FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

- Transformada inversa de Laplace
- Método da expansão em frações parciais
- Solução de equações diferenciais
- Conversão modelo de estado para função de transferência
- Exemplos

Definição da Transformada inversa de Laplace

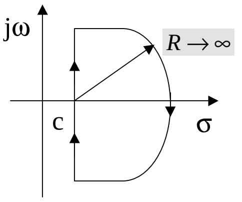
A transformada inversa de Laplace é dada por:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty^{-}}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

para $t > 0$ e onde c, chamada de *abcissa de convergência*, é um real constante escolhido à direita do maior ponto singular de *F(s)*.

Algumas considerações sobre a TIL

- Corresponde portanto a uma integral fechada que percorre um caminho paralelo ao eixo imaginário de baixo p/ cima.
- Para uma abcissa de convergência nula, o percurso é o próprio eixo imaginário englobando todo o SPD no sentido horário.
- Não há necessidade em geral de se calcular a integral.
- Encontra-se a TIL por decomposição e uso da tabela de transformadas.



Cálculo da TIL

Expansão em Frações Parciais

Aplica-se quando ⇨ $X(s)$ ⇨ Função racional ⇨ quociente de dois polinômios em *s*

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

⇦ ordem *m*

⇦ ordem *n*

$m < n$

Etapas para o cálculo da TIL

1) desenvolver *X(s)* em frações parciais $X(s)=\dfrac{Q(s)}{P(s)}$

Encontrar as raízes de *P(s)* ⇨ Escrever polinômio na forma fatorada

$$X(s)=\frac{Q(s)}{(s-r_1)(s-r_2)\ldots(s-r_n)}$$

montar polinômios $p_i(s)$ de grau 1 ou 2

$$X(s)=\frac{C_1}{(s-r_1)}+\frac{C_2}{(s-r_2)}+\cdots+\frac{C_n}{(s-r_n)}$$

calcular as constantes C_i

2) Calcular a transformada inversa de cada termo

Exemplo de cálculo da TIL: raízes simples

Seja $X(s)=\dfrac{a+bs}{(s-r_1)(s-r_2)}$ $r_1 \neq r_2$

⇨ Primeiro passo

$$X(s)=\frac{C_1}{(s-r_1)}+\frac{C_2}{(s-r_2)}$$

Onde C_1 e C_2 são determinadas pela igualdade

$$X(s)=\frac{a+bs}{(s-r_1)(s-r_2)}=\frac{C_1}{(s-r_1)}+\frac{C_2}{(s-r_2)}$$

Continuação: Cálculo das constantes

$$X(s) = \frac{a+bs}{(s-r_1)(s-r_2)} = \frac{C_1}{(s-r_1)} + \frac{C_2}{(s-r_2)}$$

$$\Downarrow \quad *(s-r_1)$$

$$(s-r_1)X(s) = \frac{a+bs}{(s-r_2)} = C_1 + (s-r_1)\frac{C_2}{(s-r_2)}$$

Como s pode assumir qualquer valor $\Rightarrow$ $s = r_1$ $\Rightarrow$ $C_1 = \frac{a+br_1}{(r_1-r_2)}$

Continuação: Cálculo das constantes

$$X(s) = \frac{a+bs}{(s-r_1)(s-r_2)} = \frac{C_1}{(s-r_1)} + \frac{C_2}{(s-r_2)}$$

Analogamente

$$\Downarrow \quad *(s-r_2)$$

$$(s-r_2)X(s) = \frac{a+bs}{(s-r_1)} = (s-r_2)\frac{C_1}{(s-r_1)} + C_2$$

Como s pode assumir qualquer valor $\Rightarrow$ $s = r_2$ $\Rightarrow$ $C_2 = \frac{a+br_2}{(r_2-r_1)}$

Finalização do exemplo de raízes simples

Substituindo as constantes obtemos

$$X(s) = \frac{a+br_1}{(r_1-r_2)}\frac{1}{(s-r_1)} + \frac{a+br_2}{(r_2-r_1)}\frac{1}{(s-r_2)}$$

