

DINÂMICA DE SISTEMAS BIOLÓGICOS E FISIOLÓGICOS

Capítulo 2 (Cont.)

2.6 Sistemas químicos

A modelização matemática dos processos químicos envolve os princípios básicos de termodinâmica, cinética, fenómenos de transporte, etc.

Um sistema químico recebe materiais e energia do exterior, fornece materiais e energia ao exterior e dentro dele acontecem reacções químicas.

Para escrevermos as suas equações aplica-se o princípio geral de conservação de massa e de energia (nada se perde, tudo se transforma).

Genericamente, o princípio de conservação do componente S do sistema é dada pela equação de balanço,

$$\frac{\left[\begin{array}{c} \text{acumulação de S} \\ \text{dentro do sistema} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} = \frac{\left[\begin{array}{c} \text{fluxo de S para} \\ \text{dentro do sistema} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{fluxo de S para} \\ \text{fora do sistema} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} + \frac{\left[\begin{array}{c} \text{quantidade de S} \\ \text{gerada no sistema} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{quantidade de S} \\ \text{consumida no sistema} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]}$$

S pode ser a massa total, a massa de um componente individual, a energia total.

Assim, para um sistema químico genérico, poderemos escrever

Balanço mássico total:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} \rho_i F_i - \sum_{j:\text{saídas}} \rho_j F_j$$

Balanço mássico para o componente A:

$$\frac{d(n_A)}{dt} = \frac{d(C_A V)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} c_{A_i} F_i - \sum_{j:\text{saídas}} c_{A_j} F_j \pm rV$$

Balanço energético total:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(U + K + P)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} \rho_i F_i h_i - \sum_{j:\text{saídas}} \rho_j F_j h_j \pm Q \pm W_s$$

em que

$\rho \triangleq$ densidade do material do sistema

$\rho_i \triangleq$ densidade do material do fluxo de entrada i

$\rho_j \triangleq$ densidade do material do fluxo de saída j

$V \triangleq$ volume total do sistema

$F_i \triangleq$ caudal volumétrico da entrada i

$F_j \triangleq$ caudal volumétrico da saída j

$n_A \triangleq$ número de moles do componente A no sistema

$c_A \triangleq$ concentração molar (moles/volume) de A no sistema

$c_{A_i} \triangleq$ concentração molar de A na entrada i

$c_{A_j} \triangleq$ concentração molar de A na saída j

$r \triangleq$ taxa de reação por unidade de volume para o componente A no sistema

$h_i \triangleq$ entalpia específica do material na entrada i

$h_j \triangleq$ entalpia específica do material na saída j

$U, K, P \triangleq$ energia interna (U), cinética (K) e potencial (P)

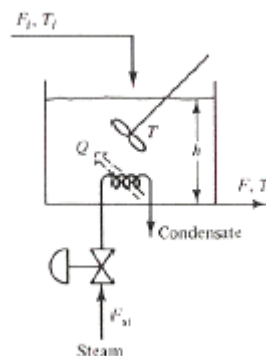
$Q \triangleq$ quantidade de energia trocada entre o sistema e o seu ambiente por unidade de tempo

$W_s \triangleq$ trabalho (shaft work) trocado entre o sistema e o seu ambiente por unidade de tempo

Aplicando a um sistema qualquer obtêm-se equações diferenciais de 1ª ordem, que constituem o seu modelo matemático.

Exemplo: aquecimento de um tanque bem agitado (*stirred-tank*)

Seja um tanque que está a ser alimentado por um caudal de líquido F_i (m^3/min) à temperatura T_i ($^\circ\text{C}$). No tanque é aquecida por uma serpentina a vapor onde entra um caudal de vapor de F_v kg/min . Do tanque sai um caudal F de líquido à temperatura T . O tanque está bem agitado e por isso a temperatura da saída é iguala temperatura dentro do tanque. O vapor de aquecimento, ao perder energia na serpentina condensa, saindo o condensado para o exterior.



(de Stephanopoulos)

Aplicando os princípios genéricos indicados acima

Massa total no tanque M_t :

$$M_t = \rho V = \rho A h$$

sendo ρ a densidade do líquido, A a secção do tanque, h o nível do líquido.

Energia total do líquido no tanque E_t :

$$E_t = U + K + P$$

Não há variação da energia potencial nem da cinética porque o tanque não se move.

Por isso a variação da energia será apenas a variação da energia interna U .

Para líquidos, sendo H a sua entalpia,

$$\frac{dU}{dt} \approx \frac{dH}{dt}$$

$$H = \rho V c_p (T - T_{ref})$$

sendo

$c_p \triangleq$ capacidade térmica do líquido no tanque

$T_{ref} \triangleq$ temperatura de referência à qual se assume que a entalpia do líquido é nula.

Aplice-se agora o princípio da conservação da massa e da energia.

Conservação da massa:

$$\frac{\left[\begin{array}{c} \text{acumulação da} \\ \text{massa total} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} = \frac{\left[\begin{array}{c} \text{massa total} \\ \text{entrada} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{massa total} \\ \text{saída} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho A h)}{dt} &= \rho F_i - \rho F \Rightarrow \frac{\rho A dh}{dt} = \rho F_i - \rho F \Rightarrow A \frac{dh}{dt} = F_i - F \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dh}{dt} &= \frac{F_i}{A} - \frac{F}{A} \end{aligned}$$

Conservação da energia

$$\frac{\left[\begin{array}{c} \text{acumulação de} \\ \text{energia total} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} = \frac{\left[\begin{array}{c} \text{total de energia} \\ \text{entrada} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{total de energia} \\ \text{saída} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]} + \frac{\left[\begin{array}{c} \text{energia fornecida} \\ \text{pelo vapor} \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{c} \text{intervalo} \\ \text{de tempo} \end{array} \right]}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d[\rho Ahc_p(T - T_{ref})]}{dt} &= \rho F_i c_p (T_i - T_{ref}) - \rho F c_p (T - T_{ref}) + Q \\ \Rightarrow \frac{\rho A c_p d[h(T - T_{ref})]}{dt} &= \rho F_i c_p (T_i - T_{ref}) - \rho F c_p (T - T_{ref}) + Q \\ \Rightarrow \frac{Ad[h(T - T_{ref})]}{dt} &= F_i(T_i - T_{ref}) - F(T - T_{ref}) + \frac{Q}{\rho c_p} \\ \Rightarrow \frac{Ad[hT]}{dt} &= F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho c_p}, \text{ assumindo } T_{ref} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Ad[hT]}{dt} &= Ah \frac{dT}{dt} + AT \frac{dh}{dt} = Ah \frac{dT}{dt} + T(F_i - F) \\ \Rightarrow Ah \frac{dT}{dt} + T(F_i - F) &= F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho c_p} \\ \Rightarrow Ah \frac{dT}{dt} &= F_i(T_i - T) + \frac{Q}{\rho c_p} \\ \Rightarrow \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{Ah} F_i(T_i - T) + \frac{1}{Ah} \frac{Q}{\rho c_p} \end{aligned}$$

Juntando as duas equações

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{F_i}{A} - \frac{F}{A} \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{Ah} F_i(T_i - T) + \frac{1}{Ah} \frac{Q}{\rho c_p} \end{aligned}$$

obtem-se um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem não lineares acopladas.

