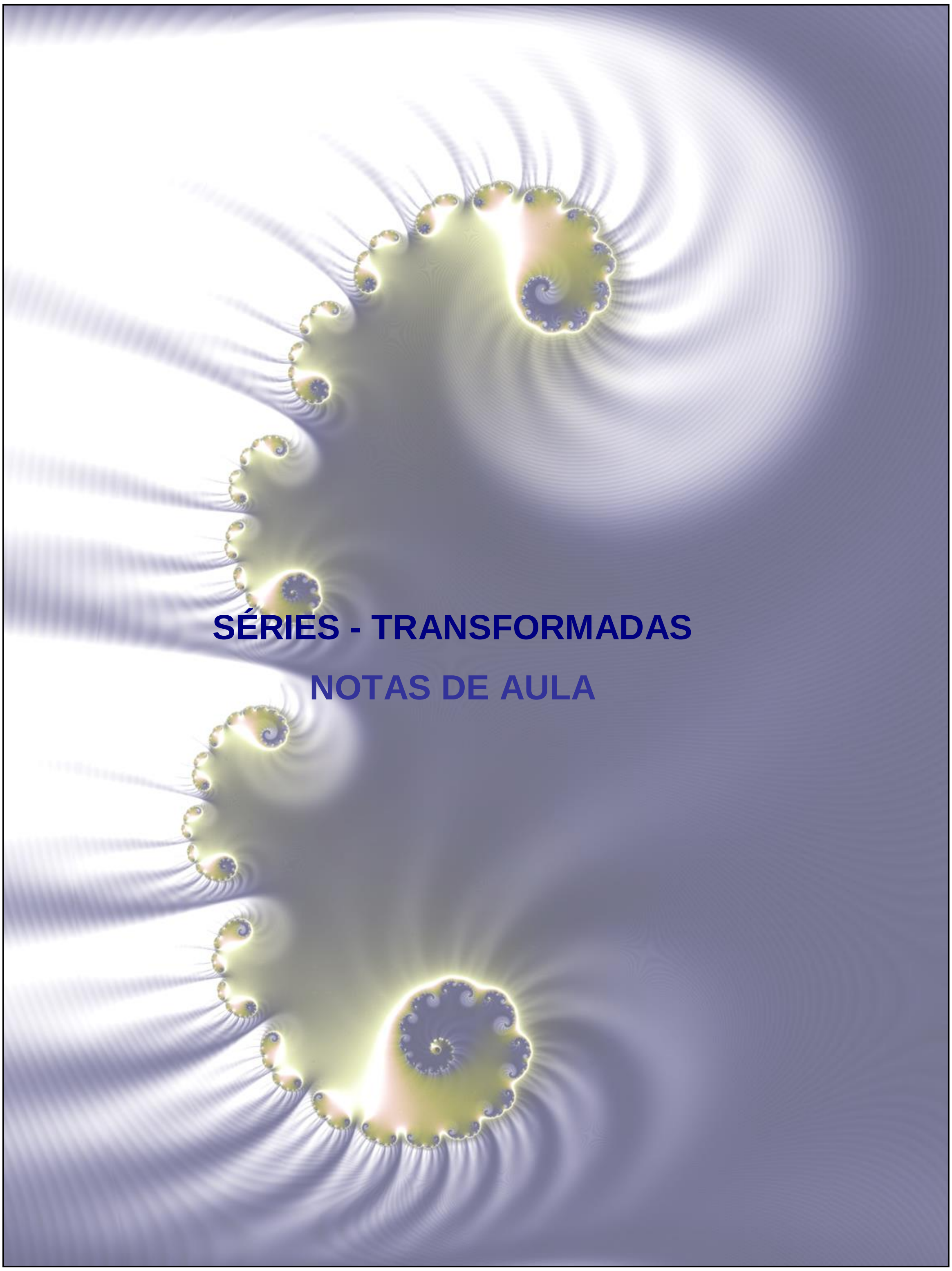


# SÉRIES - TRANSFORMADAS

## NOTAS DE AULA

*Não é paradoxo dizer*
*que nos nossos momentos de inspiração mais teórica*
*podemos estar o mais próximo possível*
*de nossas aplicações mais práticas*.

**A. N. Whitehead** (1861-1947)

Esta obra é um compêndio de notas de aula, organizadas durante dez (10) semestres letivos – 2007/2012, para a disciplina Cálculo 4 da grade das engenharias da UTFPR – Câmpus Curitiba. Nela, aborda-se Séries de Fourier, Transformada de Fourier, Transformada de Laplace e Transformada Z. Além da definição, análise de convergência, propriedades e inversão, as transformadas contínuas, como Fourier e Laplace, são aplicadas na solução de equações diferenciais ordinárias e parciais, empregadas na modelagem de fenômenos mecânicos e elétricos. Já a Transformada Z, discreta, é aplicada na solução de equações a diferenças lineares, presentes em um princípio de controle.

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br
paginapessoal.utfpr.edu.br/rudimarnos
2014

## Sumário

## 1. SÉRIES

Neste capítulo, são apresentados definições e teoremas relacionados a séries numéricas e a séries de funções. As demonstrações dos teoremas citados são encontradas em livros de cálculo [15] e de cálculo avançado e análise [7,8].

### *1.1 – Sequências numéricas infinitas*

Uma sequência numérica infinita é uma função discreta cujo domínio é $N \setminus \{0\}$.

Notação: $\{a_n\},\ n \in N \setminus \{0\},\ a_n = f(n)$.

**Exemplos**

1º) $\{a_n\} = (-1)^{n+1} \dfrac{n^2}{3n-1} \Rightarrow \{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}, \dfrac{25}{14}, \cdots\right\}$

2º) A sequência $\{a_n\} = \dfrac{n}{2n+1}$ é convergente ou divergente?

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \cdots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \cdots\right\}$$

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe, então $\{a_n\}$ é convergente. Caso contrário, $\{a_n\}$ é divergente.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$, $\{a_n\}$ é convergente.

### *1.2 – Séries numéricas infinitas*

Uma série numérica infinita é definida como sendo a soma dos termos de uma sequência numérica infinita.

Notação: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Somas parciais:
$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, então a série numérica infinita é *convergente*. Se o limite S não existe, então a série numérica infinita é *divergente*.

**Exemplo**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Logo, a série numérica infinita é convergente.

### *1.3 – Convergência de séries numéricas infinitas*

Diferenciar:

- condições necessárias à convergência;
- condições suficientes à convergência;
- condições necessárias e suficientes à convergência.