Lembrando que ⇨ $L(e^{-at}) = \dfrac{1}{s+a}$

$$f(t) = L^{-1}(X(s)) = \frac{a+br_1}{(r_1-r_2)}e^{r_1 t} + \frac{a+br_2}{(r_2-r_1)}e^{r_2 t}$$

Generalizando para *n* raízes simples ⇨ $C_i = (s-r_i)\,X(s)\big|_{s=r_i}$

Exemplo com raízes múltiplas

Seja

$$X(s) = \frac{a+bs}{(s-r_1)^2(s-r_2)}$$

⇨ Primeiro passo

$$X(s) = \frac{C_1}{(s-r_1)^2} + \frac{C_2}{(s-r_1)} + \frac{C_3}{(s-r_2)}$$

onde as constantes são determinadas pela igualdade

$$X(s) = \frac{a+bs}{(s-r_1)^2(s-r_2)} = \frac{C_1}{(s-r_1)^2} + \frac{C_2}{(s-r_1)} + \frac{C_3}{(s-r_2)}$$

Continuação: Cálculo das constantes

$$X(s)=\frac{a+bs}{(s-r_1)^2(s-r_2)}=\frac{C_1}{(s-r_1)^2}+\frac{C_2}{(s-r_1)}+\frac{C_3}{(s-r_2)}$$

⇓ $*(s-r_1)^2$

$$(s-r_1)^2\,X(s)=\frac{a+bs}{(s-r_2)}=C_1+(s-r_1)C_2+\frac{(s-r_1)^2}{(s-r_2)}C_3$$

Como *s* pode assumir
qualquer valor ⇒ $s=r_1$ ⇒ $C_1=\dfrac{a+br_1}{(r_1-r_2)}$

Continuação: Cálculo das constantes

$$(s-r_1)^2\,X(s)=\frac{a+bs}{(s-r_2)}=C_1+(s-r_1)C_2+\frac{(s-r_1)^2}{(s-r_2)}C_3$$

Derivando a eq. acima e fazendo $s = r_1$ ⇒ obtém-se a constante C_2

$$\Rightarrow\quad C_2=\frac{d}{ds}\left[(s-r_1)^2\,X(s)\right]\Big|_{s=r_1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{a+bs}{s-r_2}\right]\Bigg|_{s=r_1}$$

$$\Rightarrow\quad C_2=\frac{-r_2b-a}{(r_1-r_2)^2}$$

Continuação

$$X(s)=\frac{a+bs}{(s-r_1)^2(s-r_2)}=\frac{C_1}{(s-r_1)^2}+\frac{C_2}{(s-r_1)}+\frac{C_3}{(s-r_2)}$$

Analogamente $\Downarrow$ $*(s-r_2)$

$$(s-r_2)\,X(s)=\frac{a+bs}{(s-r_1)^2}=\frac{(s-r_2)}{(s-r_1)^2}C_1+\frac{(s-r_2)}{(s-r_1)}C_2+C_3$$

Como s pode assumir qualquer valor ⇨ $s=r_2$ ⇨ $C_3=\dfrac{a+br_2}{(r_2-r_1)^2}$

Finalização

Generalizando ⇨ Portanto para q raízes iguais

$$\Rightarrow\quad C_p=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{\,p-1}}{ds^{\,p-1}}\Big[(s-r_i)^q\,X(s)\Big]\right]\Bigg|_{s=r_i}\qquad p=1,\ldots,q$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-r_i)^q}\right]=\frac{1}{(q-1)!}t^{\,q-1}e^{r_i t}$$

Exemplo de raízes simples usando MATLAB

Encontrar a TIL da expressão abaixo.