Note-se que este sistema químico é a conjugação de um fluídico com um térmico.

2.7 . Sistemas biológicos

Os sistemas biológicos descrevem o funcionamento dos seres vivos. Vejamos o exemplo da modelização da evolução da população de espécies.

2.7.1.Crescimento de uma população de uma espécie biológica

Suponhamos uma espécie biológica cujos indivíduos nascem e morrem na mesma estação (isto é, vivem um número inteiro de anos).

Inicialmente existem N_0 indivíduos. Ao fim de um ano, N_1 indivíduos, etc., ao fim de k anos N_k indivíduos.

Em princípio poderemos admitir que

$$N_1 = AN_0$$

em que A é uma constante positiva que depende das condições ambientais (existência de alimentos, água, clima, etc.). Se $A > 1$, a população aumenta; se $A < 1$, diminui; até à extinção. Se A é constante ao longo dos anos, a população crescerá ilimitadamente, levando à explosão populacional Maltusiana.

Ora se a população crescer sem limite, não haverá alimentos suficientes por um lado, e por outro lado os predadores terão mais facilidade em caçar indivíduos da espécie em análise, e por isso o crescimento da população será limitado. Este efeito de limitação pode ser introduzido na equação através de um termo subtractivo que seja insignificante para pequenos valores de N (pequenas populações) e muito influente para grandes valores de x , por exemplo

$$N_1 = AN_0 - BN_0^2$$

Se $B \ll A$, o termo subtractivo só será relevante para grandes valores de N .

Nos anos seguintes teremos

$$\begin{aligned} N_2 &= AN_1 - BN_1^2 \\ N_3 &= AN_2 - BN_2^2 \end{aligned}$$

Há-de haver uma altura m em que a população não poderá crescer mais, isto é, em que atinge o seu valor máximo, N_{max} . No instante seguinte

$$N_{m+1} = AN_{max} - BN_{max}^2$$

para que N_{m+1} seja positivo,

$$\begin{aligned} AN_{max} - BN_{max}^2 &\geq 0 \Rightarrow N_{max}(A - BN_{max}) \geq 0 \Rightarrow A - BN_{max} \geq 0 \\ \Rightarrow A &\geq BN_{max} \Rightarrow N_{max} \leq \frac{A}{B} \end{aligned}$$

Encontrámos assim o limite superior da população, A/B .

Exprimindo a população como uma fracção da população máxima, por x_k ,

$$x_k = \frac{N_k}{N_{max}}$$

teremos, da equação anterior, substituindo,

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= AN_k - BN_k^2 \Rightarrow x_{k+1}N_{max} = Ax_kN_{max} - Bx_k^2N_{max}^2 \Rightarrow x_{k+1} = Ax_k - Bx_k^2N_{max} \\ \Rightarrow x_{k+1} &= Ax_k - Bx_k^2 \frac{A}{B} \Rightarrow x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) \end{aligned}$$

Temos assim encontrado o modelo de crescimento populacional, na forma de uma equação de diferenças não linear,

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = f(x_k), \quad x \in [0,1]$$

em que x_k é a população no ano k , como uma fracção da população máxima.

Haverá estados de equilíbrio, em que a população se mantém constante ao longo do tempo? Nestas circunstâncias teríamos

$$x_{k+1} = x_k$$

ou seja,

$$x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = x_k \Rightarrow Ax_k - Ax_k^2 = x_k \Rightarrow (A - 1 - Ax_k)x_k = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - 1 - Ax_k = 0 \\ x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = \frac{A-1}{A} \\ x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k = 1 - \frac{1}{A} \\ x_k = 0 \end{cases}$$

Se $A > 1$, temos assim dois estados de equilíbrio. Se $A < 1$, só a origem pode ser estado de equilíbrio, dado que x_k tem que ser maior do que zero. Note-se que $A > 0$.

2.7.2. Modelo Lotka-Volterra de predador-presa

Este modelo (<http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/engin/predprey/pred2.html>) descreve a interacção biológica entre duas espécies, na relação particular em que uma, predadora, come a outra, a presa. Há muitos exemplos na natureza: leão-gazela, pássaro-insecto, pandas-eucaliptos, etc.. Para não complicar o modelo façam-se as seguintes hipóteses:

- a espécie predadora é totalmente dependente da presa (é o seu único alimento),
- a presa tem uma quantidade ilimitada de alimentos,
- a presa só tem um predador, o que está a ser considerado e não tem outras limitações.

Na natureza as coisas são mais complicadas, mas assim poderemos desenvolver um modelo aceitavelmente complexo.

Se existirem zero predadores, a presa não tem qualquer limite ao seu crescimento e por isso cresce exponencialmente. Sendo $x(t)$ a população actual no instante t , a sua taxa de crescimento será

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

Mas havendo predadores, o crescimento será menor: os predadores introduzem um factor negativo nesta equação.

Se $y(t)$ for a população de predadores no instante t , cada um deles tem certa probabilidade de encontrar uma presa. Essa probabilidade é tanto maior quanto mais predadores existirem e tanto maior quanto mais presas existirem. Por isso se pressupõe que

- a taxa de encontros entre um predador e uma presa é conjuntamente proporcional ao tamanho das duas populações.

- dos encontros realizados, uma parte fixa resulta na morte da presa.

Assim

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

Quanto à população de predadores, y , se não tiver alimentos morre a uma velocidade proporcional ao seu tamanho, ou seja, neste caso,

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t)$$

por não haver energia para novos nascimentos.

