DINÂMICA DE SISTEMAS BIOLÓGICOS E FISIOLÓGICOS

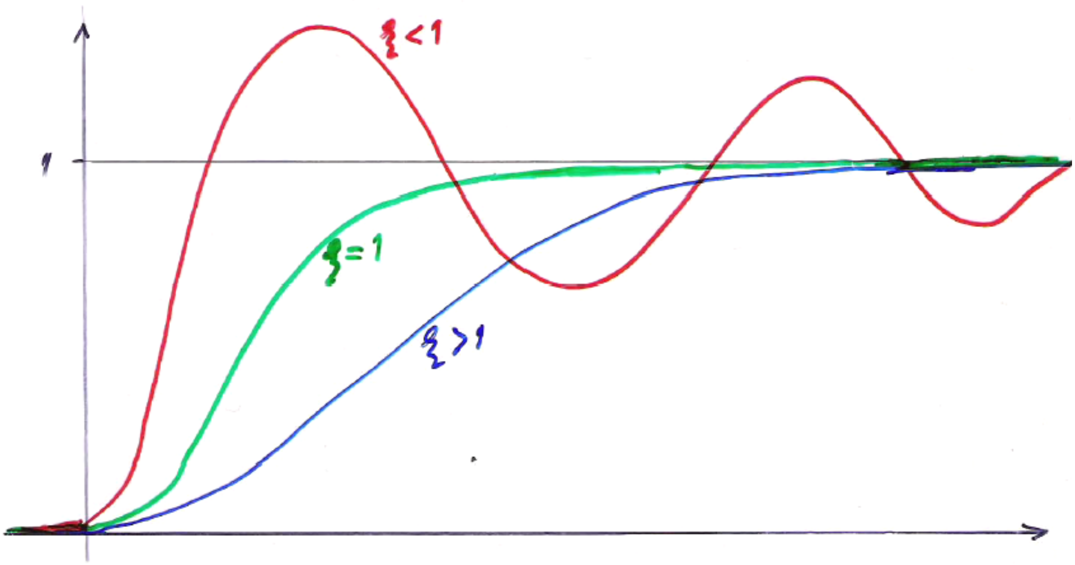
Capítulo 3

Função de transferência e dinâmicas dos sistemas

(Parte D, continuação)

Juntando agora os três casos numa só figura,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