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2+4s+8}{s^3+6s^2+11s+6}$$

Método: usar o comando *residue*

Solução

Usando os comandos:

- ***np=[1 4 8];***
- ***dp=[1 6 11 6];***
- ***[r p k]=residue(np,dp);***

Obtém-se r = [2.5 -4 2.5], p = [-3 -2 -1] e k = [ ], correspondendo a

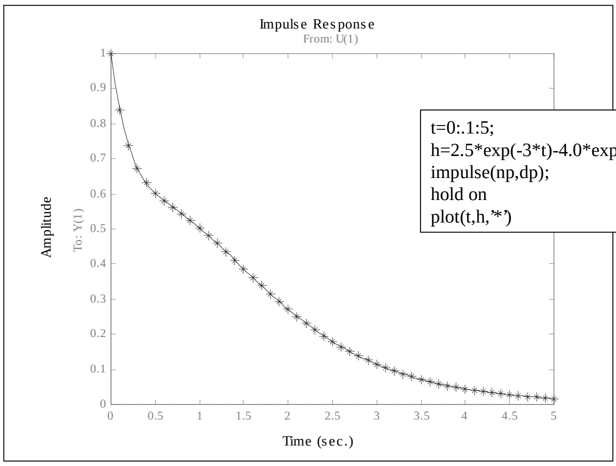
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2.5}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{2.5}{s+1}$$

e portanto $h(t) = 2.5e^{-3t} - 4e^{-2t} + 2.5e^{-t}$

```
syms s
ilaplace((s^2+4*s+8)/(s^3+6*s^2+11*s+6))
```

A função acima corresponde à resposta ao impulso, e pode ser traçada com o comando *impulse* bem como calculada diretamente.

Comparando os resultados



```
t=0:.1:5;
h=2.5*exp(-3*t)-4.0*exp(-2*t)+2.5*exp(-t);
impulse(np,dp);
hold on
plot(t,h,'*')
```

Exemplo de raízes múltiplas com MATLAB

Encontrar a TIL da expressão abaixo.

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 4s + 4}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Solução

Usando os comandos:

- ***np=[1 4 4];***
- ***dp=[1 3 3 1];***
- ***[r p k]=residue(np,dp);***

Obtém-se r = [1 2 1], p = [-1 -1 -1] e k = [ ], correspondendo a

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{1!(s+1)^2}+\frac{1}{2!(s+1)^3}$$

e portanto $h(t)=(1+2t+1/2\,t^2)e^{-t}$

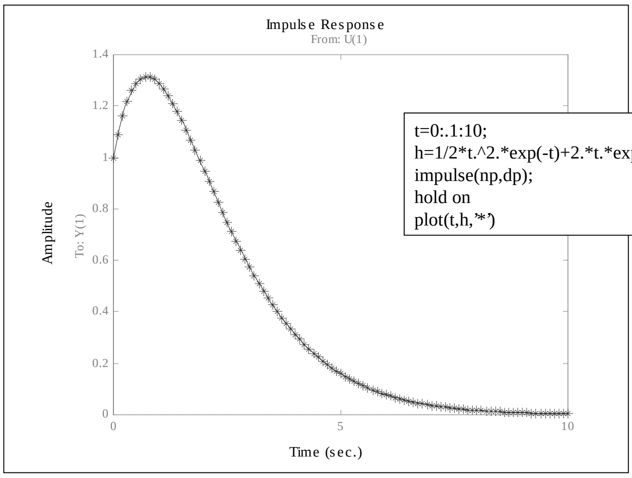
```
syms s
ilaplace((s^2+4*s+4)/(s^3+3*s^2+3*s+1))
```

Calculando a resposta acima bem como a resposta respectiva com o comando *impulse*, as curvas encontram-se a seguir.

Obs.: Como $e^{-at}\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+a)}$ pela convolução

$$\int_0^t e^{-a(t-\tau)}e^{-a\tau}d\tau = te^{-at}\xleftrightarrow{L}\frac{1}{(s+a)}\frac{1}{(s+a)}$$

Comparando



```
t=0:.1:10;
h=1/2*t.^2.*exp(-t)+2.*t.*exp(-t)+exp(-t);
impulse(np,dp);
hold on
plot(t,h,'*')
```

Exemplo de raízes complexas

Encontrar a TIL da expressão abaixo.

