DINÂMICA DE SISTEMAS BIOLÓGICOS E FISIOLÓGICOS

# Capítulo 3

## Função de transferência e dinâmicas dos sistemas

### 3.1. Aplicação da transformada de Laplace às equações diferenciais

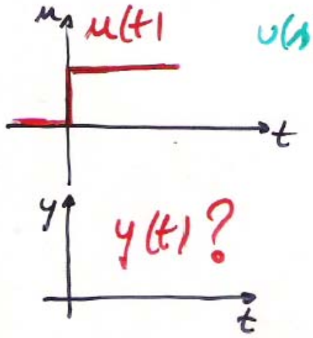
A transformada de Laplace é uma boa ferramenta para a resolução de equações diferenciais. Por exemplo no Capítulo 2 vimos o sistema mecânico da suspensão de um automóvel, para o qual obtivemos a equação diferencial de 2ª ordem

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$$

Se, para fins ilustrativos, supusermos $M = 2$, $B=3$, $K=1$,

$$2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u$$

$U(s) = \frac{1}{s}$




resolução da equação diferencial, com auxílio da transformada de Laplace

Aplicando o a propriedade da derivação no domínio temporal, obtém-se

$$2\left[s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right] + 3\left[s Y(s) - y(0)\right] + Y(s) = U(s)$$

$$(2s^2+3s+1)\,Y(s) = 2s\,y(0) + 2\dot{y}(0) + 3y(0) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(2s+3)\,y(0) + 2\dot{y}(0)}{2s^2+3s+1}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{1}{2s^2+3s+1}\,U(s)}_{Y_{zs}}$$

dado: $y(0) = -1$
$\dot{y}(0) = 1$

$$= \frac{-(2s+3)+2}{2s^2+3s+1} + \frac{1}{(2s^2+3s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

Verifica-se que a saída Y(s) tem duas parcelas:

i) a devida às condições iniciais, $Y_{zi}$, e entrada nula (zi de *zero input*)

ii) a devida è entrada, $Y_{zs}$, e condições iniciais nulas (zs de *zero (initial) state*)

Considerando as duas em simultâneo, depois de reduzir ao mesmo denominador,

$$Y(s) = \frac{-2s^2 - s + 1}{s(2s^2+3s+1)} = \frac{-2s^2 - s + 1}{s(s+1)(s+0{,}5)2}$$

Procurando as raízes do denominador e decompondo-o em fracções parciais, obtém se

$$2s^2+3s+1 = (s^2+1{,}5s+0{,}5)2 = (s+1)(s+0{,}5)2$$

$$s_{1,2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2-2}}{2} = \frac{-1{,}5 \pm 0{,}5}{2} = \begin{cases} -1 \\ -0{,}5 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-s^2-0{,}5s+0{,}5}{s(s+1)(s+0{,}5)}$$

$$= \frac{A1}{s} + \frac{A2}{s+1} + \frac{A3}{s+0{,}5}$$

Calculando agora os resíduos A1, A2 e A3 pela técnica que estudámos,

$$A_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{-s^2-0{,}5s+0{,}5}{(0+1)(0+0{,}5)} = 1$$

$$A_2 = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{-(-1)^2-0{,}5(-1)+0{,}5}{(-1)(-1+0{,}5)} = \frac{0}{0{,}5} = 0$$

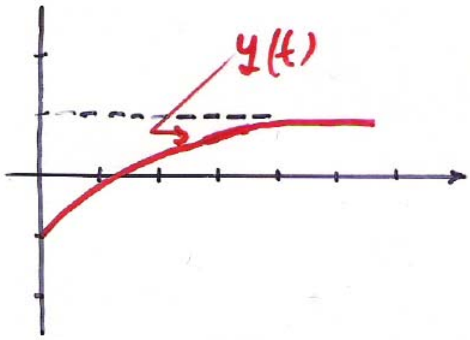
$$A_3 = (s+0{,}5)Y(s)\Big|_{s=-0{,}5} = \frac{-(-0{,}5)^2-0{,}5(-0{,}5)+0{,}5}{(-0{,}5)(-0{,}5+1)} = \frac{0{,}5}{-0{,}25} = -2$$

obtém-se

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{0}{s+1} - 2\frac{1}{s+0{,}5}$$

Calculando agora a transformada inversa obtém-se y(t)

$$y(t) = 1 - 2e^{-0,5t}, \quad t \geq 0$$




Verifica-se que y(0)=-1, como era de esperar.