#### 1.3.1 – A série geométrica

**Teorema**: A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1}=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots,\ \text{com } a\neq 0,$$

(*i*) *converge*, e tem por soma $\frac{a}{1-r}$, se $|r|<1\ (-1<r<1)$;

(*ii*) *diverge*, se $|r|\geq 1\ (r\leq -1 \text{ ou } r\geq 1)$.

**Exemplos**

1º) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

2º) $\displaystyle 0,\bar{5}=0,5555\ldots=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\ldots=\frac{5/10}{1-1/10}=\frac{5/10}{9/10}=\frac{5}{9}$

### 1.3.2 – Condição necessária à convergência

**<u>Teorema</u>**: Se a série numérica infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

A recíproca não é sempre verdadeira.

### 1.3.3 – Teste da divergência

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série numérica infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

### 1.3.4 – Série de termos positivos: o teste da integral

**<u>Teorema</u>**: Se f é uma função contínua, decrescente e de valores positivos para todo $x \geq 1$, então a série numérica infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

(*i*) *converge* se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge;

(*ii*) *diverge* se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

**<u>Exemplo</u>**

A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ é divergente.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (condição necessária, porém não suficiente)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} [\ln(x)]_1^b = \lim_{b\to\infty} [\ln(b) - 0] = \infty$$

Como a integral diverge, a série harmônica diverge.

### 1.3.5 – Convergência absoluta e condicional

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita *absolutamente convergente* se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots$ convergir. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergir, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita *condicionalmente convergente*.

**<u>Teorema</u>**: Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

**<u>Exemplo</u>**

A série $1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \cdots$ é absolutamente convergente, uma vez que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (prova-se posteriormente usando a Série de Fourier).

## *1.4 – Convergência de séries de funções*

### 1.4.1 – Convergência uniforme

**<u>Série de números reais</u>**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2 + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{16}{4!} + \frac{32}{5!} + \ldots$$

**<u>Série de funções</u>**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \quad \text{(série de potências)}$$

A série de Fourier $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ é uma série de funções trigonométricas.

Sejam a série $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, onde $\{u_n(x)\}$, $n=1,2,3,\ldots$ é uma *sequência de funções* definidas em [a,b], $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)$ a soma parcial da série e $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$. A série converge para $S(x)$ em $[a,b]$ se para cada $\varepsilon>0$ e cada $x\in[a,b]$ existe um $N>0$ tal que $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ para todo $n>N$. O número $N$ depende geralmente de $\varepsilon$ e $x$. Se $N$ depende somente de $\varepsilon$, então *a série converge uniformemente ou é uniformemente convergente* em $[a,b]$.

**Teorema**: Se cada termo da série $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ é uma função contínua em [a,b] e a série é uniformemente convergente para S(x) em [a,b], então a série pode ser integrada termo a termo, isto é, $\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_a^b u_n(x)dx\right\}$.

**Teorema**: Se cada termo da série $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ é uma função contínua com derivada contínua em [a,b] e se $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ converge para S(x) enquanto $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ converge uniformemente em [a,b], então a série pode ser diferenciada termo a termo em [a,b], isto é, $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}u_n(x)\right)$.

### 1.4.2 – Teste M de Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897): matemático alemão.

Se existe uma sequência de constantes $M_n, n=1,2,3,\ldots,$ tal que para todo x em um intervalo

(a) $|u_n(x)|\le M_n$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge,

então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente no intervalo.

**Observações**:

1ª) O teste fornece condições suficientes, porém não necessárias.

2ª) Séries uniformemente convergentes não são necessariamente absolutamente convergentes ou vice-versa.

**Exemplo**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(4x)}{4^2} + \cdots$ é uniforme e absolutamente convergente em $[0,2\pi]$ (ou em qualquer intervalo), uma vez que $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

*1.5 – Exercícios complementares*

01. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

Resposta: use o teste da divergência.

02. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge e determine sua soma.

Resposta: $\frac{1}{2}$

03. Determine se as séries infinitas a seguir são convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ Resposta: a série é divergente: $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \infty$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ Resposta: a série é convergente: $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}dx = \frac{1}{4}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ Resposta: a série é convergente: $\int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \frac{2}{e}$.

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ Resposta: a série é divergente: $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)} = \infty$.

04. Verifique se as séries de funções seguintes são uniformemente convergentes para todo $x$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ Resposta: a série é uniformemente convergente para todo $x$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ Resposta: a série é uniformemente convergente para todo $x$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{2^n - 1}$ Resposta: a série é uniformemente convergente para todo $x$.

05. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$. Prove que $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

Resposta: use $\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$, o Teste M de Weierstrass (prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge usando o teste da integral) e o fato de que uma série uniformemente convergente pode ser integrada termo a termo.

<u>Observação</u>: mostra-se futuramente que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. Assim, $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3} dx = \frac{\pi^4}{48}$.

06. Prove que $\int_0^{\pi} \left[\frac{\cos(2x)}{1.3} + \frac{\cos(4x)}{3.5} + \frac{\cos(6x)}{5.7} + \cdots\right] dx = 0$.

# 2. A SÉRIE DE FOURIER

Neste capítulo, apresenta-se a Série de Fourier e suas propriedades. Mostra-se também como a Série de Fourier surge naturalmente no processo de solução de uma equação diferencial parcial.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1766-1830): físico, matemático e engenheiro francês. Principais contribuições: teoria da condução do calor, séries trigonométricas.

