DINÂMICA DE SISTEMAS BIOLÓGICOS E FISIOLÓGICOS

Capítulo 3

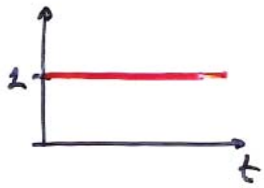
Função de transferência e dinâmicas dos sistemas
(Parte C, continuação)

3.6. Resposta temporal dos pólos e modos em função da sua localização no plano complexo (continuação)

iii) Polos na origem

simples

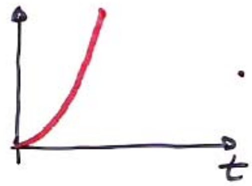
$$Y(s) = \frac{1}{s} \rightarrow y(t) = 1$$



múltiplos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow y(t) = t$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} \rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2$$



Conclusão:

Polo na origem

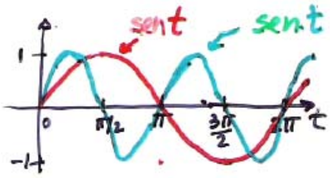
simples – contribui com um termo constante

múltiplo – contribui com um termo crescente

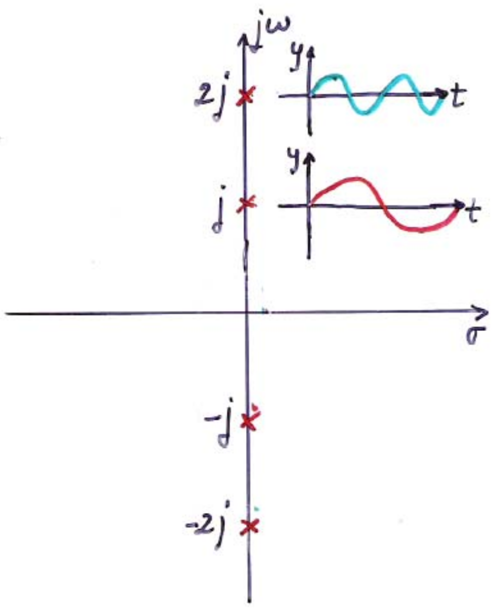
iv) Polos imaginários conjugados

Simples

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow y(t) = \text{sen}\, t$$



$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2t$$



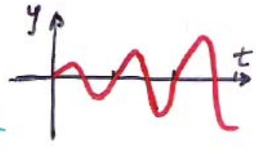
conclusão

- polos imaginários simples contribuem com sinusoidais puras

Múltiplos

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \longrightarrow y(t) = t\,\text{sen}\, t$$

crescente com t



v) Polos complexos conjugados (simples)

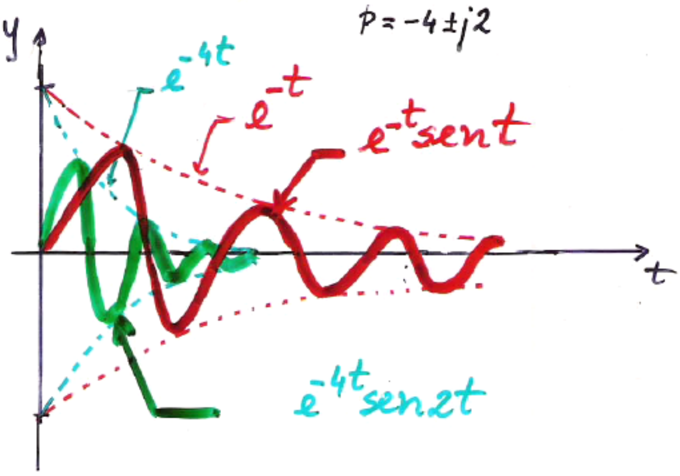
- multiplicam o efeito dos reais pelo efeito dos imaginários

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \rightarrow y(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$$

$$p = -1 \pm j$$

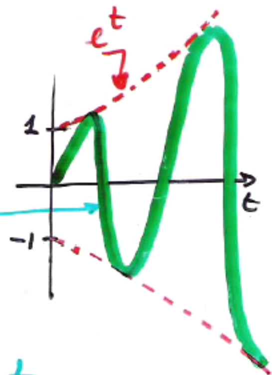
$$Y(s) = \frac{2}{(s+4)^2+2^2} \rightarrow y(t) = e^{-4t}\,\mathrm{sen}\,2t$$

$$p = -4 \pm j2$$



$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \longrightarrow y(t) = e^{t}\,\mathrm{sen}\,t$$

