y})^2$ (cinética)

Joules ou N-m

- dissipador de energia

atrito : $W = B v^2 = B(\dot{y})^2$ (N-m/s ou Watts)
(potência)
$e = \int W \cdot dt$

- princípio fundamental para a análise
lei de Newton (eq. de movimento)

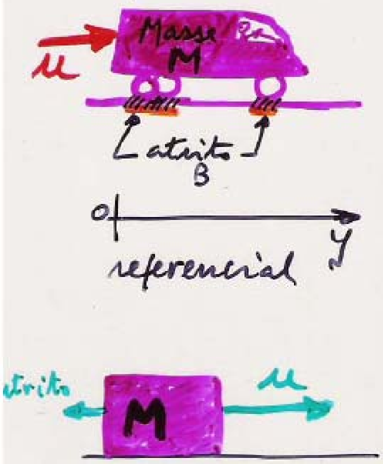
$$F = M \cdot a$$

soma de todas as forças aplicadas ao corpo de massa M (N)

massa do corpo (Kg)

aceleração a que o corpo é submetido (m/s^2)

Exemplo 1.



Quais as forças aplicadas à massa M?

- u, aplicada do exterior
- o atrito opõe-se ao movimento, ou seja, aplica uma força de sinal contrário ao de u

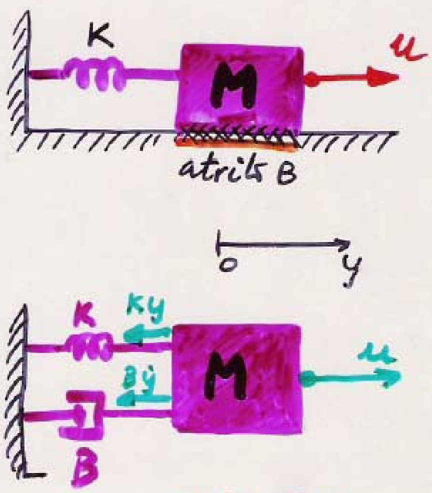
$$f_a = B\dot{y}$$

Lei de Newton

$$u - B\dot{y} = M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + B\dot{y} = u$$

Exemplo 2



Quais as forças aplicadas a M?

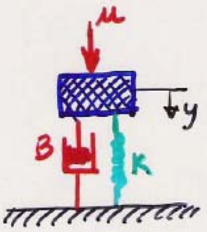
- u, aplicada do exterior
- o atrito, $f_a = B\dot{y}$
- a que exerce a mola sob tensão, $f_{mola} = Ky$

Lei de Newton

$$u - Ky - B\dot{y} = M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$$

Exemplo 3 : Suspensão de um automóvel



M ≙ massa do automóvel

u ≙ força vertical aplicada ao veículo (por acção da gravidade) quando aparece um buraco.

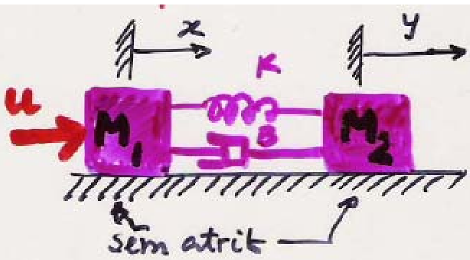
$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$$

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = \frac{u}{M}$$

(semelhante ao exemplo 4.2.2.)

(eq. dif. linear, 2ª ordem, coef. const.)

Exemplo 4.

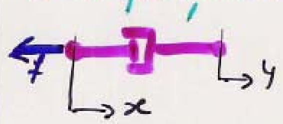


Que forças actuam sobre M_1?

- u, força aplicada externa
- a força da mola sujeita a movimento

$f_{mola} = K(x-y)$

- a força do atrito, contra o mov.

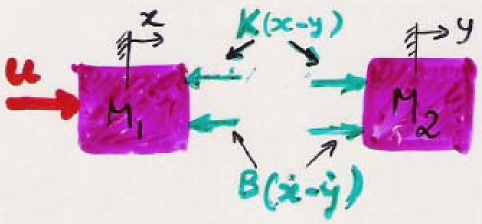


$f_B = B(\dot{x}-\dot{y})$

Lei de Newton a M_1

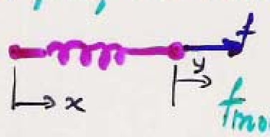
$$u - K(x-y) - B(\dot{x}-\dot{y}) = M_1\ddot{x}$$

$$M_1\ddot{x} + B(\dot{x}-\dot{y}) + K(x-y) = u$$



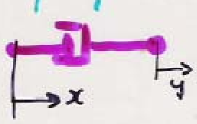
Que forças actuam sobre M_2?