*Por que aproximar uma função por uma série de senos e cossenos?*

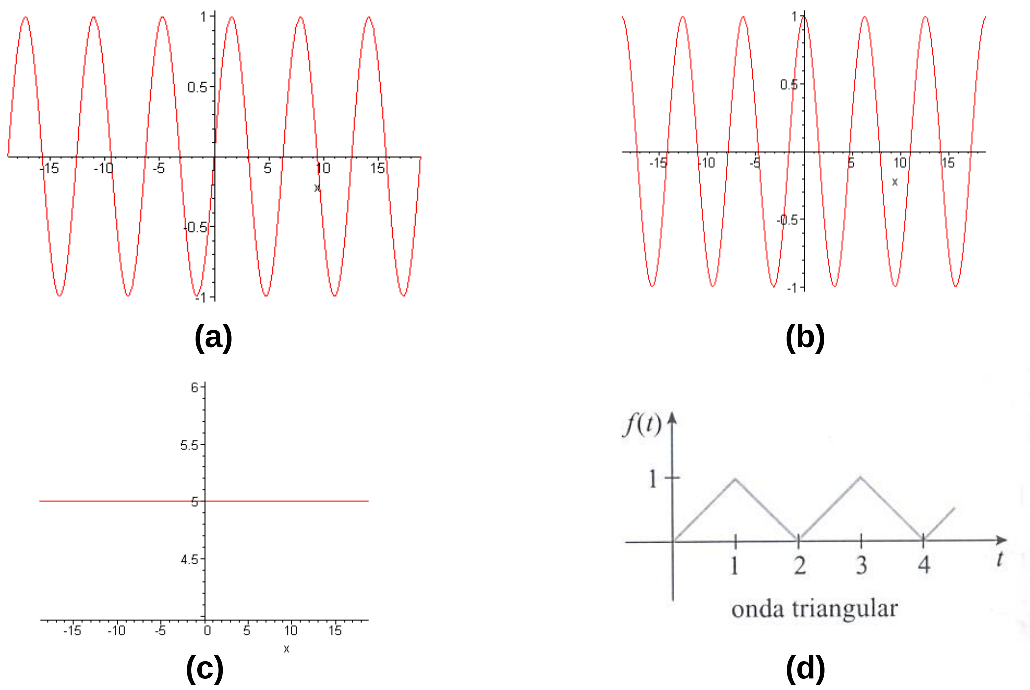
Para facilitar o tratamento matemático do modelo, uma vez que as funções trigonométricas seno e cosseno são periódicas de período fundamental $2\pi$, contínuas, limitadas e infinitamente diferenciáveis.

## *2.1 – Funções periódicas*

Uma função $f : R \to R$ é *periódica* de período fundamental  se

$$f(x+P) = f(x) \quad \forall x, \; P > 0.$$

**<u>Exemplos</u>**




**<u>Figura 2.1</u>**: **(a)** $f(x) = \text{sen}(x)$, função de período fundamental $P = 2\pi$; **(b)** $f(x) = \cos(x)$, função de período fundamental $P = 2\pi$; **(c)** $f(x) = 5$, função de período fundamental $P = k, k > 0$; **(d)** função onda triangular, de período fundamental $P = 2$.

Como as funções $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são 2π-periódicas, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(x) &= \mathrm{sen}(x+2\pi) = \mathrm{sen}(x+4\pi) = \mathrm{sen}(x+6\pi) = \cdots \\ \cos(x) &= \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \cos(x+6\pi) = \cdots\end{aligned}.$$

Funções periódicas surgem em uma grande variedade de problemas físicos, tais como as vibrações de uma corda, o movimento dos planetas em torno do sol, a rotação da terra em torno do seu eixo, o movimento de um pêndulo, a corrente alternada em circuitos elétricos, as marés e os movimentos ondulatórios em geral.

### *2.2 – Séries trigonométricas*

Denomina-se série trigonométrica a uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + b_1\mathrm{sen}(x) + a_2\cos(2x) + b_2\mathrm{sen}(2x) + a_3\cos(3x) + b_3\mathrm{sen}(3x) + \cdots$$

ou

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\mathrm{sen}(nx)\right] \tag{2.2.1}$$

ou

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]. \tag{2.2.2}$$

Obtém-se a forma (2.2.2) através de uma transformação linear que leva um intervalo de amplitude $2L$ em um intervalo de amplitude $2\pi$.

Em (2.2.1) ou (2.2.2), para cada $n$ temos um *harmônico* da série e $a_0$, $a_n$ e $b_n$ são os *coeficientes* da série.

$a_0$: constante

$a_n = f(n)$ e $b_n = f(n)$: sequências infinitas

**<u>Exemplo</u>**

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{2(-1)^n}{n\pi} \Rightarrow \{a_n\} = \left\{-\frac{2}{\pi}, \frac{1}{\pi}, -\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{2\pi}, -\frac{2}{5\pi}, \ldots\right\}$$

A série trigonométrica (2.2.2) também pode ser escrita na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n\right), \tag{2.2.3}$$

onde $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $a_n = A_n\mathrm{sen}(\phi_n)$ e $b_n = A_n\cos(\phi_n)$.

A forma (2.2.3) é obtida multiplicando-se e dividindo-se a forma (2.2.2) por $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ :

$$\frac{a_0}{2}\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \;;$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right].$$

Considerando $\sqrt{a_n^2+b_n^2} = A_n$ , $\frac{a_n}{A_n} = \operatorname{sen}(\phi_n)$ e $\frac{b_n}{A_n} = \cos(\phi_n)$, tem-se que:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\operatorname{sen}(\phi_n)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \cos(\phi_n)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right];$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n\right).$$

Em (2.2.3), o termo $A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n\right)$ é chamado *harmônico de ordem n* e pode ser caracterizado somente pela amplitude $A_n$ e pelo ângulo de fase $\phi_n$ .

**<u>Questões</u>**

01. Dada uma função f(x) 2L-periódica, quais as condições que f(x) deve satisfazer para que exista uma série trigonométrica convergente para ela?

02. Sendo $m, n \in N$ , mostre que:

(a) $\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0,\ n \neq 0$ ;

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} = \frac{L}{n\pi}\left[\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi)\right] = 0$$

$$n = 0 \Rightarrow \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}dx = [x]_{-L}^{L} = L - (-L) = 2L$$

(b) $\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$ $\left(f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right.$ é *ímpar* no intervalo $[-L, L]$);

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{L}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} = -\frac{L}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\right] = 0$$

$$n=0 \Rightarrow \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L} 0dx = 0$$

(c) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases}$;

$$\text{Lembrando que}: \cos(u)\cos(v) = \frac{1}{2}[\cos(u+v)+\cos(u-v)]$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{\cos\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]+\cos\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]\right\}dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

$$m=n\neq 0 \Rightarrow \int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)+1\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} dx = \frac{1}{2}[x]_{-L}^{L} = L$$

$$m=n=0 \Rightarrow \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 2dx = [x]_{-L}^{L} = 2L$$

(d) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases}$ (o produto de duas funções ímpares é par);

$$\text{Lembrando que}: \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v) = \frac{1}{2}[\cos(u-v)-\cos(u+v)]$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{\cos\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]-\cos\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]\right\}dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

$$m=n\neq 0 \Rightarrow \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} dx = \frac{1}{2}[x]_{-L}^{L} = L$$

$$m=n=0 \Rightarrow \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 0dx = 0$$

(e) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$ (o produto de uma função par por uma ímpar é ímpar).

$$\text{Lembrando que}: \operatorname{sen}(u)\cos(v) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v)+\operatorname{sen}(u-v)]$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left\{\operatorname{sen}\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]+\operatorname{sen}\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right]\right\}dx = 0$$

**Observações**

**1ª)** Os resultados encontrados anteriormente continuam válidos quando os limites de integração **–L** e **L** são substituídos por **c** e **c + 2L**, respectivamente, com $c \in R$ .