Ora felizmente para os predadores existem presas, e por isso eles vão aí buscar energia para se reproduzirem. Por cada encontro predador - presa há uma parte que resulta em alimentos para o predador e por isso a sua população variará de acordo com

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + px(t)y(t)$$

sendo p uma constante.

Juntando as equações obtidas obtém-se o modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + px(t)y(t)\end{aligned}$$

composto por duas equações diferenciais de 1ª ordem acopladas, que não podem ser resolvidas separadamente e para as quais não é possível encontrar uma solução analítica (mas apenas computacional).

Pode-se mostrar que existe um par (x_s, y_s) para o qual $dx/dt=dy/dt=0$, isto é, as populações estão em equilíbrio e não variam ao longo do tempo. Para isso basta fazer

$$0 = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$0 = -cy(t) + px(t)y(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [a - by(t)]x(t) = 0 \wedge x(t) \neq 0 \\ [-c + px(t)]y(t) = 0 \wedge y(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [a - by(t)] = 0 \\ [-c + px(t)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = \frac{a}{b} \\ x(t) = \frac{c}{p} \end{cases}$$

um tal estado chama-se regime permanente ou estado estacionário. O seu valor depende das constantes $a, b, c, e p$, os parâmetros do modelo.

Voltaremos a este modelo mais tarde (trajectórias de fase, estados de equilíbrio, ...).

Existem modelos mais completos de duas populações. Por exemplo em <http://www.math.montana.edu/frankw//ccp/modeling/continuous/twovars/body.htm> encontra-se um modelo que inclui competição (luta pelos mesmos recursos) entre espécies, interacção agressiva (combatem-se activamente, embora não se comam), cooperação ou simbiose (ajudam-se mutuamente), relação predador-presa, interacção forte-fraco (uma espécie está mais capacitada para sobreviver).

2.8 Sistemas fisiológicos

Os sistemas fisiológicos incluem os organismos dos animais em geral e do homem em particular. São dos sistemas mais complexos que a natureza criou. Eles compõem-se em grande medida de sistemas dos tipos que vimos (mecânicos, fluídicos, químicos, etc.) que ao incluírem órgãos vivos adquirem, por sinergia, novas propriedades.

Vejamos o exemplo de um vaso sanguíneo

Considere-se um vaso sanguíneo ilustrado na figura.

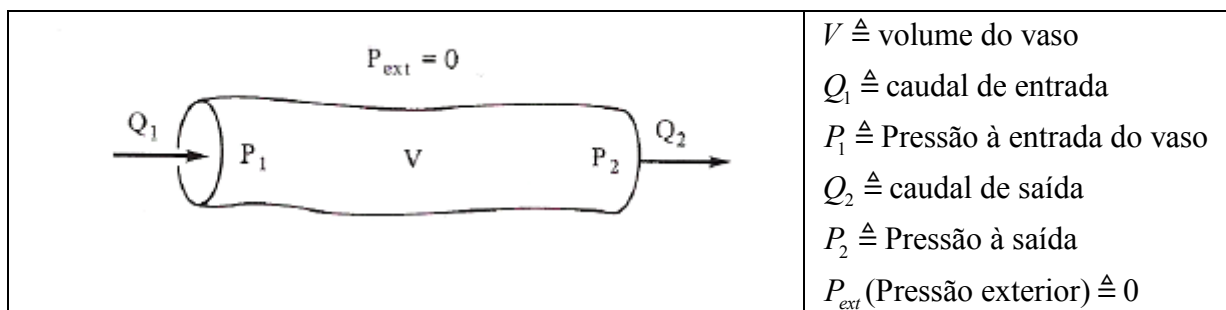


Figura . Representação de um vaso sanguíneo (de Hoppensteadt , p. 9)

Admita-se que o vaso está a funcionar em regime permanente em que todas aquelas quantidades são constantes. Nessas condições, necessariamente $Q_1=Q_2$, porque não há acumulação de sangue no vaso por ser constante o seu volume. Seja $Q=Q_1=Q_2$ esse valor do fluxo.

Para encontrarmos uma relação entre Q , P_1 , P_2 e V consideram-se duas propriedades do vaso: a sua resistência ao fluxo e a sua complacência (*compliance*) para com a pressão (que tende a aumentar a sua secção). A fim de facilitar a análise idealizem-se duas situações:

- i) um vaso sem complacência, rígido, de volume constante e bem conhecido. Para ele teremos, como nos sistemas fluídicos,

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

A R chama-se resistência do vaso e teremos aqui um vaso de resistência.

- ii) um vaso elástico sem qualquer resistência fluídica. Nestas condições a pressão na entrada é igual à pressão na saída, para qualquer valor de Q . A relação entre a pressão P e o volume do vaso pode ser aproximada pela relação

$$V = CP \Rightarrow C = \frac{V}{P}$$

em que a constante C se chama a complacência do vaso. Também se pode escrever

$$V = V_d + CP$$

em que V_d é o volume do vaso para pressão nula (volume “morto”, *dead*). C é na mesma a complacência do vaso.

Poderemos constatar a analogia das duas situações seguintes:

vaso	Conforma a complacência C , o vaso alarga-se até chegar a um volume fixo, que depende da complacência. Aí
	$V=CP$

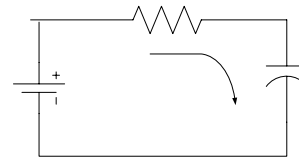
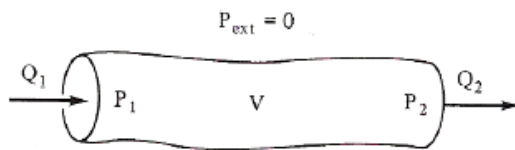
condensador	Conforma a capacidade C , o condensador carrega-se até chegar a uma carga fixa, que depende da capacidade. Aí
	$Q=CV$

Estas situações i) e ii) idealizadas exprimem a realidade com alguma aproximação. Um vaso real tem resistência e complacência ao mesmo tempo. A relação entre as variáveis não é exactamente linear.

No corpo humano a circulação produz uma divisão entre os vasos de resistência e os vasos de complacência. As grandes artérias e veias são sobretudo de complacência, porque bastam pequenas diferenças de pressão para produzir o fluxo de sangue, e o seu volume sofre variações muito significativas. As pequenas artérias e veias nos tecidos (arteríolas e vénulas) são sobretudo vasos de resistência: o seu volume varia pouco e verificam-se aí grandes diferenças de pressão.