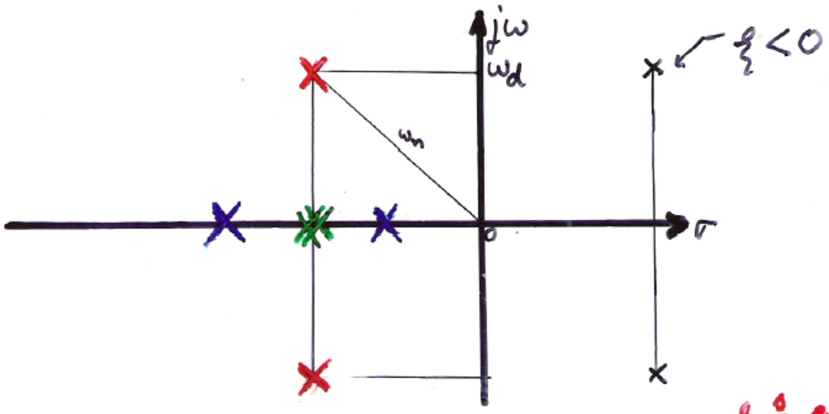


A resposta *y(t)* classifica-se como

$0 < \xi < 1$: resposta sub-amortecida

$\xi = 1$: resposta com amortecimento crítico

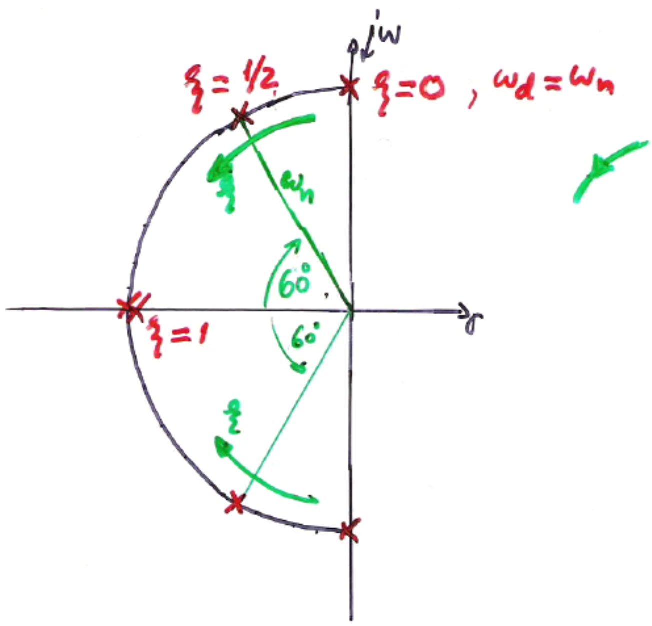
$\xi > 1$: resposta sobre-amortecida



$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$
$$= -\xi\frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \pm j\,\omega_d$$

$\xi \triangleq$ coef.te de amortecimento
$\omega_d \triangleq$ freq.a de oscilação natural amortecida
$\omega_n \triangleq$ freq.a natural não amortecida

O **coeficiente de amortecimento** e a **frequência natural** são propriedades intrínsecas do sistema.
Representando no plano complexo, ω_n é o módulo das raízes complexas e ξ o coseno do ângulo com o eixo real negativo (ver figura seguinte).



ξ aumenta
ω_d diminui

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

A frequência natural amortecida depende desses dois parâmetros. Como se vê na figura, se ξ aumenta, os pólos aproximam-se do eixo real e ω_d diminui.

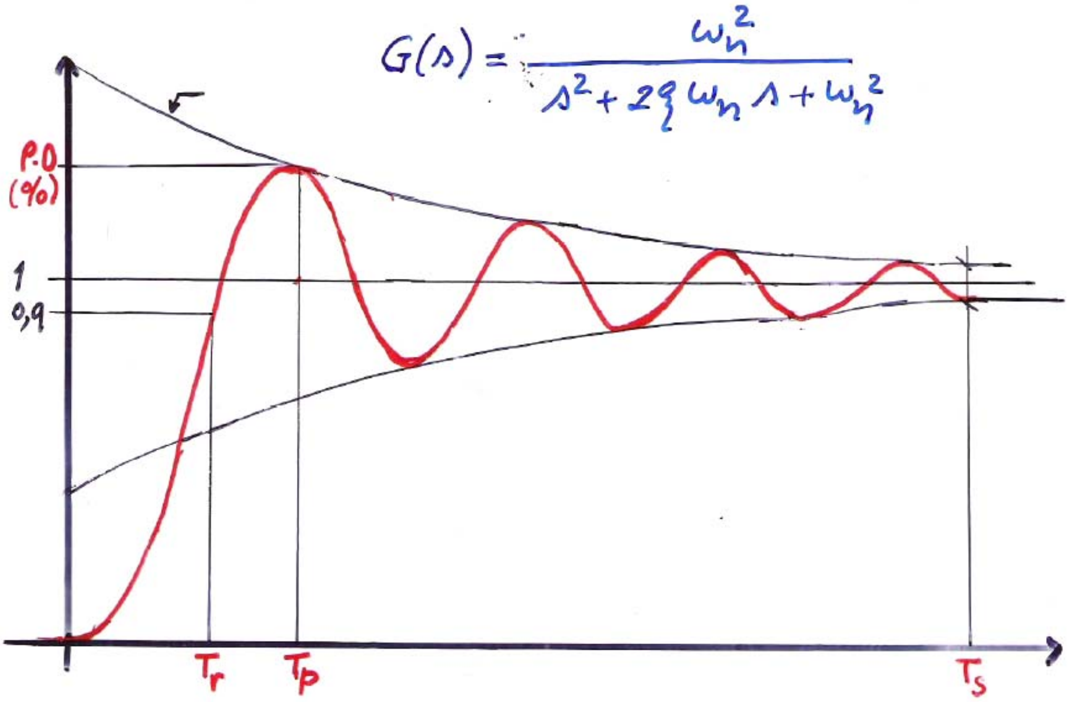
A frequência natural também se chama frequência de ressonância do sistema.