**2ª) Funções ortogonais**

**Definição 1**: O *produto interno* ou *produto escalar* de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ em um intervalo [a,b] é o número

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx\ .$$

**Definição 2**: Duas funções $f$ e $g$ são *ortogonais* em um intervalo $[a,b]$ se

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0\ .$$

As funções $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $g(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ são ortogonais no intervalo $(-L, L)$.

***2.3 – Série de Fourier***

**2.3.1 – Definição**

Seja a função f(x) definida no intervalo $(-L, L)$ e fora desse intervalo definida como $f(x+2L) = f(x)$, ou seja, $f(x)$ é 2L-periódica. A *série de Fourier* ou a *expansão de Fourier* correspondente a f(x) é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right],$$

sendo que os *coeficientes de Fourier* $a_0, a_n$ e $b_n$ são dados pelas expressões a seguir.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

### 2.3.2 – Coeficientes

Se a série

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

*converge uniformemente* para $f(x)$ em $(-L, L)$, mostre que, para $n = 1,2,3,\ldots$,

1. $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ ;
2. $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ ;
3. $A = \frac{a_0}{2}$ .

1. Multiplicando $f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando de –L a L, obtém-se:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = A\underbrace{\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx}_{\mathrm{I}} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]}_{\mathrm{II}\qquad n=1,2,3,\ldots,m,\ldots}.$$

Considerando $m \neq 0$ em I e $n = m$ em II:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = a_m L\ ;$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \quad \text{ou} \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\ .$$

Para $n = 0$, $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$. (2.3.2.1)

2. Multiplicando $f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ por $\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando de –L a L, obtém-se:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = A\int_{-L}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[a_n\int_{-L}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]}_{I \quad n=1,2,3,\ldots,m,\ldots}.$$

Considerando $n = m$ em I:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = b_m L;$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \quad \text{ou} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

3. Integrando $f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ de –L a L, obtém-se:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = A\int_{-L}^{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right].$$

Para $n = 1,2,3,\ldots$, obtém-se:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2AL;$$

$$A = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \quad . \qquad (2.3.2.2)$$

Comparando (2.3.2.1) e (2.3.2.2), conclui-se que $a_0 L = 2AL \Rightarrow A = \frac{a_0}{2}$.

**Observação**: os resultados encontrados continuam válidos quando os limites de integração **–L** e **L** são substituídos por **c** e **c + 2L**, respectivamente, com $c \in \mathbb{R}$.

**Teorema**

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ são *uniformemente convergentes* em $a \le x \le b$ e se $h(x)$ é *contínua* em $a \le x \le b$, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)+v_n(x)]$, $\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-v_n(x)]$, $\sum_{n=1}^{\infty}[h(x)u_n(x)]$ e $\sum_{n=1}^{\infty}[h(x)v_n(x)]$ são *uniformemente convergentes* em $a \le x \le b$.

**Demonstração**: **KAPLAN**, W. *Cálculo avançado*. Vol. 2. São Paulo: Edgard Blücher, 1972. Página 393.

**Teorema**

Toda série trigonométrica uniformemente convergente é uma série de Fourier. Mais precisamente, se a série

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + b_1\mathrm{sen}(x) + a_2\cos(2x) + b_2\mathrm{sen}(2x) + a_3\cos(3x) + b_3\mathrm{sen}(3x) + \cdots$$

converge uniformemente para $f(x)$ para todo $x$, então $f(x)$ é contínua para todo $x$, $f(x)$ tem período $2\pi$ e a série trigonométrica é a série de Fourier de $f(x)$.

### 2.3.3 – Continuidade seccional ou por partes

Uma função é *seccionalmente contínua* ou *contínua por partes* em um intervalo $\alpha \le t \le \beta$ se este intervalo pode ser subdividido em um número finito de intervalos em cada um dos quais a função é contínua e tem limites, à direita e à esquerda.

**Exemplo**

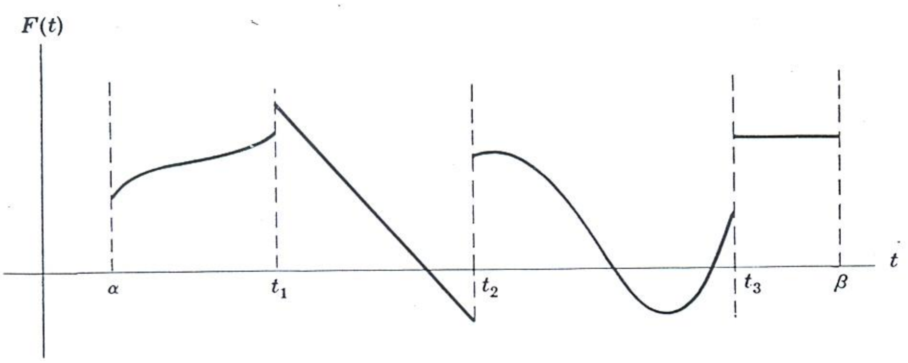



**Figura 2.2**: Função seccionalmente contínua – **[13]**.

### 2.3.4 – Convergência: condições de Dirichlet

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859): matemático alemão.

Seja a função $f(x)$. Se:

**(1)** $f(x)$ é definida em $(-L, L)$, exceto em um número finito de pontos;

**(2)** $f(x)$ é 2L-periódica;

**(3)** $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $(-L, L)$,

então, a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right],$$

com coeficientes de Fourier, converge para:

**(a)** f(x), se x é um ponto de continuidade;

**(b)** $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$, se x é um ponto de descontinuidade.

**<u>Observações</u>**

**1ª)** $f(x_+)$ e $f(x_-)$ representam os limites laterais de f(x), à direita e à esquerda, respectivamente.

$$f(x_+) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h) \quad \text{e} \quad f(x_-) = \lim_{h \to 0^+} f(x-h)$$

**2ª)** As condições **(1)**, **(2)** e **(3)** impostas a f(x) são *suficientes* para a convergência, porém não *necessárias.*

**<u>Demonstração</u>**: **SPIEGEL**, M.R.; **WREDE**, R.C. *Cálculo avançado*. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

**<u>Teorema</u> <u>fundamental</u>**

Seja $f(x)$ uma função definida e *muito lisa por partes* no intervalo $-\pi \le x \le \pi$ e seja $f(x)$ definida fora desse intervalo de tal modo que tenha período $2\pi$. Então a série de Fourier de $f(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em todo intervalo fechado que não contenha descontinuidades de $f(x)$. Em cada descontinuidade $x_0$, a série converge para

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x_0+} f(x) + \lim_{x \to x_0-} f(x)\right].$$

**Demonstração**: **KAPLAN**, W. *Cálculo avançado*. Vol. 2. São Paulo: Edgard Blücher, 1972. Página 461.

**Observação**: uma função contínua por partes é *lisa por partes* se em cada subintervalo tem derivada primeira contínua; é *muito lisa por partes* se em cada subintervalo tem derivada segunda contínua.

