2.3. Sistemas mecânicos de rotação

- componentes

- fonte de energia

atrito ou fricção rotativa B (N-m/rad/s) | torção K N-m/rad | inercia J kg-m² | Binário (N-m)

Aplica-se um binário $T(t)$, produz-se uma rotação (deslocamento angular) $\theta°$ em relação à posição angular de repouso.

- leis

fricção B
$$T(t) = B\frac{d\theta(t)}{dt} = B\,\omega(t)$$

torção K
$$T(t) = K\,\theta(t)$$

inércia J
$$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt} = J.\alpha(t)$$

- parâmetros: B, K, J
- armazenadores de energia:

torção : $e = 1/2\,K\theta^2$ (potencial)

inércia : $e = 1/2\,J\omega^2 = 1/2\,J(\dot{\theta})^2$ (cinética).

(Joule ou N-m)

- dissipador de energia:

fricção rotativa : $W = B\omega^2 = B(\dot{\theta})^2$ (N-m/s ou Watt)
(potência)

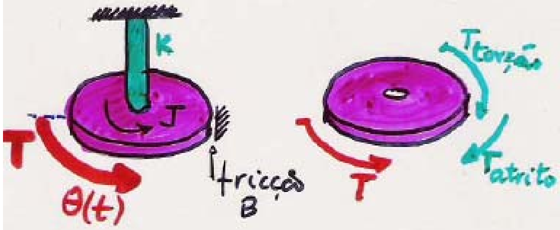
$e = \int W.dt$

- princípio fundamental de análise
lei de Newton

$$T = J.\alpha$$

soma de todos os binários aplicados (em relação ao eixo fixo do corpo). | momento de inércia do corpo | aceleração angular

Exemplo: Disco suspenso por um eixo fixo na outra extremidade



$K \triangleq$ coeficiente de torção do eixo

$B \triangleq$ fricção entre o disco e a superfície exterior

$T \triangleq$ binário exterior aplicado

$J \triangleq$ momento de inércia em relação ao eixo.

Quais são os binário aplicados ao disco?

- binário exterior $T(t)$
- binário resultante da torção do eixo, $T_{torção} = K\,\theta(t)$
- binário devido ao atrito B, $T_{atrito} = B\,\dot{\theta}(t) = B\,\omega(t)$

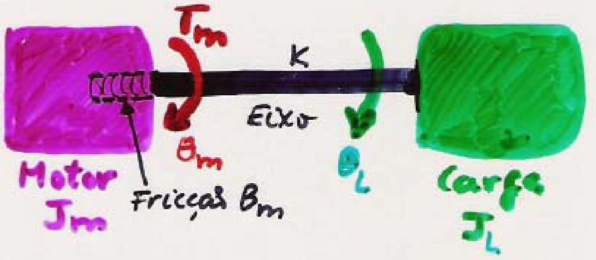
Lei de Newton aplicada ao disco

$$T - T_{torção} - T_{atrito} = J\,\ddot{\theta}$$

$$T - k\theta - B\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \Rightarrow J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta = T$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{J}\dot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = \frac{T}{J}$$, eq. dif. 2ª ordem, linear invariante

Exemplo 2: Motor com carga acoplada



$T_m \triangleq$ binário do motor

$J_m \triangleq$ momento de inércia do motor + eixo

$B_m \triangleq$ coef. de fricção interna do motor

$K \triangleq$ coef. de torção do eixo

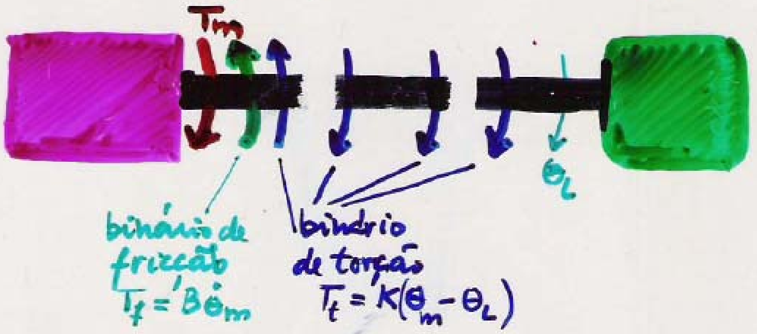
$J_L \triangleq$ momento de inércia da carga

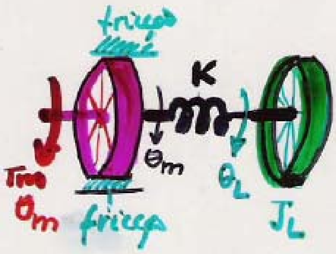
$\theta_m \triangleq$ deslocamento angular do motor

$\theta_L \triangleq$ desloc. ang. da carga

O motor aplica T_m ao eixo. Este opõe-se-lhe com o binário de torção mais o binário de atrito.