Há várias características da resposta temporal de sistemas de 2ª ordem que têm interesse prático, e são ilustradas na figura seguinte.

Por exemplo o **tempo de subida** exprime a rapidez do sistema a responder a uma entrada.

O **tempo de estabelecimento** mede o tempo que o sistema leva para alcançar um regime final (constante) quando a entrada é um degrau.

A **sobre-elevação** mede uma característica frequente de sistemas dinâmicos: a resposta ultrapassa o valor final antes de se estabelecer.



Características principais ξ, ω_n

$\tau = 1/(\xi\omega_n)$ constante de tempo

$T_r = \frac{2}{\omega_n}$ seg. tempo de subida (de 0 a 90%)

$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ tempo de pico

$P.O = 100 \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ sobre-elevação, em % (Peak overshoot)

$T_s = 3\tau$ (5%) tempo de estabelecimento até % erro

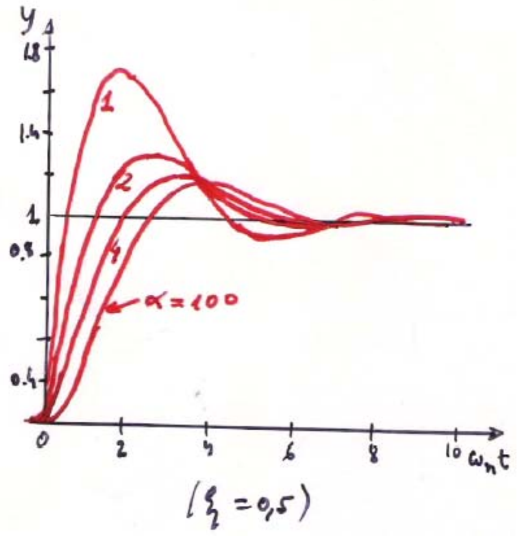
4τ (2%)

Efeito da introdução de um zero:

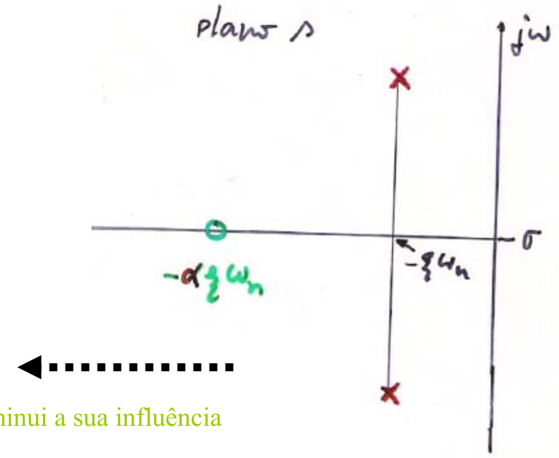
Se introduzirmos um zero no sistema de 2ª ordem anterior, teremos

$$G(s) = \frac{\omega_n (s + \alpha \xi \omega_n)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \alpha > 0 \ (\in \mathbb{R})$$

O zero está expresso como um múltiplo de $\xi\omega_n$, a parte real dos pólos, por conveniência de análise. Fazendo simulações para diversos valores de α, obtêm-se os gráficos da figura, par ao caso de ξ=0,5.



O zero altera fundamentalmente a sobreelevação e o tempo de subida. Quanto mais influente é, maior o tempo de subida, mais rápido é o sistema) e maior a sobreelevação.
O zero tem assim um efeito de aceleração.
A localização do zero no plano complexo determina a intensidade desse efeito.



Quanto mais longe dos pólos estiver o zero (em direcção de -∞), menor é a sua influência.