**Teorema da unicidade**

Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funções seccionalmente contínuas no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, de modo que ambas tenham os mesmos coeficientes de Fourier. Então, $f_1(x) = f_2(x)$, exceto talvez nos pontos de descontinuidade.

**Demonstração**: **KAPLAN**, W. *Cálculo avançado*. Vol. 2. São Paulo: Edgard Blücher, 1972. Página 456.

### *2.4 – Série de Fourier de uma função periódica dada*

**Exemplo 1**

Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -5 < x < 0 \\ 3, & \text{se } 0 < x < 5 \end{cases}, f(x) = f(x+10).$

a) Construa o gráfico de $f(x)$.

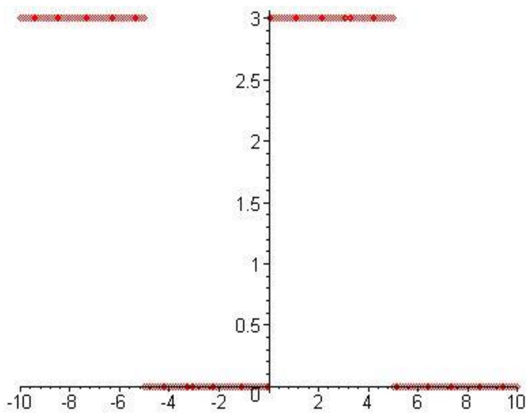



**Figura 2.3**: Gráfico de $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -5 < x < 0 \\ 3, & \text{se } 0 < x < 5 \end{cases}, f(x) = f(x+10).$

b) A função $f(x)$ satisfaz às condições de Dirichlet?

- $f(x)$ é definida em $(-5{,}5)$, exceto em $x=0$ (há um número finito de descontinuidades no intervalo);
- $f(x)$ é periódica de período fundamental $P=10$, isto é, $f(x)=f(x+10)$;
- $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $(-5{,}5)$.

Assim, a série de Fourier converge para $f(x)$ nos pontos de continuidade e para $\frac{3}{2}$ (média dos limites laterais) nos pontos de descontinuidade.

c) Determine a série de Fourier correspondente a $f(x)$.

$$P=2L=10\Rightarrow L=5$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}0dx+\int_{0}^{5}3dx\right]=\frac{3}{5}[x]_0^5=\frac{3}{5}(5-0)=3$$

$$a_0=3$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}0\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx+\int_{0}^{5}3\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx\right]$$

$$a_n=\frac{3}{5}\left[\frac{5}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right]_0^5=\frac{3}{n\pi}[\operatorname{sen}(n\pi)-\operatorname{sen}(0)]=0$$

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}0\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx+\int_{0}^{5}3\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx\right]$$

$$b_n=\frac{3}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right]_0^5=-\frac{3}{n\pi}[\cos(n\pi)-\cos(0)]=\frac{3}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$$

$$b_n=\frac{3}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\frac{3}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}+1\right]$$

$$b_n=\frac{3}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}+1\right]$$

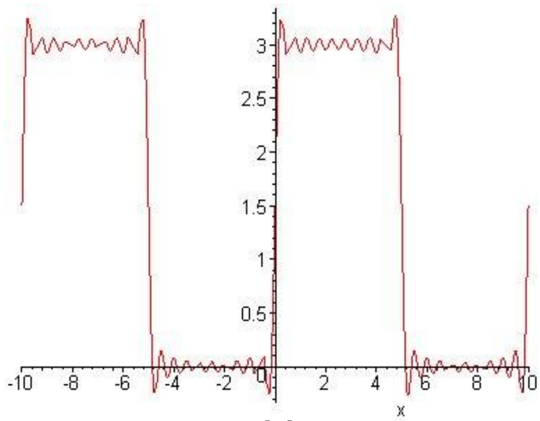
Série de Fourier de $f(x)$:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{5}\right);$$

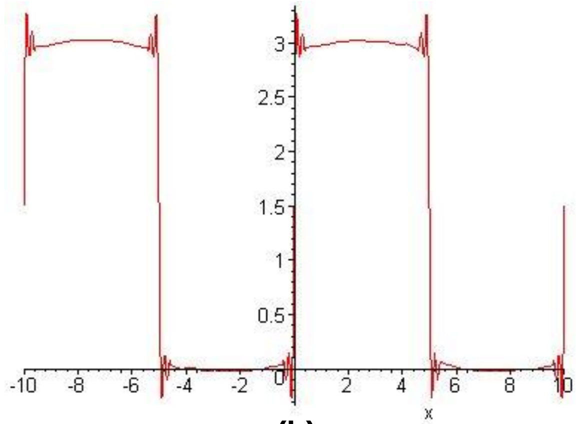
$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{3}{\pi}\left[\frac{2}{1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right)+\frac{2}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{5}\right)+\frac{2}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{5}\right)+\frac{2}{7}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{5}\right)+\ldots\right];$$

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{5}\right)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{5}\right)+\frac{1}{7}\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi x}{5}\right)+\ldots\right];$$

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi x}{5}\right].$$




(a)




(b)

**Figura 2.4**: **(a)** Expansão de $f(x)$ em série de Fourier com $n=19$; **(b)** expansão de $f(x)$ em série de Fourier com $n=49$.

d) Redefina $f(x)$ para que a série de Fourier seja convergente para f(x) no intervalo $-5 \le x \le 5$.

$$f(x)=\begin{cases}3/2, & x=-5\\ 0, & -5<x<0\\ 3/2, & x=0\\ 3, & 0<x<5\\ 3/2, & x=5\end{cases}$$

**Exemplo 2**

Seja $f(x)=x^2,\ 0<x<2\pi$, $f(x)=f(x+2\pi)$.

]

a) Esboce o gráfico de $f(x)$.

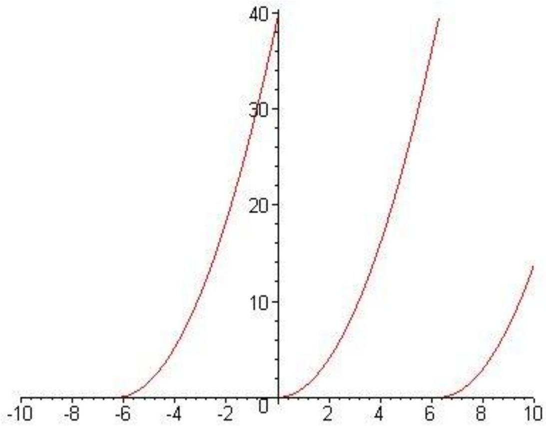



**Figura 2.5**: Gráfico de $f(x)=x^2,\ 0<x<2\pi$ , $f(x)=f(x+2\pi)$.

b) Expanda $f(x)$ em uma série de Fourier.