- não há forças exteriores
- a força da mola



$f_{mola} = K(x-y)$

- a força do atrito



$f_B = B(\dot{x}-\dot{y})$

Lei de Newton a M_2

$$K(x-y) + B(\dot{x}-\dot{y}) = M_2\ddot{y}$$

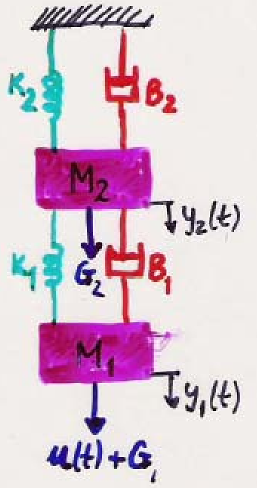
$$M_2\ddot{y} - B(\dot{x}-\dot{y}) - K(x-y) = 0$$

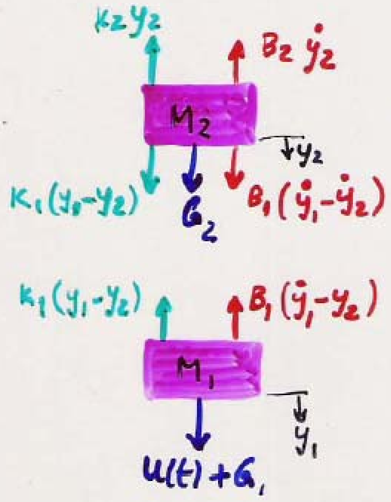
$$M_2\ddot{y} + B(\dot{y}-\dot{x}) + K(y-x) = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{B}{M_1}(\dot{x}-\dot{y}) + \dfrac{K}{M_1}(x-y) = \dfrac{u}{M_1} \\ \ddot{y} + \dfrac{B}{M_2}(\dot{y}-\dot{x}) + \dfrac{K}{M_2}(y-x) = 0 \end{cases}$$

duas eq. diferenciais lineares de 2ª ordem com coef. constantes.

Exemplo 5.





$G_2 = M_2 g$

$G_1 = M_1 g$

Lei de Newton a M_1

$$u(t) + M_1 g = M_1 \ddot{y}_1(t) + B_1\left[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\right] + K_1\left[y_1(t) - y_2(t)\right]$$

Lei de Newton a M_2

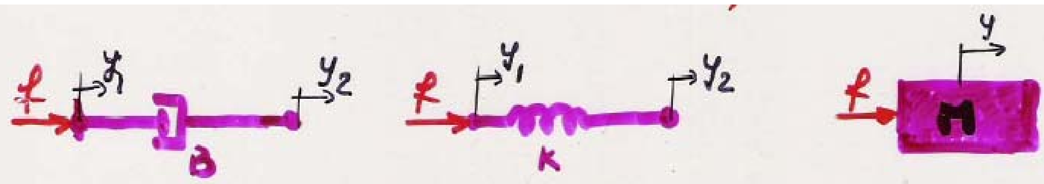
$$M_2 g + B_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + K_1(y_1 - y_2) - B_2\dot{y}_2 - K_2 y_2 = M_2\ddot{y}_2$$

(Nota: para simplificar escreve-se y em vez de $y(t)$, etc.)

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \dfrac{B_1}{M_1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \dfrac{K_1}{M_1}(y_1 - y_2) = \dfrac{u}{M_1} + g \\[2ex] \ddot{y}_2 - \dfrac{B_1}{M_2}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \dfrac{B_2}{M_2}\dot{y}_2 - \dfrac{K_1}{M_2}(y_1 - y_2) + \dfrac{K_2}{M_2}y_2 = g \end{cases}$$

sistema de duas equações diferenciais de 2.ª ordem, lineares, de coeficientes constantes, redutível a uma de 4.ª ordem.

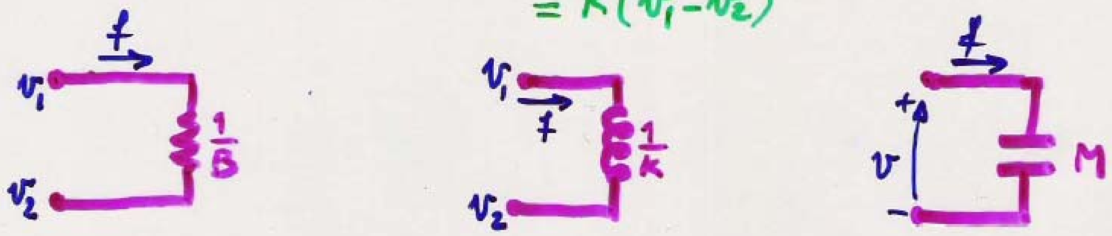
Comparação com os eléctricos



$f = B(\dot y_1 - \dot y_2)$ $\quad f = K(y_1 - y_2)$ $\quad f = M \cdot \ddot y$

$y \triangleq$ posição ; $\dot y \triangleq$ velocidade v; $\ddot y \triangleq$ aceleração a;
$a = \dot v$

$f = B(v_1 - v_2)$ $\quad \dot f = K(\dot y_1 - \dot y_2) = K(v_1 - v_2)$ $\quad f = M \dot v$



$f = \frac{v_1 - v_2}{1/B} = B(v_1 - v_2)$ $\quad v_1 - v_2 = \frac{1}{K}\frac{df}{dt} = \frac{1}{K}\dot f$ $\quad f = M\frac{dv}{dt} = M\dot v$

$\dot f = K(v_1 - v_2)$

mecânico		eléctrico	
atrito	B	condutância	$G = 1/R$
massa	M	capacidade	C
mola	K	indutância^{-1}	$1/L$
força	f	corrente	i
velocidade	v	tensão	v

Quadro de analogias mecânico ⇔ eléctrico
translação