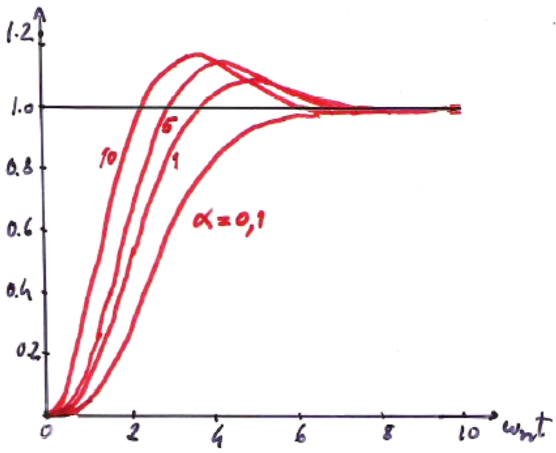
E se se introduzir um pólo adicional, passando-se a um sistema de 3ª ordem ?

3.10. Sistemas de 3ª ordem

Um sistema de 3ª ordem tem três pólos e pode obter-se de um de 2ª com um pólo adicional. Para manter G(0)=1, seja G(s)

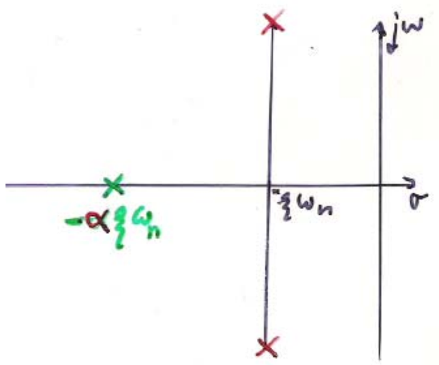
$$G(s) = \frac{\alpha \xi \omega_n^3}{(s+\alpha \xi \omega_n)(s^2+2\xi \omega_n s+\omega_n^2)}$$

Para uma entrada em degrau, e simulando para vários valores de α, obtêm-se as curvas da figura seguinte.



O terceiro pólo aumenta o tempo de subida, a resposta fica mais lenta. Quanto mais próximo estiver da origem, mais influente é. Em -∞ não tem influência.

A posição do terceiro pólo depende do valor de α.

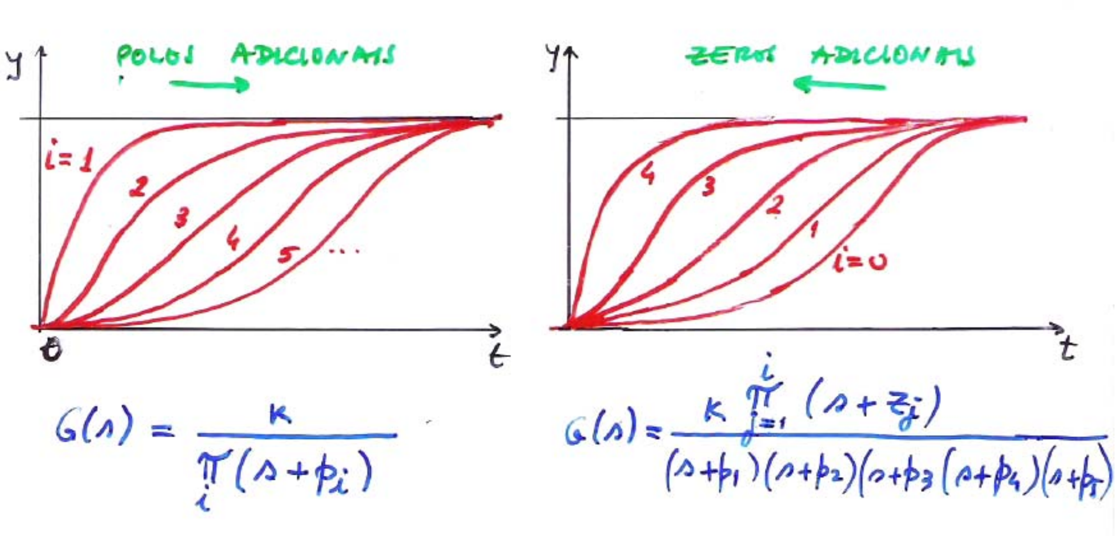


3.11. Sistemas de 4ª ordem e superior

Do que vimos anteriormente podem-se enunciar os seguintes princípios gerais:

- um zero adicional acelera a resposta e aumenta a sobre-elevação (torna o sistema "mais leve")
- um pólo adicional trava a resposta e diminui a sobre-elevação (torna o sistema "mais pesado").