$P=2L=2\pi \Rightarrow L=\pi$

A função $f(x)$ está definida em $(0,2L)$, e não em $(-L,L)$.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3\pi}\left(8\pi^3 - 0\right) = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)dx \qquad (2.4.1)$$

Usando integração por partes, tem-se que:

$$\int udv = uv - \int vdu\ ;$$

$$u = x^2,\ du = 2xdx,\ dv = \cos(nx)dx,\ \ v = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n};$$

$$\int x^2\cos(nx)dx = \frac{x^2\operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{2}{n}\int x\operatorname{sen}(nx)dx\ ;$$

$$u = x,\ du = dx,\ dv = \operatorname{sen}(nx)dx,\ \ v = -\frac{\cos(nx)}{n};$$

$$\int x^2\cos(nx)dx = \frac{x^2\operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{2}{n}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}\int\cos(nx)dx\right];$$

$$\int x^2\cos(nx)dx = \frac{x^2\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2\operatorname{sen}(nx)}{n^3} + C\,.$$

Voltando a (2.4.1), obtém-se:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 sen(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2sen(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{4\pi}{n^2} - 0\right] = \frac{4}{n^2};$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 sen(nx)dx \qquad (2.4.2)$$

Usando integração por partes, tem-se que:

$$u = x^2,\ du = 2xdx,\ dv = sen(nx)dx,\ \ v = -\frac{\cos(nx)}{n};$$

$$\int x^2 sen(nx)dx = -\frac{x^2\cos(nx)}{n} + \frac{2}{n}\int x\cos(nx)dx;$$

$$u = x,\ du = dx,\ dv = \cos(nx)dx,\ \ v = \frac{sen(nx)}{n};$$

$$\int x^2 sen(nx)dx = -\frac{x^2\cos(nx)}{n} + \frac{2}{n}\left[\frac{x\, sen(nx)}{n} - \frac{1}{n}\int sen(nx)dx\right];$$

$$\int x^2 sen(nx)dx = -\frac{x^2\cos(nx)}{n} + \frac{2x\, sen(nx)}{n^2} + \frac{2\cos(nx)}{n^3} + C.$$

Voltando a (2.4.2), obtém-se:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 sen(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos(nx)}{n} + \frac{2x\, sen(nx)}{n^2} + \frac{2\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right] = -\frac{4\pi}{n};$$

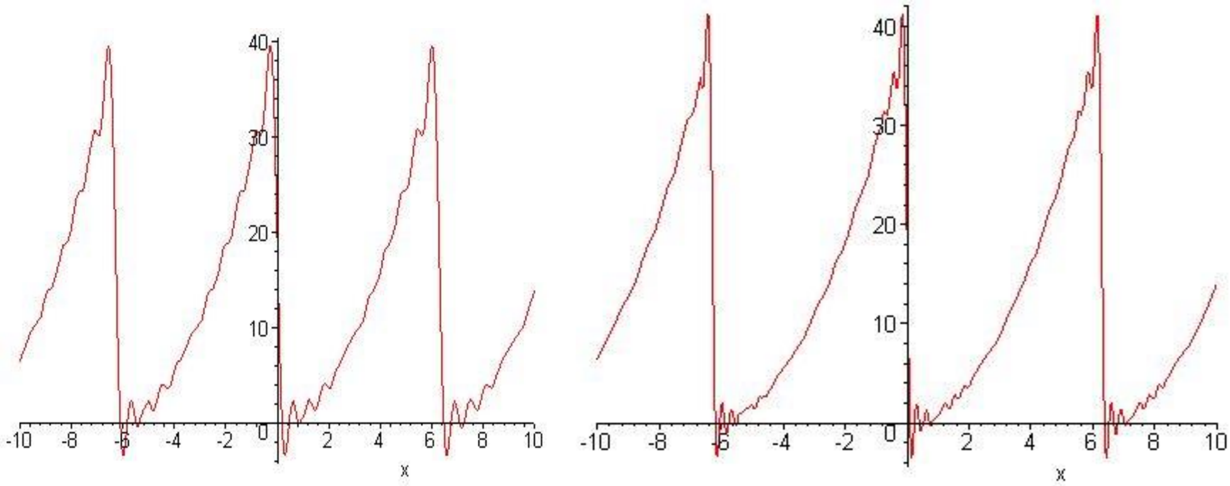
$$b_n = -\frac{4\pi}{n}.$$

Série de Fourier de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi sen(nx)}{n}\right]. \qquad (2.4.3)$$

Em $x = 0$, (2.4.3) converge para a média dos limites laterais, ou seja,

$$\frac{4\pi^2+0}{2}=2\pi^2.$$




(a) (b)

**Figura 2.6**: **(a)** Expansão de $f(x)$ em série de Fourier com $n=10$; **(b)** expansão de $f(x)$ em série de Fourier com $n=20$.

c) Usando a série de Fourier de f(x), prove que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$.

Considerando $x=0$ em (3), tem-se que:

$$2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\pi^2-\frac{4\pi^2}{3}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**Observações**

1ª) *Comando do winplot para uma função definida por várias sentenças*

**joinx( )**

**Exemplo**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<1 \\ -x+4, & 1\le x\le 3 \\ \dfrac{1}{x}, & x>3 \end{cases}$$

joinx$\left(x^2+2\,|\,1,-x+4\,|\,3,\dfrac{1}{x}\right)$

2ª) *Comando do winplot para uma soma*

**sum(f(n,x),n,a,b)**: soma de $f(n,x)$ de $n=a$ até $n=b$

**Exemplo**

$$f(x)=\frac{4}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(2nx)$$

(4/pi)+sum((1/n)*sin(2*n*x),n,1,100)

**Exercícios**

01. Seja $f(x)=x+\pi$ , $-\pi<x<\pi$, uma função $2\pi$ -periódica.

a) Verifique se $f(x)$ satisfaz às condições de Dirichlet.

b) Expanda $f(x)$ em uma série de Fourier.