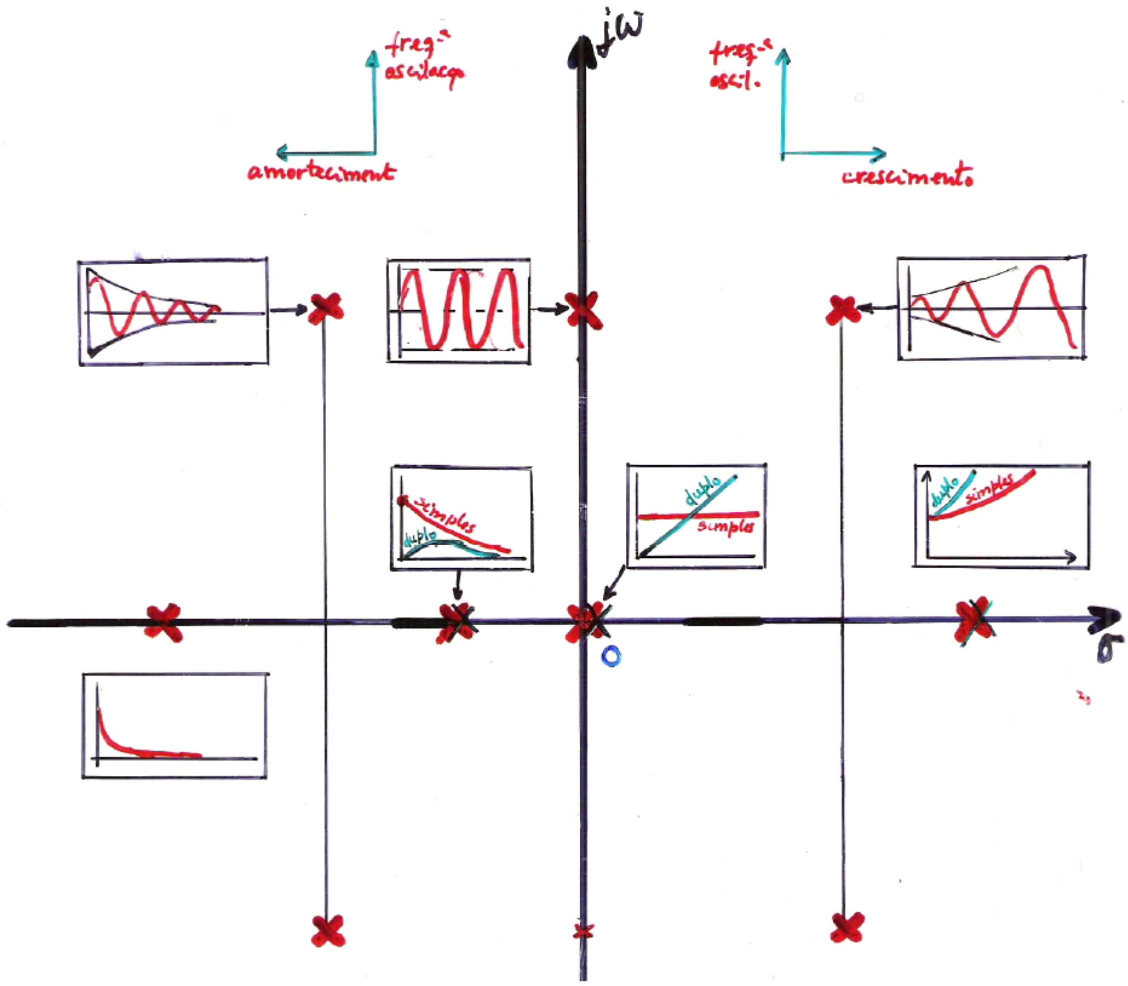
$$p = 1 \pm j$$



$$Y(s) = \frac{1}{(s-4)^2+2^2} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\,e^{4t}\,\mathrm{sen}\,2t$$

$$p = -4 \pm j2$$

Sintetizando todos os casos que vimos,



RESUMO DA LOCALIZAÇÃO DOS POLOS E DOS MODOS NO PLANO S E SUAS CONTRIBUIÇÕES TEMPORAIS

3.7. Estabilidade BIBO- *Bounded Input Bounded Output*

Um sistema diz-se **BIBO- estável** se a uma entrada u(t) limitada (BI-Bounded Input) corresponde uma saída limitada (BO-Bounded Output)

No geral vimos que

$$y_{zs}(t) = \{\text{devido aos pólos de } G(s)\} + \{\text{devido aos pólos de } U(s)\}$$

Se os pólos de U(s) têm parte real negativa, ou, sendo imaginários puros têm multiplicidade um, a entrada u(t) é limitada e a sua contribuição para a saída é também limitada.