Considerando as duas propriedades poderemos conceber um circuito eléctrico equivalente de um vaso, com as seguintes analogias

Vaso		Circuito electrico	
Pressão,	P	V,	Tensão
Volume,	V	Q,	Carga,
Caudal,	Q	i ,	Corrente,
Resistência,	R	R,	Resistência
Complacência,	C	C,	Condensador C



P_1 variável

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{P_2}{RC} + \frac{P_1}{RC}$$

v_1 variável

$$C \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_1 - v_2}{R} \Rightarrow \frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2}{RC} + \frac{v_1}{RC}$$

Modelo biomecânico da inspiração/expiração pulmonar

O acto de inspirar e expirar pode ser descrito por um sistema biomecânico ilustrado pela figura seguinte.

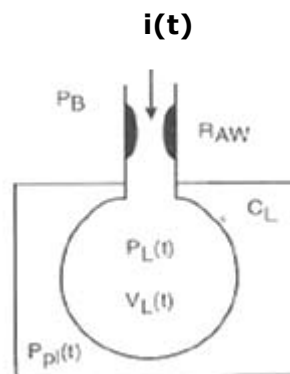


Figura . A biomecânica da inspiração (Bruce, p. 31).

No estado de relaxamento, sem qualquer fluxo de ar, a pressão dentro dos pulmões é igual à pressão atmosférica, P_B . Durante a inspiração os músculos respiratórios – isto é, o diafragma e os músculos da caixa torácica contraem-se e baixam a pressão ($P_{pl}(t)$, pressão pleural) em torno dos pulmões dentro do peito.

Devido à sua elasticidade (descrita pela complacência C , o inverso da elasticidade), os pulmões expandem-se devido ao abaixamento da pressão transmural dentro deles e por isso a pressão interior dos pulmões (representada por $P_L(t)$) decresce momentaneamente. Gera-se assim uma queda de pressão na resistência fluídica R_{AW} das vias respiratórias, donde resulta um caudal de ar para dentro dos pulmões. Enquanto os músculos se contraírem, com força crescente, este processo repete-se e a inspiração continua. No fim da inspiração os músculos expiratórios do abdómen e da caixa torácica. contraem-se, forçando $P_{pl}(t)$ a ultrapassar P_B (pressão atmosférica) e expulsando o ar dos pulmões. Na respiração de descanso os músculos de expiração não se contraem, basta a relaxação dos músculos de inspiração para que $P_{pl}(t)$ ultrapasse P_B .

Este processo biomecânico pode ser descrito matematicamente a partir das propriedades físicas das estruturas envolvidas. Trata-se de um sistema misto fluídico-mecânico.

O fluxo de ar depende da diferença de pressão através da resistência fluídica R_{AW} e da própria resistência

Se $I(t)$ representa o caudal de ar de inspiração/expiração, teremos,

$$I(t) = \frac{P_B - P_L(t)}{R_{AW}} \quad \text{ou seja} \quad P_B - P_L(t) = I(t)R_{AW}$$

Sendo $V(t)$ o volume dos pulmões, durante o intervalo de tempo Δt a variação do volume será, admitindo $I(t)$ constante durante Δt ,

$$V_L(t + \Delta t) - V_L(t) = I(t) \Delta t \Rightarrow \frac{V_L(t + \Delta t) - V_L(t)}{\Delta t} = I(t)$$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{V}_L(t)$$

e por isso, substituindo em cima

$$P_B - P_L(t) = \dot{V}_L(t) R_{AW}$$

A complacência dos pulmões C_L é definida pela relação entre o volume dos pulmões e a pressão transmural

$$C_L = \frac{V_L(t)}{P_L - P_{pl}(t)}$$

donde

$$P_L - P_{pl}(t) = \frac{V_L(t)}{C_L} \Rightarrow P_L = P_{pl}(t) + \frac{V_L(t)}{C_L}$$

Substituindo agora P_L na expressão acima,

$$P_B - P_L(t) = \dot{V}(t) R_{AW} \Rightarrow P_B - P_{pl}(t) + \frac{V_L(t)}{C_L} = \dot{V}(t) R_{AW}$$

$$\Rightarrow P_B - P_{pl}(t) = \dot{V}(t) R_{AW} + \frac{V_L(t)}{C_L}$$

Como a pressão atmosférica é constante, define-se a pressão diferencial

$$P(t) = P_B - P_{pl}(t)$$

e

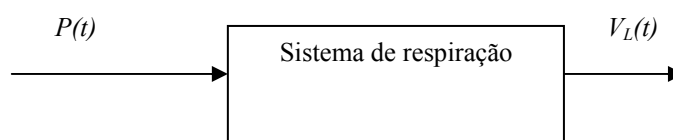
$$P(t) = \dot{V}_L(t) R_{AW} + \frac{V_L(t)}{C_L} \Rightarrow$$

$$\dot{V}_L(t) + \frac{1}{R_{AW} C_L} V_L(t) = -\frac{1}{R_{AW}} P(t)$$

ou

$$\dot{V}_L(t) + a V_L(t) = b P(t)$$

obtendo-se uma equação diferencial de 1ª ordem, linear, que relaciona o volume dos pulmões V_L com a pressão relativa intramural $P(t)$. Do ponto de vista sistémico pode representar-se pelo diagrama de blocos



Note-se que

$$\dot{V}(t) = I(t) \Rightarrow V(t) = V(0) + \int_0^t I(t) dt$$

em que $V_L(0)$ é o volume em repouso. Como é constante (característica do indivíduo), pode considerar-se nula e $V_L(t)$ representa por isso a variação do volume dos pulmões em relação a $V_L(0)$.

2.9 Outros tipos de sistemas

Podem-se desenvolver modelos para sistemas de outros tipos: financeiros, de gestão, sociais, etc. Por exemplo um empréstimo bancário pode ser modelizado de modo simples.