Graficamente, teremos os seguintes efeitos sobre a resposta temporal, para uma entrada em degrau:



3.12. Sistemas de fase não-mínima (zeros no SPD)

Para que um sistema seja estável, não pode ter pólos no Semi-Plano Direito, e por isso se diz a região de instabilidade.

Os zeros não influenciam a estabilidade e podem situar-se, desse ponto de vista, em qualquer ponto do plano complexo. No entanto influenciam o regime transitório da resposta. Podemos dizer que os zeros não influenciam o longo prazo, mas apenas o curto-prazo.

Vejamos um exemplo de uma função de transferência com um zero no SPD. Sejam

$$\text{i) } G(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{ii) } G(s) = \frac{-(s-2)}{(s+1)(s+2)} \quad \text{e} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

Note-se que as funções de transferência têm ganhos de sinal contrário.

Para a primeira teremos

$$Y(s) = \frac{s-2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2} = \frac{-1}{s} + \frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

$$y(t) = -1 + 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

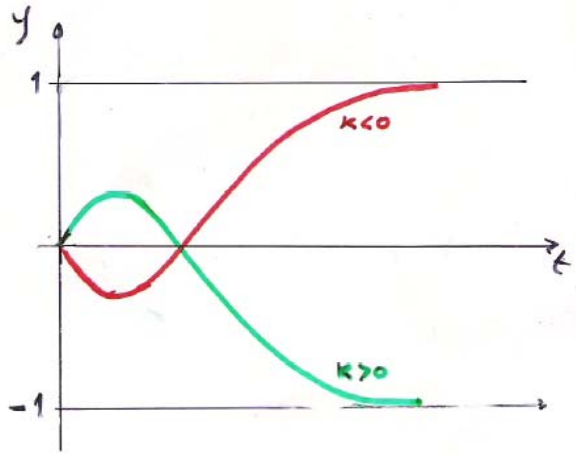
Para a segunda-feira, e dado o sinal contrário de G(s), teremos uma saída simétrica.

$$G(s) = \frac{-(s-2)}{(s+1)(s+2)} \quad (k=-1)$$

$$Y(s) = \frac{-(s-2)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = 1 - 3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Graficando, obtém-se a figura seguinte, que ilustra o comportamento típico dos sistemas chamados de **fase não-mínima** ou de **resposta inversa** (porque a resposta inicia-se em direcção contrária à final)

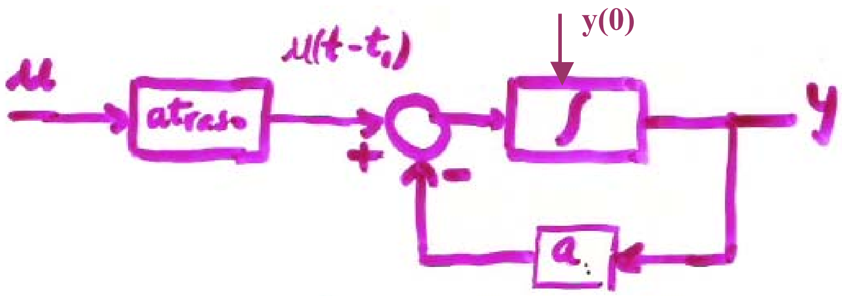


3.13. Sistemas com atraso puro

A equação diferencial

$$\dot{y}(t) + a\, y(t) = b\, u(t-t_1)$$

diz-nos que a entrada do instante t-t_1 influencia a saída no instante t.A entrada necessita de um intervalo de tempo t_1 para ter efeito sobre a saída. Diz-se que t_1 é um **atraso puro** (*pure time delay*).
O diagrama de simulação desta equação diferencial é



Aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial, tendo em atenção a propriedade de deslocamento temporal, e invertendo, obtém se

$$(s+a)\,Y(s) = y(0) + b\,e^{-st_1}\,U(s)$$

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{y(0)}{s+a}\right]}_{\substack{y_{zi} \\ \text{inalterada p/ atraso}}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s+a}\,e^{-st_1}\,U(s)\right]}_{\substack{y_{zs} \\ \text{alterada p/ atraso}}}$$

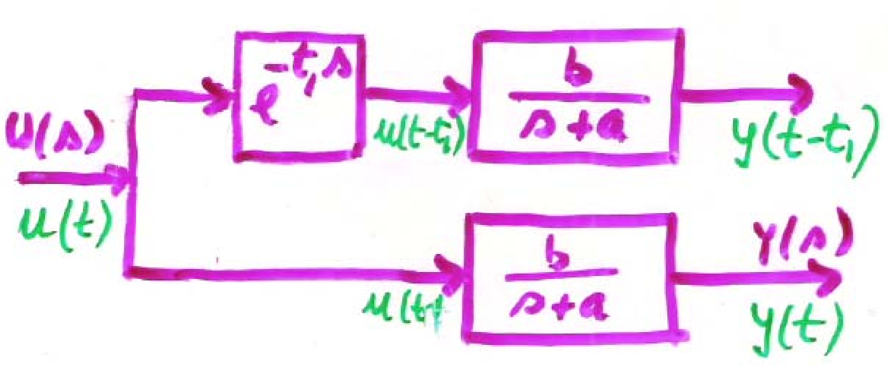
Ou seja, a resposta às condições iniciais não é afectada pelo atraso (como era de prever, atendendo ao diagrama de simulação, dado que elas entra directamente no integrador). Mas a resposta à entrada é afectada pelo atraso. Considerando-a separadamente,

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\substack{\text{cond. in.} \\ \text{nulas}}} = \frac{b}{s+a}\,e^{-st_1} \quad \boxed{\text{não racional}}$$

obtém-se uma função não-racional, e portanto para ela não é possível calcular a transformada inversa de Laplace.

Com calcular y(t) nestas circunstâncias adversas ?

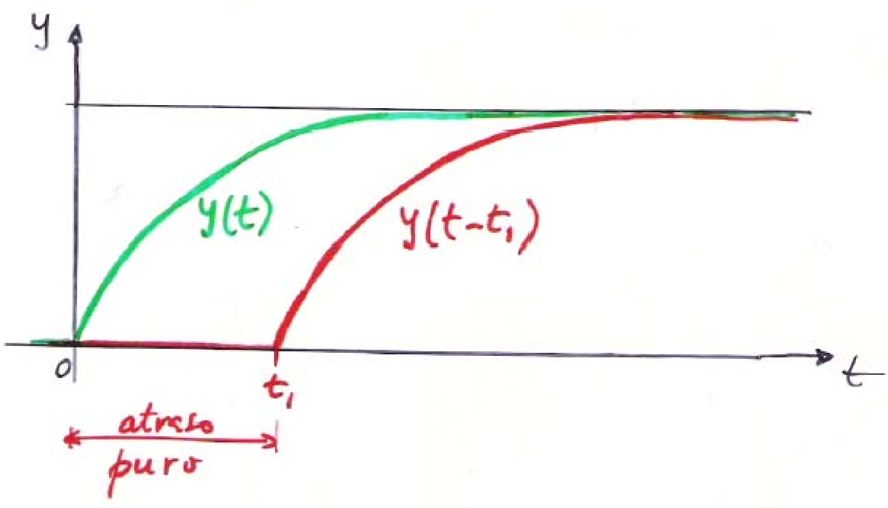
Tomemos o seguinte dois sistemas em paralelo, com a mesma entrada,



Na parte de baixo, não havendo atraso puro, não há qualquer problema em calcular y(t). Mas na parte de cima aparece o termo irracional do atraso puro.

Mas haverá alguma relação entre a saída de cima e a de baixo? Se houver, e se a conhecermos, poderemos obter a resposta de cima desde que tenhamos obtido a resposta de baixo.