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2+2s+5}$$

Nesse caso, a decomposição deve ser feita lembrando que

Seja $r_1 = -a+bj \quad \text{e} \quad r_2 = -a-bj$

$$(s-(-a+bj))(s-(-a-bj))$$

$$((s+a)-bj)((s+a)+bj)$$

$$(s+a-bj)(s+a+bj)$$

$$(s+a)^2+b^2$$

$$L(e^{-at}\operatorname{sen} bt) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

$$L(e^{-at}\cos bt) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

$$a>0, b>0$$

Solução

Usando os comandos:

- ***np=[1];***
- ***dp=[1 2 5];***
- ***[r p k]=residue(np,dp);***

Obtém-se r = [-0.25i 0.25i] e p = [-1+2j -1-2j]. Portanto pode-se escrever

$$H(s) = -\frac{1}{4}\frac{i}{(s-1-2j)} + \frac{1}{4}\frac{i}{(s-1+2j)}$$

o que leva à seguinte TIL, consultando a tabela

$$h(t) = \frac{-1}{4}ie^{(-1+2j)t} + \frac{1}{4}ie^{(-1-2j)t} = \frac{1}{4}e^{-t}\left(-ie^{2jt}+ie^{-2jt}\right) = \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$$

Solução

Ou, usando os comandos:

- ***np=[1];***
- ***dp=[1 2 5];***
- ***p=roots(dp);***
- ***a=real(p(1));***
- ***b=imag(p(1));***

Obtém-se p = [-1-2j -1+2j] e a = -1, b = 2. Portanto pode-se escrever

$$\boxed{H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{1}{(s-a)^2+b^2}=\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{(s-a)^2+b^2}}$$

o que leva à seguinte TIL, consultando a tabela

$$\boxed{L(e^{-at}\,\mathrm{sen}\,bt)=\frac{b}{(s+a)^2+b^2}}$$

$$\boxed{h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)}$$

Outro exemplo de raízes complexas

Encontrar a TIL da expressão abaixo.

$$\boxed{\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{s+5}{s^2+2s+5}}$$

Solução

Usando os comandos:

- ***np=[1 5];***
- ***dp=[1 2 5];***
- ***p=roots(dp);***
- ***a=real(p(1));***
- ***b=imag(p(1));***

Obtém-se p = [-1-2j -1+2j] e a = -1, b = 2. Portanto pode-se escrever

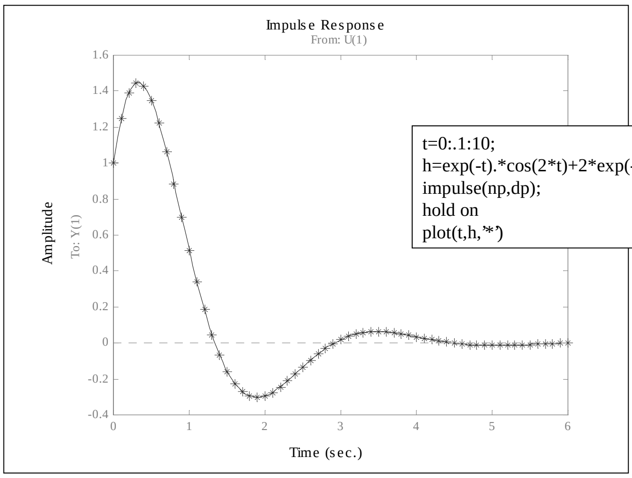
$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{s+5}{(s-a)^2+b^2}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}+\frac{5+a}{b}\cdot\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

observando que agora temos uma soma de senóide e cossenóide

$$h(t)=e^{-t}\cos(2t)+2e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)$$

```
ilaplace((s+5)/(s^2+2*s+5))
```

Comparando



```
t=0:.1:10;
h=exp(-t).*cos(2*t)+2*exp(-t).*sin(2*t);
impulse(np,dp);
hold on
plot(t,h,'*')
```

Solução de equações diferenciais

- A Transformada de Laplace facilita a solução de equações diferencias.
- O resultado obtido é a solução completa.
- O método consiste em três passos:
  - ***Aplica a propriedade da derivada no tempo***
  - ***Decompõe a expressão resultante em termos simples***
  - ***Calcula a transformada inversa***

Solução de equação de 2a. ordem

Encontrar a solução da equação abaixo:

$$\begin{aligned} &2\ddot{x}+7\dot{x}+3x=0\\ &x(0)=3\\ &\dot{x}(0)=0 \end{aligned}$$