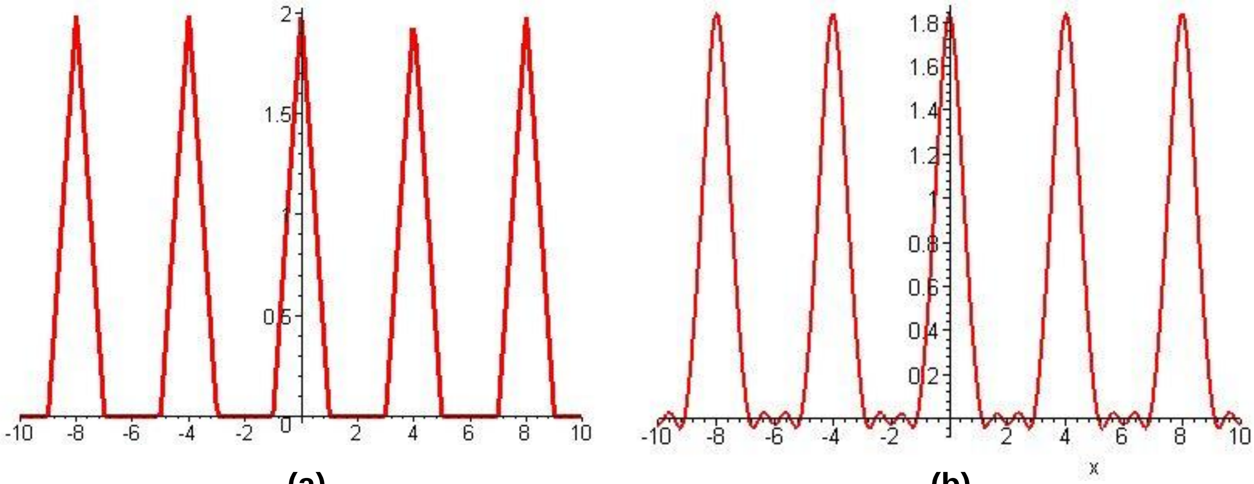
Resposta: $f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$.

c) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}$.

d) Como $f(x)$ deveria ser definida em $x=-\pi$ e $x=\pi$ para que a série de Fourier convergisse para $f(x)$ em $-\pi\le x\le\pi$?

e) Plote simultaneamente o gráfico de $f(x)$ e da série de Fourier que converge para ela.

02. Calcule a série de Fourier do sinal periódico representado no gráfico **(a)** da Figura 2.7.




**(a)** **(b)**

**Figura 2.7**: **(a)** Sinal; **(b)** Série de Fourier do sinal com $n = 5$.

Resposta: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi\, x}{2}\right)$.

03. Seja o sinal representado no gráfico abaixo.

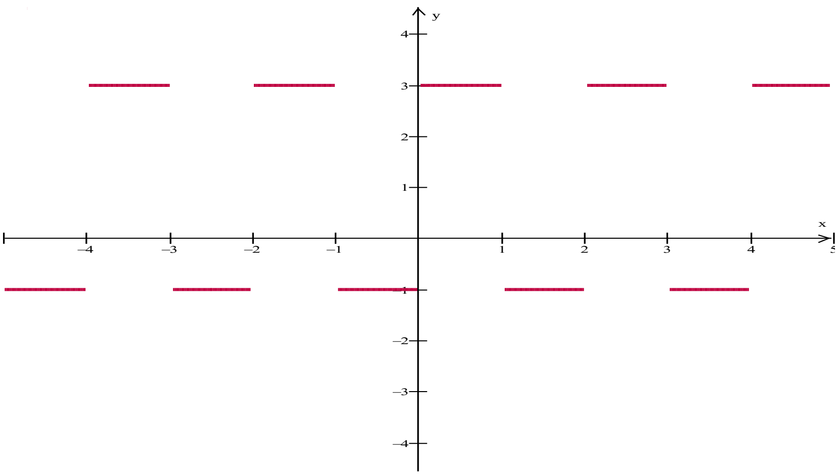



**Figura 2.8**: Sinal.

a) Determine a série de Fourier correspondente ao sinal.

Resposta: $f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}(n\pi x)$.

b) Para quanto converge a série de Fourier do sinal em $x = 1$? E em $x = 2$?

Resposta: $1$.

c) Use a série de Fourier determinada em (a) para calcular para quanto converge a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Resposta: $\frac{\pi^2}{6}$.

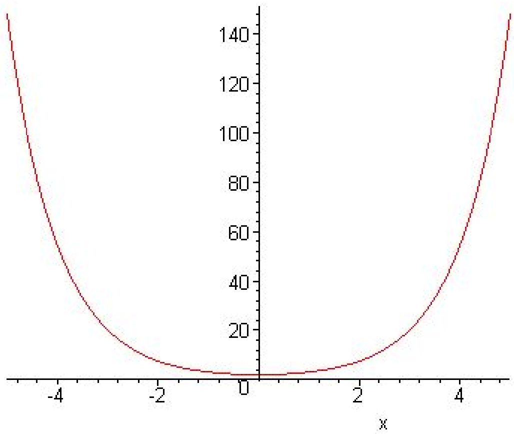
d) Plote simultaneamente os gráficos de $f(x)$ e da série de Fourier de $f(x)$.

### *2.5 – Funções pares e funções ímpares*

Uma função f(x) é *par* se

$$f(-x) = f(x).$$

Assim, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^6 - 4x^2 + 5$, $f_3(x) = \cos(x)$ e $f_4(x) = e^x + e^{-x}$ são funções pares. O gráfico de uma função para é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, como ilustra a Figura 2.9.




**<u>Figura 2.9</u>**: Gráfico da função $f(x) = e^x + e^{-x}$, $x \in [-5,5]$.

Uma função f(x) é ím*par* se

$$f(-x) = -f(x).$$

Assim, $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$, $f_3(x) = \text{sen}(x)$ e $f_4(x) = \text{tg}(3x)$ são funções ímpares. O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem, como ilustra a Figura 2.10.

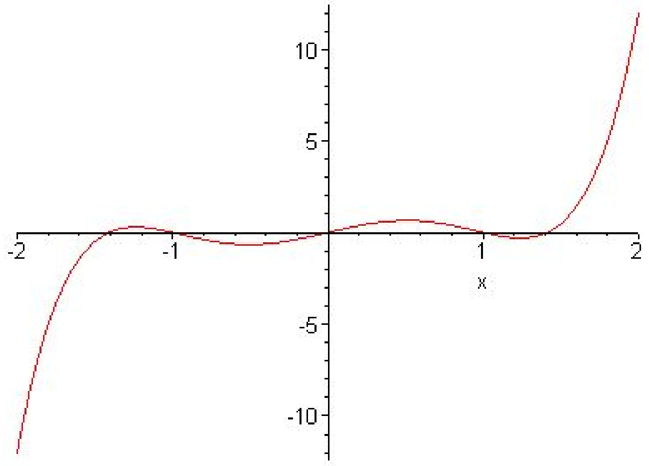



**Figura 2.10**: Gráfico da função $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$, $x \in [-2,2]$.

**Teorema – Propriedades das funções pares e ímpares**

(a) O produto de duas funções pares é par.