Se os pólos de G(s) têm parte real negativa (com qualquer multiplicidade), a sua contribuição para a saída extingue-se com o tempo.

Assim

É condição necessária e suficiente de estabilidade BIBO que os pólos de G(s) se situem no SPE

Considerando a relação entre os modos e os pólos, poderemos dizer que

- **é condição necessária e suficiente de estabilidade BIBO que os modos se situem no SPE.**

Quando há um cancelamento, isso não quer dizer que o modo do sistema cancelado desaparece. Acontece simplesmente que ele deixa de ser visível na função de transferência, mas o seu efeito permanece.

3.8 Influência dos zeros na resposta temporal

Sejam o casos e as respectivas respostas temporais

$$Y(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

$$Y(s) = \frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}\left[(\alpha-a)e^{-at} - (\alpha-b)e^{-bt}\right]$$

o zero altera os coeficientes das exponenciais

Se por exemplo a=1, b=2, sem o zero teremos

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Com o zero será

$$\alpha = 0{,}5 \Rightarrow y(t) = -0{,}5e^{t} + 1{,}5e^{-2t}$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$y(t)$ é uma combinação linear de exponenciais

- os polos definem a forma das exponenciais (acção qualitativa)
- os zeros definem os coeficientes dessa combinação linear. (acção quantitativa)

3.9. Resposta temporal a um degrau dos sistemas lineares e e invariantes

Seja o sistema

com função de transferência

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \qquad m<n$$

$$= \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Consideremos o caso

- $m<n$, $G(s)$ estritamente própria
- todos os polos se situam no SPE

que é suficientemente geral para abranger todos os casos práticos.

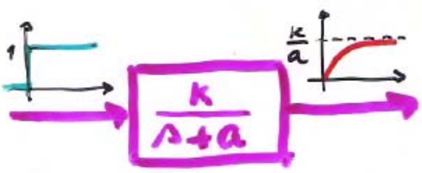
A ordem do sistema é n, e considere-se uma entrada em degrau unitário.

ordem do sistema $= n$, grau de $A(s)$.

$U(s) = \frac{1}{s}$: muito útil para caracterizar o sistema.

i) sistemas de 1ª ordem

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$



$(a>0)$

donde,

$$Y(s) = \frac{K}{s+a} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+a}$$

Calculando,

$$A_1 = s \cdot Y(s)\Big|_{s=0} = \frac{K}{s+a}\Big|_{s=0} = \frac{K}{a}$$

$$A_2 = (s+a)\,Y(s)\Big|_{s=-a} = \frac{K}{s}\Big|_{s=-a} = -\frac{K}{a}$$

obtém-se

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K/a}{s} - \frac{K}{a}\frac{1}{s+a}\right]$$

$$y(t) = \frac{K}{a} - \frac{K}{a}e^{-at} = \frac{K}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

e graficando observam-se as características gráficas (ganho, constante de tempo)

características

- ganho $\frac{K}{a}$
- constante de tempo $\tau = \frac{1}{a}$

ii) sistemas de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

pólos de $G(s)$ em função de a_1 e a_0:

$$s_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

Neste caso temos várias possibilidades para o tipo de pólos:

- $a_1^2 > 4a_0$ – 2 pólos reais simples
- $a_1^2 = 4a_0$ – 1 pólo real duplo
- $a_1^2 < 4a_0$ – 2 pólos complexos conjugados

É frequente, por ser mais conveniente, usar a seguinte notação para sistemas de 2ª ordem:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- $\xi > 1$ → 2 pólos reais simples
- $\xi = 1$ → 1 pólo real duplo
- $0 < \xi < 1$ → 2 pólos complexos conjugados
  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

O tipo de raízes depende do parâmetro ξ

i) $\xi > 1$, 2 polos reais distintos

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

Exemplo

$$G(s) = \frac{K}{s^2+3s+2} = \frac{K}{(s+1)(s+2)} \qquad \omega_n = \sqrt{2}, \quad \xi = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