Usando:

$$\begin{aligned} &\dot{x}\xrightarrow{L} sX(s)-x(0)\\ &\ddot{x}\xrightarrow{L} s[sX(s)-x(0)]-\dot{x}(0) \end{aligned}$$

Solução

Aplicando Laplace:

$$2s^2X(s) - 2\dot{x}(0) - 2sx(0) + 7sX(s) - 7x(0) + 3X(s) = 0$$

Substituindo as condições iniciais:

$$2s^2X(s) + 7sX(s) + 3X(s) = 6s + 21$$

$$X(s) = \frac{6s + 21}{2s^2 + 7s + 3}$$

Separando em frações parciais:

$$X(s) = \frac{6s + 21}{(s + 0.5)(s + 3)}$$

$$X(s) = \frac{3.6}{s + 0.5} - \frac{0.6}{s + 3}$$

Encontrando a transformada inversa:

$$x(t) = 3.6e^{-0.5t} - 0.6e^{-3t}$$

Aplicando a sistemas lineares

O mesmo método pode ser aplicado para se encontrar respostas completas de sistemas lineares representados por sua função de transferência ou por sua EDG.

Conversão FT para ME

- Para converter de FT para ME os métodos de realização de sistemas já apresentados podem ser usados.
- A partir da FT podem ser encontrados diretamente os modelos canônicos controlável e observável.
- Também podem ser encontrados os modelos em cascata e desacoplado (diagonal).

Exemplo de 1a. ordem

$$\text{Seja}\begin{cases}\dot{y}+a_0y(t)=b_0u(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}\Rightarrow\quad \dot{y}+\frac{1}{\tau}y(t)=b_0u(t)$$

$$\tau\dot{y}+y(t)=\underbrace{b_0\tau}_{\gamma}u(t)$$

τ Const. de tempo

γ Ganho estático

Aplicando Laplace

$$\tau sY(s)-\tau y(0)+Y(s)=\gamma U(s)$$

Condições iniciais nulas

$$Y(s)=\underbrace{\frac{\gamma}{\tau s+1}}_{\text{Função de transferência}}U(s)$$

Resposta ao impulso unitário

A) Seja $u(t)=\delta(t) \Rightarrow \text{impulso unitário}$ ⇨ $U(s)=L[\delta(t)]=1$

⇨ $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=??$

$$Y(s)=\frac{\gamma}{\tau s+1}U(s)$$ ⇨ $$Y(s)=\frac{\gamma}{\tau s+1}$$ ⇨ $$Y(s)=\gamma\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)}$$

⇨ $$y(t)=L^{-1}\left[\frac{\gamma/\tau}{s+1/\tau}\right]=\frac{\gamma}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t}$$ ⇨ $$y(t)=\frac{\gamma}{\tau}e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

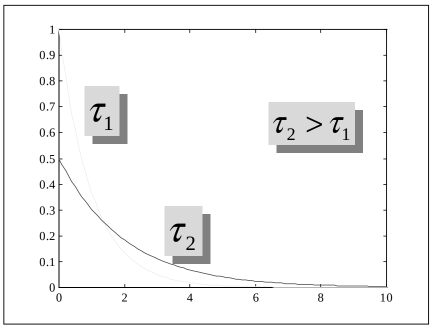
Matlab: Resposta ao impulso unitário

$$y(t)=\frac{\gamma}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Usando os comandos:

- ***t=0:0.1:10;***
- ***tau =1***
- ***np=[1];***
- ***dp=[tau 1];***
- ***y1=impulse(np,dp,t)***
- ***tau =2***
- ***dp=[tau 1];***
- ***y2=impulse(np,dp,t)***
- ***plot(t,y1,t,y2)***

Sistema estável



Resposta ao degrau unitário

B) Seja $u(t) = \text{degrau unitário}$ ⇒ $U(s) = L[u(t)] = \frac{1}{s}$

⇒ $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = ??$

$Y(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1} U(s)$ ⇒ $Y(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1}\frac{1}{s}$ ⇒ $Y(s) = \gamma \underbrace{\frac{1/\tau}{(s + 1/\tau)s}}$

$$\frac{1/\tau}{(s + 1/\tau)s} = \frac{C_1}{s + 1/\tau} + \frac{C_2}{s}$$ ⇐ Frações parciais