**3.2. Polinómio característico, modos e estabilidade**

Se calcularmos a resposta da suspensão quando apenas as condições iniciais são não nulas (não aplicamos qualquer entrada), obtemos,

$$Y_{zi}(s) = \frac{(2s+3)y(0) + 2\dot{y}(0)}{2s^2+3s+1} = \frac{2y(0)s + [3y(0)+2\dot{y}(0)]}{2(s+0,5)(s+1)}$$

e invertendo, decompondo previamente em fracções parciais,

$$Y_{zi}(s) = \frac{A_1}{s+0,5} + \frac{A_2}{s+1}$$

$$y_{zi}(t) = A_1 e^{-0,5t} + A_2 e^{-t}$$

Calculando A1 e A2,

$$A_1 = \left. \frac{2y(0)s + [3y(0)+2\dot{y}(0)]}{2(s+1)} \right|_{s=-0,5} = \frac{-y(0)+3y(0)+2\dot{y}(0)}{1} = 2(y(0)+\dot{y}(0))$$

$$A_2 = \left. \frac{2\dot{y}(0)s + [3y(0) + 2\dot{y}(0)]}{2(s+0,5)} \right|_{s=-1} = \frac{-2\dot{y}(0) + 3y(0) + 2\dot{y}(0)}{-1} = -y(0) - 2\dot{y}(0)$$

podemos constatar os seguintes factos:

$y_{zi}(t)$ : • soma de $e^{-0,5t}$ e de $e^{-t}$ ponderada por $A_1$ e $A_2$

• $A_1$ e $A_2$ dependem das cond. iniciais

E por isso podemos afirmar que as duas exponenciais

$$e^{-0,5t}$$

$$e^{-t}$$

são características intrínsecas do sistema, independentes de toda a realidade externa e das condições iniciais. Chamam-se por isso, aos seus **expoentes** -0,5 e -1, **modos do sistema** e são como que a sua DNA.

Analisando mais em detalhe, obtemos

$$y_{zi}(t) = 2[y(0) + \dot{y}(0)]\, e^{-0,5t} + [-y(0) - 2\dot{y}(0)]\, e^{-t}$$

Para certas combinações particulares de condições iniciais o sistema exibe um comportamento estranho. Vejamos.

Se

$$y(0) = -\dot{y}(0),$$

$$y_{zi}(t) = [-y(0) - 2\dot{y}(0)]\, e^{-t} = y(0)\, e^{-t}$$

a resposta só depende de um dos modos; o outro modo não aparece, não é excitado.

E se

$$y(0) = -2\dot{y}(0),$$

$$y_{zi}(t) = 2\left[y(0) + \dot{y}(0)\right]e^{-0{,}5t} = y(0)\, e^{-0{,}5t}$$

a resposta também só depende de um dos modos, não sendo o outro excitado.

Podemos assim constatar que,

- os modos são excitados pelas condições iniciais.
- existem condições iniciais especiais que excitam apenas alguns dos modos
- existem n modos p/ um sistema de ordem n

Qual a origem dos modos?

Se no exemplo da suspensão automóvel considerarmos M=2, B=4, K=20, u=0, t≥0, vem

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u \Leftrightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = \frac{u}{2} = 0$$

$$s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 10Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = s\,y(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)$$

$$Y(s) = \frac{s\,y(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)}{s^2 + 2s + 10}$$

Calculemos a resposta temporal, invertendo este Y(s):

$$Y(s) = \frac{s\,y(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)}{(s+1)^2 + 9} = \frac{(s\,y(0) + y_0) + (y_0 + \dot{y}_0)}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Desenvolvendo,

$$= \frac{y_0(s+1)}{(s+1)^2+3^2} + \frac{(y_0+\dot{y}_0)}{(s+1)^2+3^2}$$

$$= y(0)\,\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{1}{3}(y_0+\dot{y}_0)\,\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