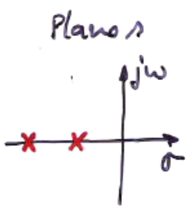
$$U(s) = \frac{1}{s}$$

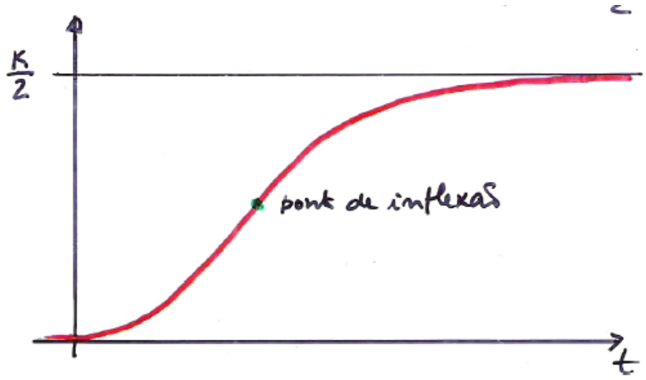
$$Y(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$$

$$= \frac{K/2}{s} - \frac{K}{s+1} + \frac{K/2}{s+2}$$

$$y(t) = \frac{K}{2} - K e^{-t} + \frac{K}{2} e^{-2t} \qquad y(0) = 0, \quad y(\infty) = \frac{K}{2}$$

Graficando,





caracteristicas

- ganho K/2
- velocidade de subida e forma da curva (dependem de ξ e ω_n).

ii) $\xi = 1$, um polo real duplo

Exemplo

$$G(s) = \frac{K}{s^2+2s+1} = \frac{K}{(s+1)^2} \qquad \begin{matrix} \omega_n = 1 \\ \xi = 1 \end{matrix}$$

Por exemplo,

$$Y(s) = \frac{K}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+1}$$

$$= \frac{K}{s} - \frac{K}{(s+1)^2} - \frac{K}{s+1}$$

$$y(t) = K - K t e^{-t} - K e^{-t} = K\left[1 - e^{-t} - t e^{-t}\right]$$

$$y(0) = 0$$
$$y(\infty) = K$$

cujo aspecto gráfico é

características

- ganho K
- forma da curva, depende de ω_n.

iii) $0<\xi<1$, 2 polos complexos conjugados

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

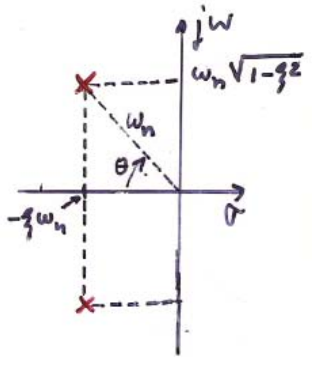
A saída, para uma entrada em degrau unitário virá,

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} - \frac{K}{\omega_n^2\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_n t} \cdot \mathrm{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \theta\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\xi$$

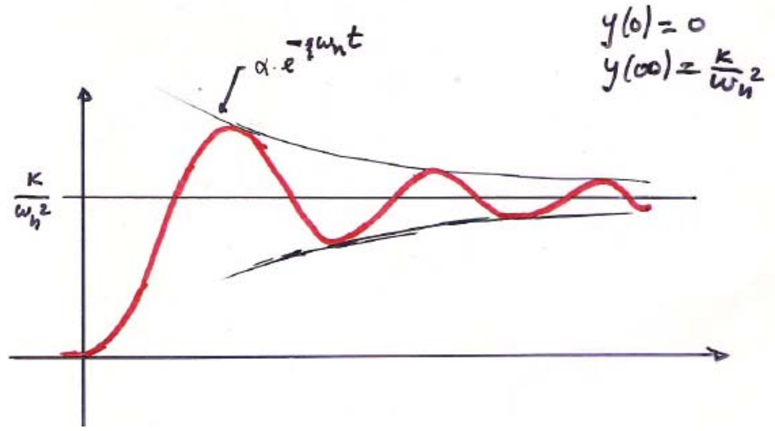
Graficamente teremos



$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$|p_{1,2}| = \omega_n$$

$y(0) = 0$
$y(\infty) = \frac{K}{\omega_n^2}$



(continua em Capitulo3D)