Considerando

$y_0 \triangleq$ valor do empréstimo total

$u_k \triangleq$ prestação entregue no mês k

$r \triangleq$ taxa de juro, $100r\%$, mensal

$y_k \triangleq$ montante em dívida no mês k

o que se fica a dever para o mês seguinte é igual ao que se deve no mês corrente mais os juros sobre os que se deve no mês corrente, menos a prestação u_k que se faz no mês corrente. Ou seja, é uma equação de balanço financeiro dada por

$$y_{k+1} = y_k + ry_k - u_{k+1} = (1+r)y_k - u_{k+1}$$

2.10 Analogias entre os diversos modelos

Entre os diversos tipos de sistemas existe uma relação de analogia no sentido de que se pode representar por exemplo um sistema mecânico por um sistema eléctrico cujos componentes são numericamente iguais e cujas variáveis seguem trajectórias iguais na forma. A tabela seguinte sintetiza essas relações.

Tabela de analogias

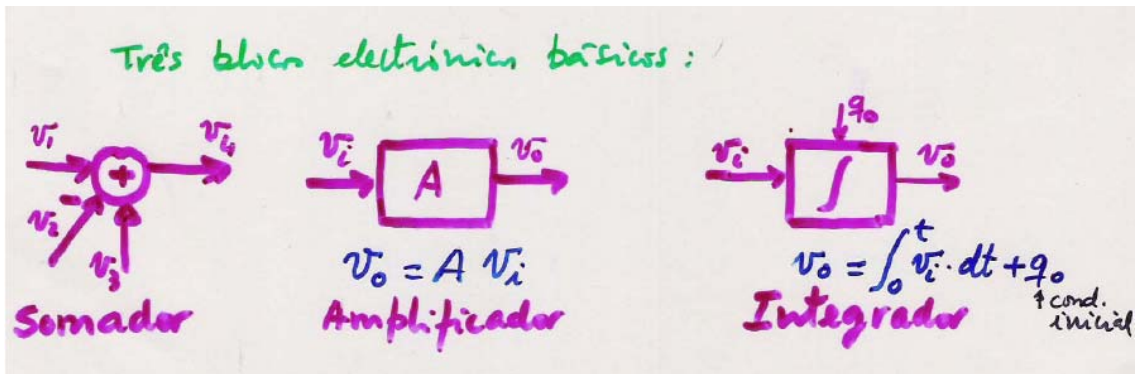
	ELÉCTRICAS	MECÂN. TRANSL.	MECÂN. ROTAS	FLUIDICAS	TÉRMICAS
DISSIPADOR DE ENERGIA	R $Ri^2 = \frac{U^2}{R}$	B^{-1} Bv^2	B^{-1} $B\omega^2$	R	R
ARMAZENA. DE ENERGIA	L Henry energia $\frac{1}{2}Li^2$	K^{-1} potencial $\frac{1}{2}Ky^2$	K^{-1} $\frac{1}{2}K\theta^2$		
ENERGIA	C Farad potencial $\frac{1}{2}Cu^2$	M energia $\frac{1}{2}Mv^2$	J $\frac{1}{2}J\omega^2$	h potencial $\frac{1}{2}Ch^2$	C potencial $\frac{1}{2}CT^2$
VARIÁVEL CIRCULANTE	i ampers	f	T (binário)	q	q
VARIÁVEL DIFERENCIAL	v volts	v	ω	h	T (Temperatura)

Alguns sistemas fisiológicos também se podem representar por sistemas análogos, por exemplo mecânicos ou eléctricos.

2.11. Simulação das equações diferenciais e de diferenças.

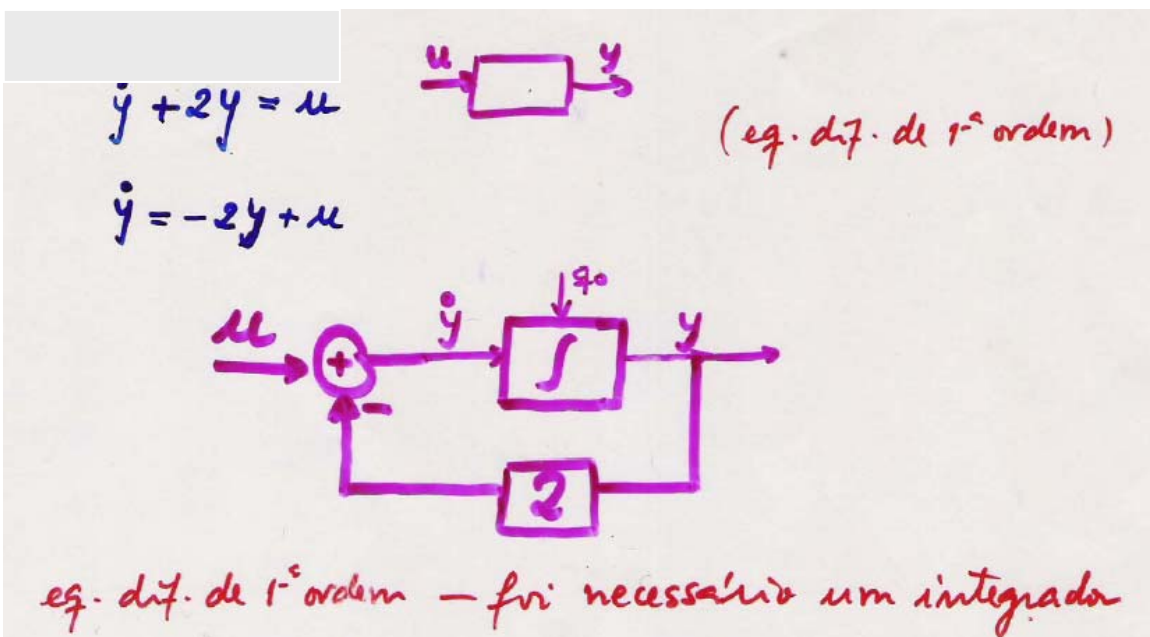
As equações diferenciais podem-se simular em circuitos electrónicos com componentes apropriados.

No caso de equações lineares bastam blocos que executem as operações de adição, multiplicação por uma constante e integração.