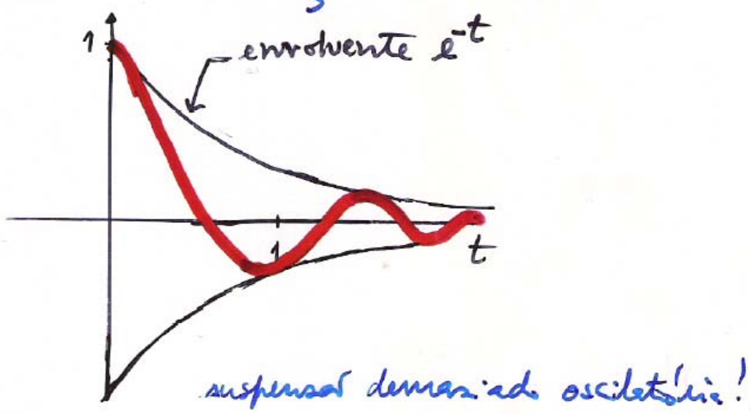
Ou seja, consultando a tabela da transformada de Laplace,

$$y(t) = y(0).\, e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}(y_0+\dot{y}_0)\, e^{-t}\,\mathrm{sen}\, 3t$$

e graficando,

$$y_0 = 1 \qquad \dot{y}_0 = 0$$

$$\hookrightarrow y(t) = e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}\, e^{-t}\,\mathrm{sen}\, 3t$$




obtemos o movimento oscilatório da suspensão.
Se aumentarmos B de 4 para 14 (maior atrito, maior amortecimento) a suspensão deixa de oscilar (verifique, refazendo os cálculos, ou use o Simulink, com condições iniciais nos integradores).
Portanto os modos derivam das propriedades construtivas do sistema.

No caso geral temos, sendo *p* o operador de derivação,

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=$$
$$=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&A(p)y(t)=\\&=B(p)u(t)\end{aligned}}$$

Aplicando a transformada de Laplace (a ambos os lados da equação)

$$s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}\dot{y}(0)-\cdots y^{(n-1)}(0)$$
$$+a_{n-1}\left[s^{(n-1)}Y(s)-s^{(n-2)}y(0)-\cdots-y^{(n-2)}(0)\right]$$
$$\vdots$$
$$+a_1\left[sY(s)-y(0)\right]+a_0Y(s)=$$
$$=b_m s^mU(s)-b_m s^{m-1}u(0)-b_{m-1}s^{m-2}\dot{u}(0)-\cdots-u^{(m-1)}(0)$$
$$+b_{m-1}s^{m-1}U(s)-b_{m-1}s^{(m-2)}u(0)-b_{m-2}s^{m-3}\dot{u}(0)-\cdots-b_0u^{(m-1)}(0)$$
$$\vdots$$
$$+b_1sU(s)-b_1u(0)+b_0U(s)$$

ou seja, rearranjando,

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)+\left[-s^{n-1}y(0)\cdots-a_1y(0)\right]=$$
$$=(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)U(s)+\left[-b_ms^{m-1}u(0)\cdots\right]$$

e se a entrada $u(t)$ for nula para todo o $t$

$$Y_{zi}(s) = \frac{s^{n-1}y(0) + \cdots\cdots + a_1 y(0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

verifica-se que $Y_{zi}(s)$, e portanto $y_{zi}(t)$ depende das condições iniciais

### 3.3. Estabilidade em relação às condições iniciais

Se um modo do sistema tem parte real positiva, ou se tem parte real nula e multiplicidade maior do que um, então a sua exponencial (seja real, seja complexa) tende para infinito em valor absoluto.

Se uma dada condição inicial excita um destes modos, a saída do sistema tenderá para infinito, mesmo que a entrada seja nula. O sistema diz-se então **instável**. No caso contrário, em que todos os modos têm parte real negativa o sistema é **estável**. Um modo e parte real nula mas de multiplicidade 1 mantêm a **estabilidade** do sistema.

Assim podemos enunciar uma condição necessária de estabilidade em relação às condições iniciais:

$\Rightarrow$ É CONDIÇÃO NECESSÁRIA DE ESTABILIDADE QUE TODOS OS MODOS SE SITUEM NO SEMI-PLANO ESQUERDO, OU SEJA, TENHAM PARTE REAL NEGATIVA, OU, NO LIMITE, SE SITUEM NO EIXO IMAGINÁRIO MAS COM MULTIPLICIDADE UM.