O eixo aplica à carga o seu binário de torção. É este que produz a rotação da carga (se o coeficiente de torção K fosse nulo, não era possível transmitir qualquer binário à carga)





Lei de Newton aplicada ao motor

$$T_m - B\dot{\theta}_m - K(\theta_m - \theta_L) = J_m \ddot{\theta}_m$$

Lei de Newton aplicada à carga

$$K(\theta_m - \theta_L) = J_L \ddot{\theta}_L$$

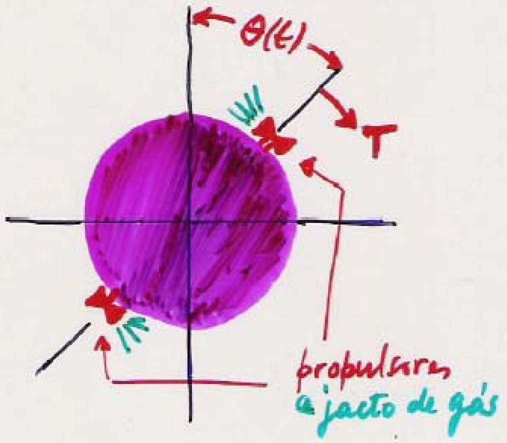
$$\ddot{\theta}_m + \frac{B}{J_m}\dot{\theta}_m + \frac{K}{J_m}(\theta_m - \theta_L) = \frac{T_m}{J_m}$$

$$\ddot{\theta}_L - \frac{K}{J_L}(\theta_m - \theta_L) = 0$$

(2 eq. dif. lin. 2ª ord. coef. const.) redutíveis a 1 eq. dif. de 4ª ordem)

Exemplo 3: Orientação de um satélite

As antenas de um satélite de telecomunicações têm que estar bem orientadas em relação à estação terrestre. Se por qualquer razão o satélite gira indevidamente em torno do seu eixo, perde-se o contacto. Por isso os satélites estão equipados com mecanismos que lhes permite (sob controlo terrestre) orientar-se (segundo as três coordenadas espaciais). Em relação a um eixo perpendicular à página passa-se como ilustrado na figura.



Propulsores - aplicam um binário de rotação, em ambos os sentidos, conforme são disparados.

Admitindo que não há atrito e que o corpo do satélite é rígido (não se deforma), tendo o satélite momento de inércia J,

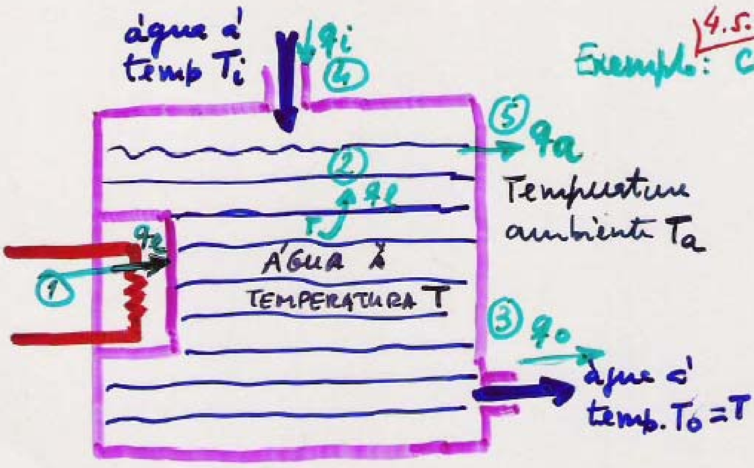
$$T = J\ddot{\theta}$$

é a equação do movimento do satélite em torno do eixo referido.

2.4 Sistemas térmicos

Os sistemas térmicos transmitem e armazenam energia térmica (quantidade de calor).