Ora atendendo à natureza do atraso puro, um efeito que apenas retarda as coisas, poderemos concluir que a relação entre as duas entradas é ilustrada pela figura



Em geral, para a mesma entrada U(s)

se $\quad G_1(s) = G(s) \cdot e^{-st_1}$

$$Y_1(s) = Y(s)\, e^{-st_1}$$

$$y_1(t) = y(t-t_1)$$

3.14. Resposta em regime final

A saída em regime final, ou o valor final da saída, é definido por,

$$y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

No caso em que u(t) é um degrau unitário,

$$Y(s) = G(s).\, U(s) = G(s).\, \frac{1}{s}$$

Aplicando o teorema do valor final (note-se que tal só é válido se G(s) for estável),

$$y_\infty = \lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to 0} s\, Y(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s.\, \frac{1}{s}.\, G(s) = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$= G(s)\Big|_{s=0} = G(0)$$

$$\boxed{y_\infty = G(0)}$$

Tendo $G(s)$, para calcular a resposta em regime final para uma entrada em degrau unitário, basta substituir s por zero em $G(s)$ e fazer as contas. O valor constante obtido é **o ganho** do sistema: de facto (pelo facto de a entrada ser 1).

3.15. Síntese

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_0 u_0$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{[\text{condições iniciais}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}}_{Y_{zi}} + \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}}_{Y_{zs}} \quad (m<n)$$

função de transferência

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{b_m (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

zeros

polos

Polinómio característico

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \qquad (\text{de } Y_{zi})$$

Modos: raízes do polinómio característico

Estabilidade: estável (em relação a Y_{zi}) se todos os modos estão no SPE ou na origem com multiplicidade um.

BIBO estável se todos os polos estão no SPE.

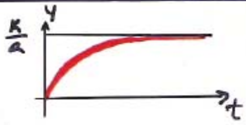
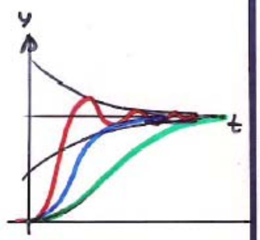
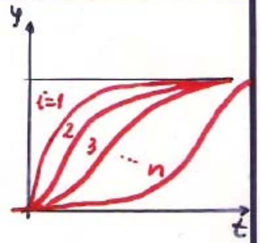
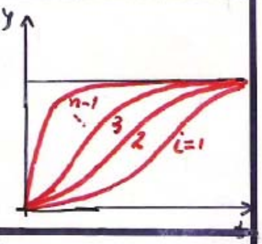
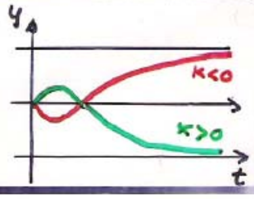
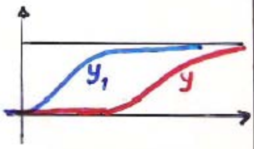
Polos e modos: reais ou complexos conjugados, simples ou múltiplos.

zeros na resposta temporal: definem as constantes de combinação linear das exponenciais dos polos

resposta em regime final para entrada em degrau: $G(0)$

RESPOSTA A DEGRAU

(análise qualitativa)

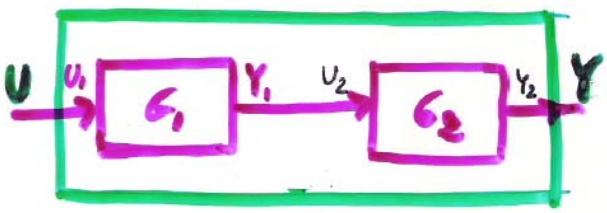
	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	RESPOSTA (t)
1ª	$G(s) = \dfrac{K}{s+a}$	
2ª	$G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $1 < \xi$ pólos reais simples $\xi = 1$ pólo real duplo $0 < \xi < 1$ pólos compl. conjugados $\xi < 0$ pólos no SPD	
$\geq 3^a$	$G(s) = \dfrac{K}{\prod_{j=1}^{i}(s+p_j)}$ $\quad i = 3, \ldots, n$	
EFEITO DOS ZEROS	$G(s) = \dfrac{K\prod_{j=1}^{i}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$ $\quad , i = 1, \ldots, n-1$	
FASE NÃO MÍNIMA	$G(s) = \dfrac{K(s-z)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$	
ATRASO PURO	$G(s) = G_1(s) \cdot e^{-st_1}$	

5.15. Vantagens e limites da função de transferência.

A função de transferência é um conceito e uma ferramenta muito útil em estudos de dinâmica de sistemas. É fácil com ela calcular a resposta do sistema a qualquer entrada, incluindo a entrada impulsional.