---

Continuação

$$\frac{1/\tau}{(s + 1/\tau)s} = \frac{C_1}{s + 1/\tau} + \frac{C_2}{s}$$

⇓ $*(s + 1/\tau)$

$$\frac{1}{\tau\, s} = C_1 + \frac{(s + 1/\tau)}{s} C_2$$

Como *s* pode assumir qualquer valor ⇒ $s = -\frac{1}{\tau}$ ⇒ $C_1 = -1$

Continuação

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)s} = \frac{C_1}{s+1/\tau} + \frac{C_2}{s}$$

Analogamente

$\Downarrow$ $*\,s$

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)} = \frac{s}{s+1/\tau}C_1 + C_2$$

Como *s* pode assumir qualquer valor ⇒ $s = 0$ ⇒ $C_2 = 1$

Finalização

Substituindo as constantes obtemos

$$Y(s) = \gamma\left(\frac{-1}{s+1/\tau} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\left[\gamma\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}\right)\right] = \gamma\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \gamma\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

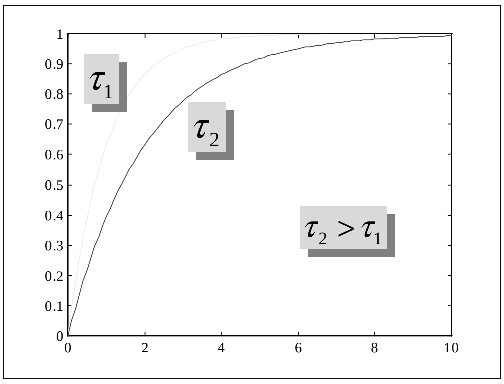
```
syms tau s gama
ilaplace(gama*(1/tau)/((s+1/tau)*s))
```

Matlab: Resposta ao ao degrau unitário

$$y(t) = \gamma\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

Usando os comandos:

- ***t=0:0.1:10;***
- ***tau =1***
- ***np=[1];***
- ***dp=[tau 1];***
- ***y1=step(np,dp,t)***
- ***tau =2***
- ***dp=[tau 1];***
- ***y2=step(np,dp,t)***
- ***plot(t,y1,t,y2)***



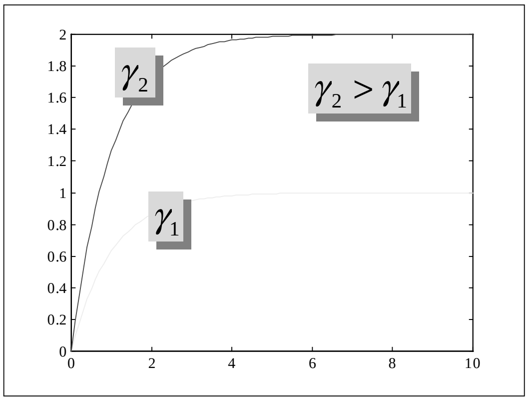
Efeito da constante de tempo

---

continuação

Usando os comandos:

- ***t=0:0.1:10;***
- ***gama =1***
- ***np=[gama];***
- ***dp=[1 1];***
- ***y1=step(np,dp,t)***
- ***gama =2***
- ***np=[gama];***
- ***y2=step(np,dp,t)***
- ***plot(t,y1,t,y2)***



Efeito do ganho estático

Resposta à rampa unitária

C) Seja $u(t) = \text{degrau unitário}$

$tu(t) = \text{rampa unitária}$ ⇒ $U(s) = L[tu(t)] = \frac{1}{s^2}$

⇒ $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = ??$

$$Y(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1} U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{\gamma}{\tau s + 1}\frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \gamma \underbrace{\frac{1/\tau}{(s + 1/\tau)s^2}}$$

Frações parciais

$$\frac{1/\tau}{(s + 1/\tau)s^2} = \frac{C_1}{s + 1/\tau} + \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_3}{s}$$