Exemplo: 4.5.1. cilindro doméstico



(1) $q_e \triangleq$ quantidade de calor fornecido pela resistência eléctrica

(2) $q_l \triangleq$ quantidade de calor absorvida pela água no cilindro

(3) $q_o \triangleq$ quantidade de calor que sai do cilindro (na água)

(4) $q_i \triangleq$ quantidade de calor que entra no cilindro (na água)

(5) $q_a \triangleq$ quantidade de calor que passa (pela parede) para fora.

PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

$$\underbrace{q_e + q_i}_{\text{calor que entra}} = \underset{\text{calor que fica}}{q_l} + \underbrace{q_o + q_a}_{\text{calor que sai}}$$

cálculo dos diversos q's

- q_e : fornecido pela resistência eléctrica
em cada instante,

$$q_e = R\,i^2 \triangleq u$$

- q_ℓ : absorvido pela água no cilindro
durante um intervalo de tempo Δt

$$q_\ell \cdot \Delta t = M \cdot c \cdot \Delta T$$

massa de água — calor específico da água — variação de temp. da água

$$q_\ell = M \cdot c \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} \xrightarrow[\lim \Delta t \to 0]{} q_\ell = Mc\,\frac{dT}{dt}$$

- q_i : fornecido na água que entra com caudal
V(kg/s) à temperatura T_i

$$q_i = V \cdot c \cdot T_i$$

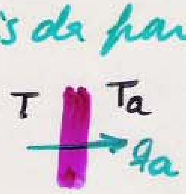
- q_o : sai, com a água, do cilindro

$$q_o = V \cdot c \cdot T$$

(admitindo que o caudal de saída é igual ao de entrada)

- q_a : perde-se para o ambiente através da parede

$R \triangleq$ resistência térmica da parede



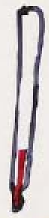
$$q_a = \frac{T - T_a}{R}$$

substituindo na equação do balanço de energia

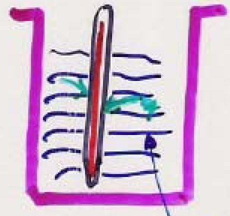
$$u + V \cdot c \cdot T_i = M \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} + V \cdot c \cdot T + \frac{T - T_a}{R}$$

$$\dot{T} + \left(\frac{1}{RMc} + \frac{V}{M}\right) T = \frac{1}{Mc}\,u + \frac{V}{M}\,T_i + \frac{V}{R.M.c}\,T_a$$

Exemplo: Termómetro de mercúrio (de Carvalho, M).



temp. T_m

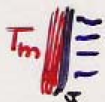


água à temperatura T_a

transmite-se calor da água ao mercúrio

quantidade de calor transmitida ao mercúrio em cada instante:

$$q(t) = \frac{T_a - T_m(t)}{R}$$



incremento da temperatura do mercúrio

$T_m(0) \triangleq$ temperatura inicial do mercúrio

$T_m(t) - T_m(0) \triangleq$ incremento da temperatura

$C \triangleq$ capacidade térmica do mercúrio (total)

$C \cdot T_m(t) \triangleq$ quantidade de calor contida no mercúrio

$C \cdot (T_m(t) - T_m(0)) \triangleq$ quantidade de calor absorvida pelo mercúrio desde 0 até t

balanço de energia

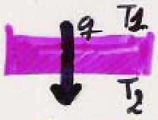
$$\underbrace{q(t)\cdot\Delta t}_{\substack{\text{quantidade}\\ \text{de calor fornecida}\\ \text{através da parede}}} = \underbrace{\Delta[C\cdot T_m(t)]}_{\substack{\text{incremento da}\\ \text{quantidade de}\\ \text{calor contido no}\\ \text{mercúrio}}} = C\cdot\Delta T_m(t)$$

$$\frac{T_a - T_m}{R} = C\,\frac{\Delta T_m}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} RC\,\dot{T}_m + T_m = T_a$$

$$\dot{T}_m + \frac{1}{RC}T_m = \frac{1}{RC}T_a$$

Comparação com os eléctricos:

- elemento dissipador



A: área
h: coef. transm. de calor

Resistência Térmica

$q = hA(T_1 - T_2)$

$q = \frac{1}{R}(T_1 - T_2)$

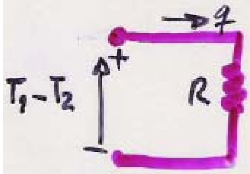
- elemento armazenador de energia

v: volume ; ρ: densidade
c: calor específico

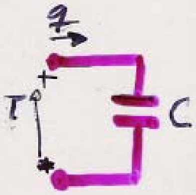
capacitância térmica

$q = (\rho V c)\dot{T} = \rho V c \frac{dT}{dt}$

$q = C \cdot \frac{dT}{dt}$



$q = \frac{T_1 - T_2}{R}$



$q = C \frac{dT}{dt}$

Térmico	↔ Eléctrico
resistência térmica R	↔ resistência eléctrica R
capacidade térmica C	↔ capacidade eléctrica C
temperatura T	↔ potencial v
fluxo de calor, q	↔ corrente i

Quadro de analogias eléctrico ↔ térmico

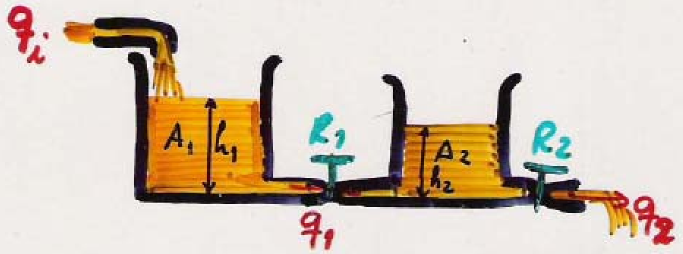
Sistemas análogos: sistemas de natureza energética diferente (neste caso eléctrica e térmica) mas com a mesma estrutura (componentes que têm funções análogas e sinais análogos). As suas equações diferenciais têm a mesma forma.

Dois sinais são análogos se, embora de natureza diferente (corrente, calor, por exemplo), têm a mesma evolução temporal.

Dois componentes são análogos se exercem sobre os respectivos sinais de entrada o mesmo efeito.

2.5 Sistemas fluídicos

Sistemas fluídicos são aqueles em que circulam e se armazenam fluidos, normalmente líquidos. Por exemplo dois vasos (tanques) comunicantes por uma válvula.



$A_1, A_2 \triangleq$ secções dos vasos (m^2)

$R_1, R_2 \triangleq$ resistências fluídicas das válvulas de passagem

$q_1, q_2, q_3 \triangleq$ caudais, m^3/s

$h_1, h_2 \triangleq$ níveis do líquido

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \ , \quad q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

Durante um intervalo de tempo Δt, em cada vaso entrou e saiu uma certa quantidade de líquido. Por isso os níveis variaram Δh_1 e Δh_2 e os volumes $A_1 \Delta h_1$ e $A_2 \Delta h_2$.

Para o vaso 1: $\underbrace{A_1 \Delta h_1}_{\text{aumento de volume}} = \underbrace{q_i \Delta t}_{\text{o que entrou}} - \underbrace{q_1 \Delta t}_{\text{o que saiu}}$

Para o vaso 2: $A_2 \Delta h_2 = q_1 \Delta t - q_2 \Delta t$

$$A_1 \frac{\Delta h_1}{\Delta t} = q_i - q_1 \qquad \lim_{\Delta t \to 0} A_1 \frac{\Delta h_1}{\Delta t} = q_i - q_1$$

$$A_2 \frac{\Delta h_2}{\Delta t} = q_1 - q_2 \qquad \lim_{\Delta t \to 0} A_2 \frac{\Delta h_2}{\Delta t} = q_1 - q_2$$

$$A_1 \dot{h}_1(t) = q_i(t) - q_o(t)$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) = q_1(t) - q_2(t)$$

$$R_1 \dot{q}_1 = \dot{h}_1 - \dot{h}_2 \qquad R_2 \dot{q}_2 = \dot{h}_2$$

$$\dot{h}_1 = R_1 \dot{q}_1 + R_2 \dot{q}_2$$

$$A_1 R_1 \dot{q}_1 + A_1 R_2 \dot{q}_2 = q_i - q_1$$

$$A_2 R_2 \dot{q}_2 = q_1 - q_2 \Rightarrow \begin{aligned} q_1 &= A_2 R_2 \dot{q}_2 + q_2 \\ \dot{q}_1 &= A_2 R_2 \ddot{q}_2 + \dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$A_1 A_2 R_1 R_2 \ddot{q}_2 + (A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2)\dot{q}_2 + q_2 = q_i$$