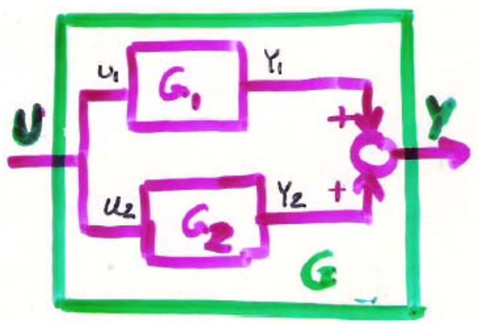
Com ela pode-se descrever matematicamente a composição de subsistemas. Por exemplo:

i) sistemas em série: produto das funções de transferência



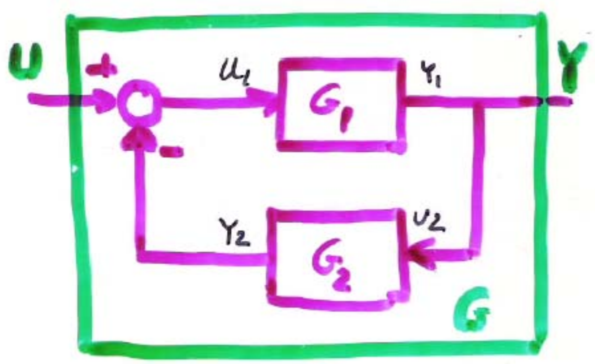
$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

ii) sistemas em paralelo: soma das funções de transferência



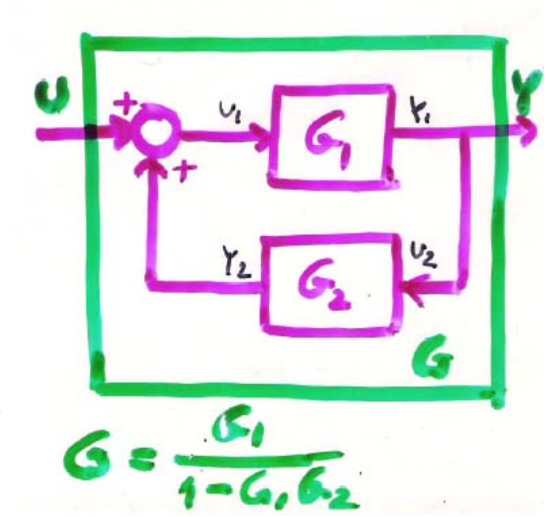
$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

iii) sistemas com retroacção negativa



$$G = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

iv) sistemas com retroacção positiva



Esta forma de representação tem também sérias limitações.

A mais grave resulta do facto de só se poder aplicar a sistemas lineares

Quando existem cancelamentos no seu cálculo, como vimos anteriormente, ela não é capaz de representar completamente todas as características relevantes do sistema; diz-se então que é uma representação **incompleta.**

Bibliografia

- Baura G. D, *System Theory and Practical Applications of Biomedical Signals, (Biomedical Engineering S.),* John Wiley and Sons, 2002
- Carvalho, J. L. M, *Sistemas de Controlo Automático.*. LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.
- Chen, C.T. *Systems and Signals Analysis,* 2nd Ed, Saunders College Bupl, 1994
- Franlkin, G.F, J.D. Powell and Niemi, *Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1980.
- Khoo, Michael, *Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation* by; John Wiley and Sons, 1999.
- Ribeiro, M. Isabel, *Análise de Sistemas Lineares,.,* IST Press 2002.