Continuação

$$\frac{1/\tau}{(s + 1/\tau)s^2} = \frac{C_1}{s + 1/\tau} + \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_3}{s}$$

⇓ $*(s + 1/\tau)$

$$\frac{1}{\tau s^2} = C_1 + \frac{(s + 1/\tau)}{s^2} C_2 + \frac{(s + 1/\tau)}{s} C_3$$

Como s pode assumir qualquer valor ⇒ $s = -\frac{1}{\tau}$ ⇒ $C_1 = \tau$

Continuação

$$\boxed{\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)s^2} = \frac{C_1}{s+1/\tau} + \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_3}{s}}$$

$$\Downarrow \quad \boxed{*(s^2)}$$

$$\boxed{\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)} = \frac{s^2}{s+1/\tau}C_1 + C_2 + sC_3}$$

Como *s* pode assumir qualquer valor $\Rightarrow \boxed{s = 0} \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$

Continuação

$$\boxed{\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)} = \frac{s^2}{s+1/\tau}C_1 + C_2 + sC_3}$$

$\Downarrow$ derivando com relação a *s*

$$\boxed{-\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)^{-2}} = \frac{2s}{s+1/\tau}C_1 - \frac{s^2C_1}{(s+1/\tau)^2} + C_3}$$

Como *s* pode assumir qualquer valor $\Rightarrow \boxed{s = 0} \Rightarrow \boxed{C_3 = -\tau}$

Finalização

Substituindo as constantes obtemos

$$Y(s) = \gamma\left(\frac{\tau}{s+1/\tau} + \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s}\right)$$

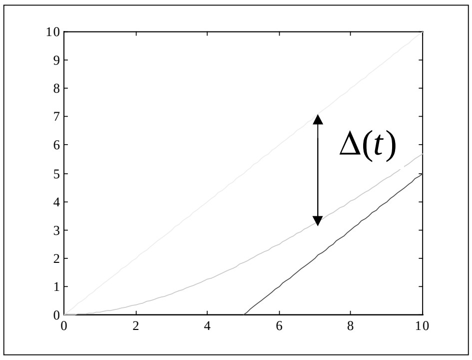
$$\Rightarrow\quad y(t) = L^{-1}\left[\gamma\left(\frac{\tau}{s+1/\tau} + \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s}\right)\right] = \gamma\left(\tau\, e^{-\frac{1}{\tau}t} + t - \tau\right)$$

$$\Rightarrow\quad y(t) = \gamma\left(\tau\, e^{-\frac{1}{\tau}t} + t - \tau\right)$$

```
syms tau s gama
ilaplace(gama*(1/tau)/((s+1/tau)*s^2))
```

Matlab: Resposta a rampa unitária

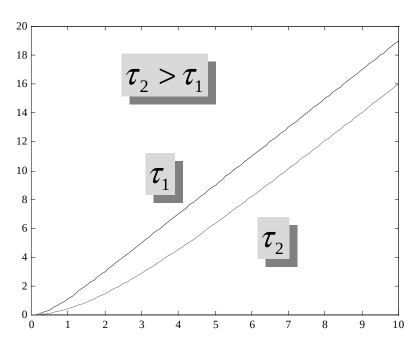
$$y(t) = \gamma\left(\tau\, e^{-\frac{1}{\tau}t} + t - \tau\right)$$



continuação

Usando os comandos:

- ***t=0:0.1:10;***
- ***ramp=t;***
- ***gama =2***
- ***tau=0.5***
- ***np=[gama];***
- ***dp=[tau 1];***
- ***y1=lsim(np,dp,ramp,t);***
- ***tau=2***
- ***np=[gama];***
- ***dp=[tau 1];***
- ***y2=lsim(np,dp,ramp,t);***
- ***plot(t,y1,t,y2)***



Efeito da constante de tempo

Resposta a uma senóide

D) Seja $u(t)=sin(\omega t)$ $\Rightarrow$ $U(s)=L[sin(\omega t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\Rightarrow$ $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=??$

$$Y(s)=\frac{\gamma}{\tau s+1}U(s) \Rightarrow Y(s)=\frac{\gamma}{\tau s+1}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \Rightarrow Y(s)=\gamma\,\underbrace{\frac{1/\tau}{s+1/\tau}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$$