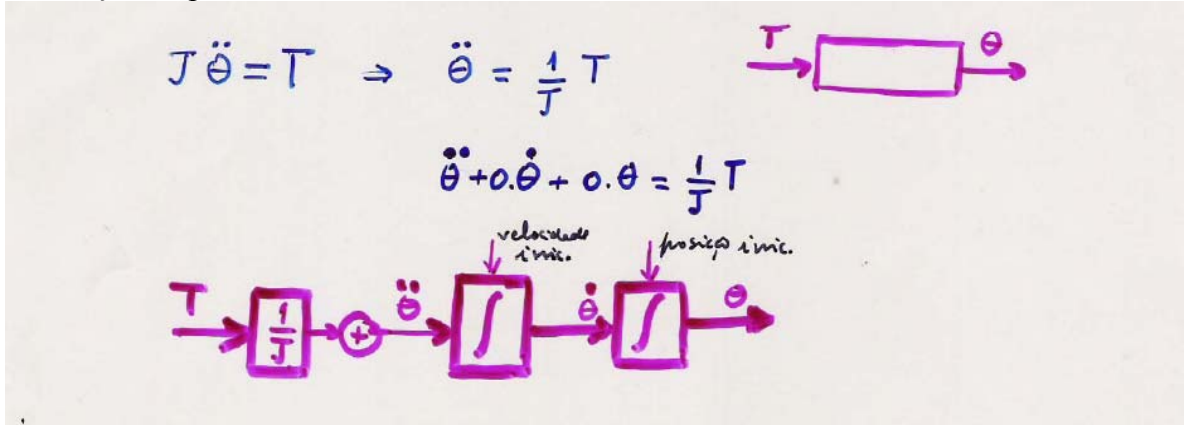
Com eles poderemos simular qualquer equação diferencial linear invariante.

Uma equação diferencial de 1ª ordem:

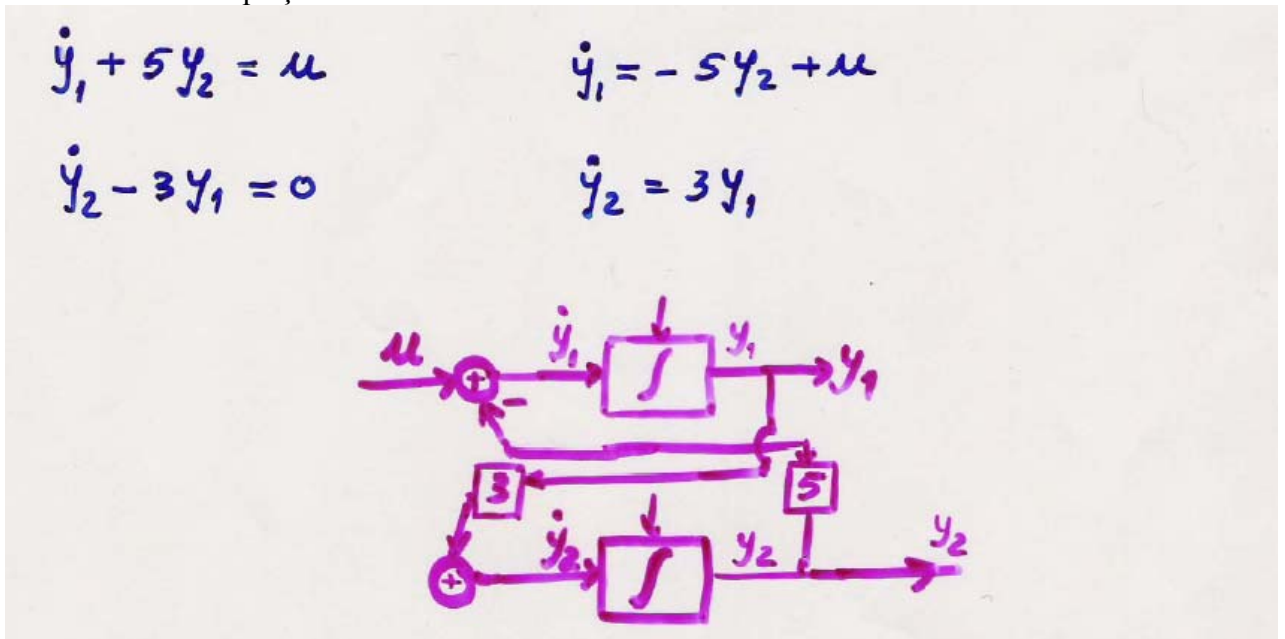


- são implementáveis fisicamente, com facilidade (com o chamado computador analógico)
- permitem analisar o comportamento de sistemas físicos através da observação das variáveis do circuito analógico análogo às do sistema físico.
- permitem ainda encontrar outras representações do sistema (equações de estados a ver no cap. ...)

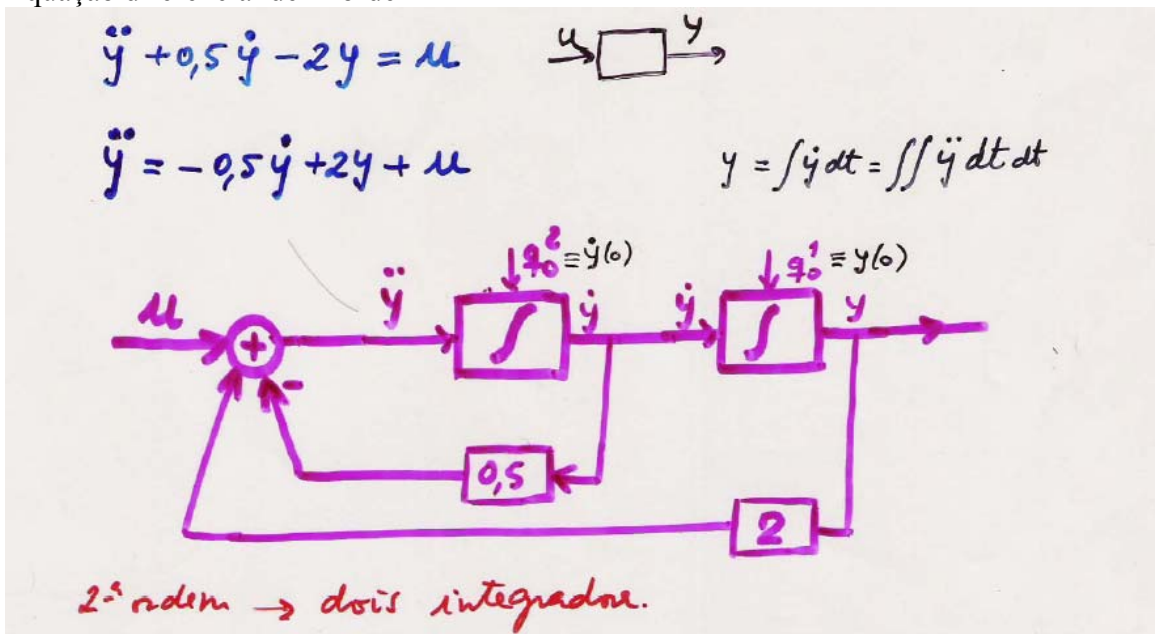
Simulação do posicionamento de um satélite



Sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem



Equação diferencial de 2ª ordem



Equação diferencial de 3ª ordem

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy = u$$

$$\ddot{y} = -a\dot{y} - by - cy + u$$

$$y = \int \dot{y} dt = \iint \ddot{y} dt dt = \iiint \ddot{y} dt dt dt$$

3ª ordem, 3 integradores

4ª ordem, 4 integradores? - SIM

ordem n, n integradores? - SIM

Sistema de duas equações diferenciais de 2ª ordem:

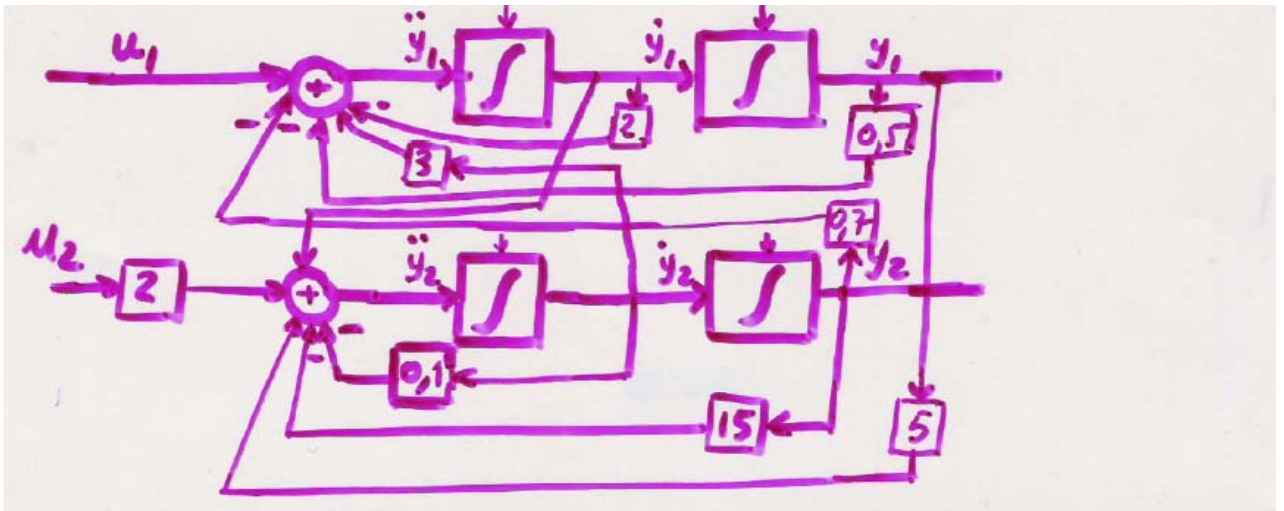
$$\ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 - 3\dot{y}_2 + 0,5y_1 + 0,7y_2 = u_1$$

$$\ddot{y}_2 + 0,1\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - 5y_1 + 15y_2 = 2u_2$$

$$\ddot{y}_1 = -2\dot{y}_1 + 3\dot{y}_2 - 0,5y_1 - 0,7y_2 + u_1$$

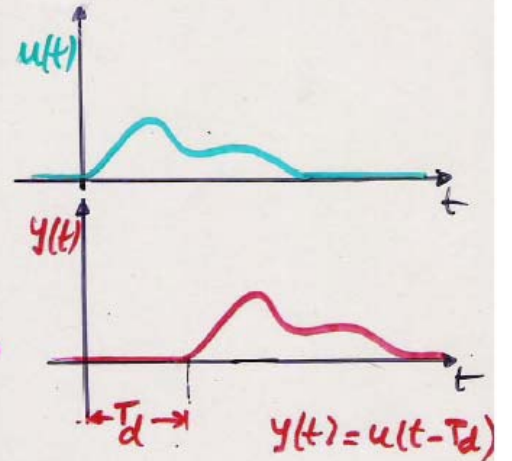
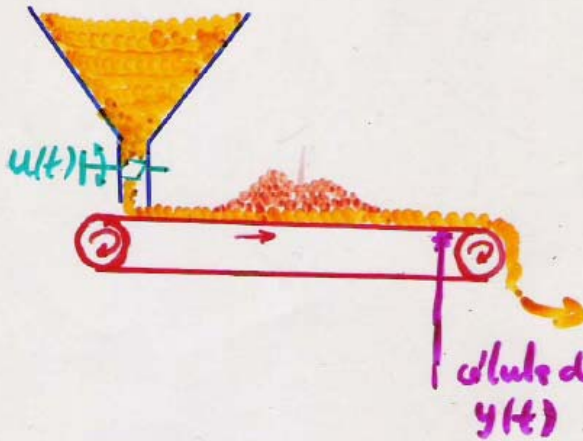
$$\ddot{y}_2 = -0,1\dot{y}_2 + \dot{y}_1 + 5y_1 - 15y_2 + 2u_2$$

podendo-se desenhar o diagrama de blocos:

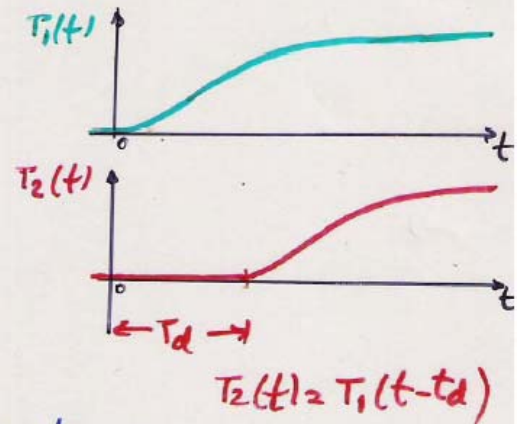
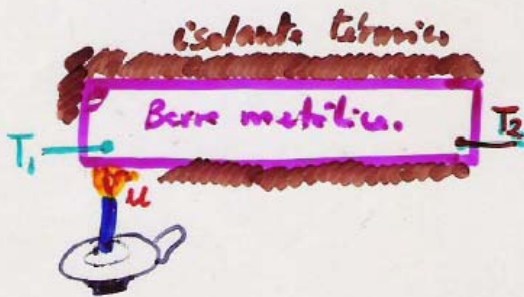


Sistemas contínuos com atraso puro

Em muitas situações transporta-se energia ou massa entre dois pontos sem qualquer transformação de natureza



T_d : tempo necessário para o transporte desde a válvula até a célula de carga.