A resposta às condições iniciais pode representar-se por

$$Y_{zi}(s) = \frac{I(s)}{A(s)}$$

em que

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$I(s) = \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0$$

$\beta_i$ : depende das condições iniciais $y(0), \dot{y}(0), \dots$

Chama-se a

$A(s) \triangleq$ polinómio característico do sistema

determina a resposta livre,
ou não forçada, ou natural do sistema

raízes de $A(s) \triangleq$ modos do sistema

A resposta livre, ou não forçada, è a que se obtém com entrada nula (e condições iniciais não nulas).

### 3.4 Função de transferência

Seja o exemplo

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Calculando a transformada de Laplace, com todas as condições iniciais nulas,

$$(2s^2 + 3s + 1)Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1} \cdot U(s)$$

Ou seja

$$Y(s) = \underbrace{G(s)}_{\text{função de transferência}} U(s)$$

relação entre as transformadas de saída e de entrada, com condições iniciais nulas.

G(s) "transfere" a entrada para a saída, ou de outro modo, a entrada transfere-se para a saída através ou pela acção de G(s) e por isso chama-se a G(s) **função de transferência**.

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{PARA CONDIÇÕES INICIAIS NULAS}}$$

A função de transferência obtém-se a partir da equação diferencial de ordem *n* que descreve o sistema, aplicando-lhe a transformada de Laplace e resolvendo para Y/U.

Se tivermos a possibilidade de aplicar um impulso de Dirac ao sistema, a sua resposta será

$Y(s) = G(s)U(s) = G(s).1 = G(s)$

e portanto

$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)]$

ou seja, a função de transferência também se pode definir como a transformada de Laplace da resposta do sistema a um impulso de Dirac. Por isso se conhecermos s função de transferência e quisermos calcular a resposta impulsional *h(t)*, basta fazermos

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s).\mathcal{L}[\delta(t)]\right] = \mathcal{L}^{-1}[G(s).1] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

Por exemplo

$$G(s) = \frac{3s+4}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \rightarrow h(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Exemplos de cálculo da função de transferência:

- sistema de dois tanques (o mesmo da ingestão de um fármaco, com $A_1$=$A_2$=1)

$$A_1 A_2 R_1 R_2 \ddot{q}_2 + (A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2)\dot{q}_2 + q_2 = q_i$$

$$[s^2 A_1 A_2 R_1 R_2 + s(A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2) + 1] Q_2(s) = Q_i(s)$$

$$G(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{s^2 A_1 A_2 R_1 R_2 + s(A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2)}$$

- suspensão automóvel $\quad M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u$

$$(s^2 M + sB + K)Y(s) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 M + sB + K}$$

No caso geral, sendo *p* o operador de derivação,

- Caso geral $\quad A(p)y(t) = B(p)u(t)$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

**Pólos e zeros da função de transferência**

Os pólos de G(s) são as raízes do seu denominador.
Os zeros são as raízes do seu numerador.

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$B(s) = 0 \longrightarrow$ zeros

$A(s) = 0 \longrightarrow$ polos

se $G(s)$ é própria ( grau A ≥ grau B) , A, B coprimos

Polo. Um número finito $\lambda$, real ou complexo é um polo de $G(s)$ se $G(\lambda) = \infty$

zero. Um número finito $\lambda$, real ou complexo é um zero de $G(s)$ se $G(\lambda) = 0$

A função de transferência pode escrever-se com o numerador e o denominador factorizados, dizendo-se que está na forma pólo-zero.

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ : zeros

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ : polos $\qquad n \geq m$

$$G(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

A função de transferência é assim completamente caracterizada por

- os pólos
- os zeros
- o ganho K, no numerador, uma constante característica do sistema.

$$N(s)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0$$

$$KN(s)=0 \quad \Leftrightarrow \quad K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0 \,, \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

os zeros só por si não definem completamente o numerador

Se por exemplo tivermos uma função de transferência G(s) com

- zeros: -2, -3
- pólos: -1, -0.5, -4
- G(0)=5

Dos pólos e zeros poderemos escrever

$$G(s)=\frac{K\,(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+0{,}5)(s+4)} \,, \quad K\,?$$

Para calcularmo o valor de K usa-se o terceiro dado, obtendo-se

$$G(0)=5 \qquad G(0)=5=\frac{K.2.3}{1.0{,}5.4}=3K$$

$$\Rightarrow K=5/3$$

$$G(s)=\frac{5/3\,(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+0{,}5)(s+4)}$$

(continua em Capitulo3B)