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{C_1}{s+1/\tau}+\frac{C_2}{s+j\omega}+\frac{C_3}{s-j\omega} \Leftarrow$$

Frações
parciais

Continuação

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{C_1}{s+1/\tau}+\frac{C_2}{s+j\omega}+\frac{C_3}{s-j\omega}$$

⇩ $*(s+1/\tau)$

$$1/\tau\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=C_1+\frac{(s+1/\tau)}{s+j\omega}C_2+\frac{(s+1/\tau)}{s-j\omega}C_3$$

Como *s* pode assumir qualquer valor ⇨ $s=-\frac{1}{\tau}$ ⇨ $C_1=\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$

Continuação

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{C_1}{s+1/\tau}+\frac{C_2}{s+j\omega}+\frac{C_3}{s-j\omega}$$

⇩ $*(s+j\omega)$

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)}\frac{\omega}{(s-j\omega)}=\frac{(s+j\omega)}{(s+1/\tau)}C_1+C_2+\frac{(s+j\omega)}{(s-j\omega)}C_3$$

Como *s* pode assumir qualquer valor ⇨ $s=-j\omega$ ⇨ $C_2=\frac{\omega/\tau}{(-j\omega+1/\tau)(-2j\omega)}$

Continuação

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{C_1}{s+1/\tau}+\frac{C_2}{s+j\omega}+\frac{C_3}{s-j\omega}$$

⇓ $*(s-j\omega)$

$$\frac{1/\tau}{(s+1/\tau)}\frac{\omega}{(s+j\omega)}=\frac{(s-j\omega)}{(s+1/\tau)}C_1+\frac{(s-j\omega)}{(s+j\omega)}C_2+C_3$$

Como *s* pode assumir qualquer valor ⇨ $s = j\omega$ ⇨ $C_3=\frac{\omega/\tau}{(j\omega+1/\tau)(2j\omega)}$

Continuação

Substituindo as constantes obtemos

$$Y(s)=\gamma\left(\underbrace{\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\frac{1}{s+1/\tau}}_{Y_1(s)}+\underbrace{\frac{\omega/\tau}{(-j\omega+1/\tau)(-2j\omega)}\frac{1}{(s+j\omega)}}_{Y_2(s)}+\underbrace{\frac{\omega/\tau}{(j\omega+1/\tau)(2j\omega)}\frac{1}{(s-j\omega)}}_{Y_3(s)}\right)$$

⇨ $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[Y_1(s)]+L^{-1}[Y_2(s)]+L^{-1}[Y_3(s)]$

Continuação

Calculando as LITs

$$y_1(t) = L^{-1}\left[\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\frac{1}{s+1/\tau}\right] = \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$y_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\omega/\tau}{(-j\omega+1/\tau)(-2j\omega)}\frac{1}{(s+j\omega)}\right] = \frac{\omega/\tau}{(-j\omega+1/\tau)(-2j\omega)}e^{-j\omega t}$$

$$y_3(t) = L^{-1}\left[\frac{\omega/\tau}{(j\omega+1/\tau)(2j\omega)}\frac{1}{(s-j\omega)}\right] = \frac{\omega/\tau}{(j\omega+1/\tau)(2j\omega)}e^{j\omega t}$$

Finalização

Calculando as LITs

$$y_1(t) = \gamma\left[\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\omega/\tau}{(-j\omega+1/\tau)(-2j\omega)}e^{e^{-j\omega t}} + \frac{\omega/\tau}{(j\omega+1/\tau)(2j\omega)}e^{j\omega t}\right]$$

Utilizando as expressões de Euler

$$e^{jt} = \cos t + j\,\mathrm{sen}\,t$$
$$e^{-jt} = \cos t - j\,\mathrm{sen}\,t$$

$$y_1(t) = \gamma\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\left[e^{-\frac{t}{\tau}} + \cos\omega t + \frac{1}{\tau\omega}\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$