Se $y = T_1$,

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b \cdot u(t)$$

Se $y = T_2$,

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b \cdot u(t - T_d)$$

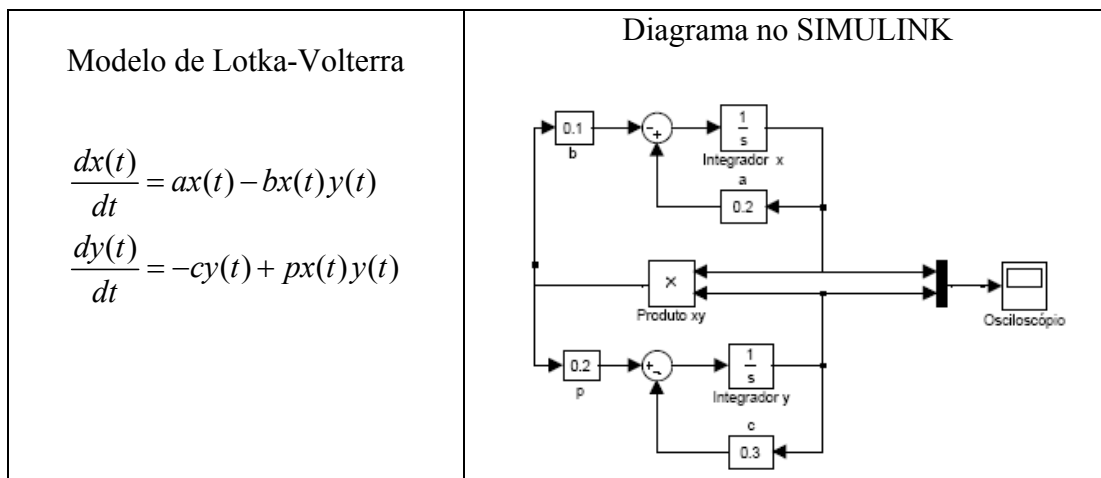
equação diferencial com atraso puro.



Sistemas não lineares

Para sistemas não lineares, em que por exemplo as variáveis se multiplicam umas pelas outras (como no modelo de Lotka-Volterra), são necessários blocos adicionais que executem essas operações.

O SIMULINK (Matlab) simula blocos electrónicos (pode-se dizer que implementa blocos electrónicos por programação). Contém um grande conjunto de blocos que permite implementar facilmente qualquer operação matemática e portanto simular qualquer sistema (linear ou não linear). Por exemplo para o modelo de Lotka-Volterra tem-se o seguinte diagrama de blocos no SIMULINK, em que as constantes a , b , c , p , são implementadas por amplificadores (quadrados na figura). No capítulo 3 veremos porque $1/s$ é um integrador.



A simulação de sistemas discretos, definidos por equações de diferenças, também se pode fazer no SIMULINK. Agora o bloco integrador é substituído pelo bloco atraso (*unit delay*).

De facto, para a equação de diferenças por exemplo do empréstimo bancário, linear

$$y_{k+1} = y_k + ry_k - u_{k+1} = (1+r)y_k - u_k$$

Poderemos definir o operador atraso z^{-1} , e o de avanço z tal que

$$z^{-1}[y_{k+1}] = y_k \quad z[y_k] = y_{k+1} \quad z[z^{-1}[y_{k+1}]] = z[y_k] = y_{k+1}$$

Poderemos representar aquela equação do empréstimo pelo diagrama de blocos seguinte

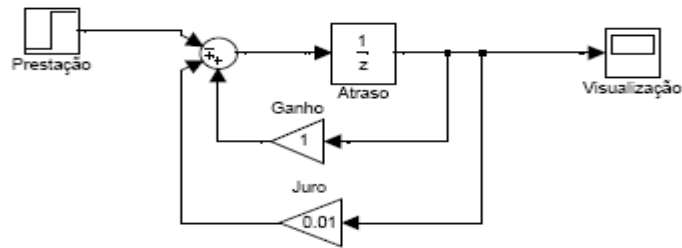


Diagrama SIMULINK do empréstimo bancário

Para o modelo de crescimento populacional, não linear, teremos que usar o bloco de produto.

<p>Modelo do crescimento de uma população isolada</p> $x_{k+1} = Ax_k(1 - x_k) = Ax_k - Ax_k^2$	<p>Diagrama no SIMULINK</p>
---	-----------------------------

Qualquer equação diferencial se pode reduzir (aproximar) a uma equação de diferenças, aproximando a derivada (pelas diferenças para a frente, por exemplo) ou o integral (pela regra trapezoidal, por exemplo).

2.12. Conclusão

Na generalidade dos sistemas podem-se aplicar os princípios básicos (do respectivo domínio) para se obter um conjunto de equações diferenciais (nos sistemas contínuos) ou de diferenças (nos sistemas discretos), que são uma representação matemática do sistema e constituem por isso um modelo matemático.

Esse modelo servirá, como veremos, para o estudo do comportamento do sistema (a sua evolução temporal, por exemplo) e contém características matemáticas que exprimem propriedades internas essenciais do sistema.

Obtido o modelo, importa saber como se vai usar, e é esse o tema dos próximos capítulos.

Referências

- Baura, G. D., *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals*, , John Wiley and Sons, 2002
- Bruce, Eugene N., *Biomedical Signal Processing and Signal Modelling*, John Wiley and Sons, 2001.
- Carvalho, M., *Sistemas de Controlo Automático*, LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.
- Chen, T. *Systems and Signals Analysis*, 2nd Ed, Saunders College Publ, 1994
- Hoppensteadt, F.C. and Charles S. Peskin,, *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences* , Springer Verlag, 2000
- McMahon, Thomas A., *Muscles, Reflexes and LocomotionI*, Princeton University Press, 1984.
- Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares*,., IST Press 2002
- Stephanopoulos, G., *Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice*,. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.
- Witten (Ed) M, *Mathematical models in medicine : diseases and epidemics*, Pergamon, 1987
- *Simulink Users Guide*, The Mathworks.