(b) O produto de duas funções ímpares é par.

(c) O produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar.

(d) A soma (ou diferença) de duas funções pares é par.

(e) A soma (ou diferença) de duas funções ímpares é ímpar.

(f) Se $f(x)$ é uma função par, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

(g) Se $f(x)$ é uma função ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

**Demonstração**

Seja $F(x) = f(x)g(x)$.

(a) As funções $f(x)$ e $g(x)$ são pares.

$$
\begin{aligned}
& f(-x) = f(x),\ g(-x) = g(x) \\
& F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = F(x) \\
& \therefore F(x) \text{ é par}
\end{aligned}
$$

b) As funções $f(x)$ e $g(x)$ são ímpares.

$$
\begin{aligned}
& f(-x) = -f(x),\ g(-x) = -g(x) \\
& F(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)[-g(x)] = f(x)g(x) = F(x) \\
& \therefore F(x) \text{ é par}
\end{aligned}
$$

(c) A função $f(x)$ é par e a função $g(x)$ é ímpar.

$$f(-x)=f(x),\ g(-x)=-g(x)$$
$$F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-F(x)$$
$$\therefore F(x)\ \text{é ímpar}$$

Seja $F(x)=f(x)\pm g(x)$.

(d) As funções $f(x)$ e $g(x)$ são pares.

$$f(-x)=f(x),\ g(-x)=g(x)$$
$$F(-x)=f(-x)\pm g(-x)=f(x)\pm g(x)=F(x)$$
$$\therefore F(x)\ \text{é par}$$

(e) As funções $f(x)$ e $g(x)$ são ímpares.

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$$
$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-[f(x)+g(x)]=-F(x)$$
$$\therefore F(x)\ \text{é ímpar}$$
$$F(-x)=f(-x)-g(-x)=-f(x)+g(x)=-[f(x)-g(x)]=-F(x)$$
$$\therefore F(x)\ \text{é ímpar}$$

(f) $f(x)$ é par $\Rightarrow f(-x)=f(x)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(-x)dx=\int_{0}^{a} f(-x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(g) $f(x)$ é ímpar $\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(-x)dx=\int_{0}^{a} f(-x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

**<u>Exemplo</u>**

$$f(x)=x^5\cos(2x)\text{sen}(3x),\quad x\in\,]-\infty,\infty[$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5\cos(-2x)\mathrm{sen}(-3x) \\ &= -x^5\cos(2x)[-\mathrm{sen}(3x)] \\ &= x^5\cos(2x)\mathrm{sen}(3x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ é função par

**Exercícios**

Verifique a paridade das seguintes funções:

01. $f(x) = \mathrm{sen}(x)\cos(4x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
02. $f(x) = \cos(2x)\cos(5x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
03. $f(x) = \mathrm{sen}(3x)\mathrm{sen}(x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
04. $f(x) = \mathrm{sen}(5x)\cos(x)\mathrm{sen}(2x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
05. $f(x) = x^4\mathrm{sen}(2x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
06. $f(x) = x^2\cos(3x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
07. $f(x) = x^7\cos(x)\mathrm{sen}(4x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
08. $f(x) = (x+2)\cos(2x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
09. $f(x) = e^x\mathrm{sen}(x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
10. $f(x) = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos(3x)\mathrm{sen}(x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
11. $f(x) = x + e^x$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$;
12. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left]0, \infty\right[$;
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(e^x + e^{-x}\right)\mathrm{sen}(10x)\cos(8x)$, $x \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left]0, \infty\right[$;
14. $f(x) = \left(e^x - e^{-x}\right)\cos(x)\mathrm{sen}(3x)$, $x \in \left]-\infty, \infty\right[$.

### *2.6 – Série de Fourier de cossenos*

A função $f(x)$ é *par* em $(-L, L)$.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{função par}} dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad .$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{função ímpar}} dx = 0$$

*Série de Fourier de cossenos*: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

**Exemplo**

Expanda $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } -2 < x < 0 \\ x, \text{ se } \ 0 < x < 2 \end{cases}$, $f(x) = f(x+4)$ em uma série de Fourier de cossenos. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ e calcule para quanto converge a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.

Resposta: $f(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$, $\frac{\pi^2}{24}$.

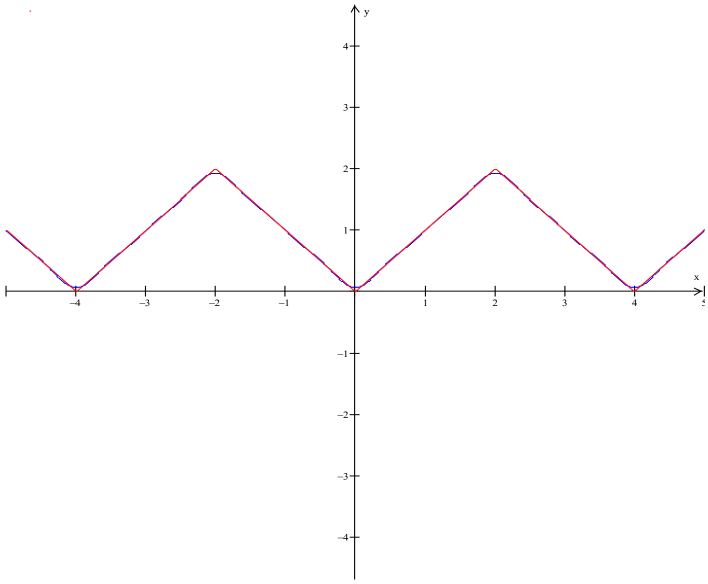



**Figura 2.11**: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } -2 < x < 0 \\ x, \text{ se } \ 0 < x < 2 \end{cases}$, $-2 < x < 2$, $f(x) = f(x+4)$, expandida em série de Fourier de cossenos com $n = 5$ (azul) e $n = 100$ (vermelho).

### *2.7 – Série de Fourier de senos*

A função $f(x)$ é *ímpar* em $(-L, L)$.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{função ímpar}}dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{função par}}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

*Série de Fourier de senos*: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

**Exemplo**

Expanda $f(x) = x$, $-2 < x < 2$, $f(x) = f(x+4)$, em uma série de Fourier de senos.

Resposta: $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

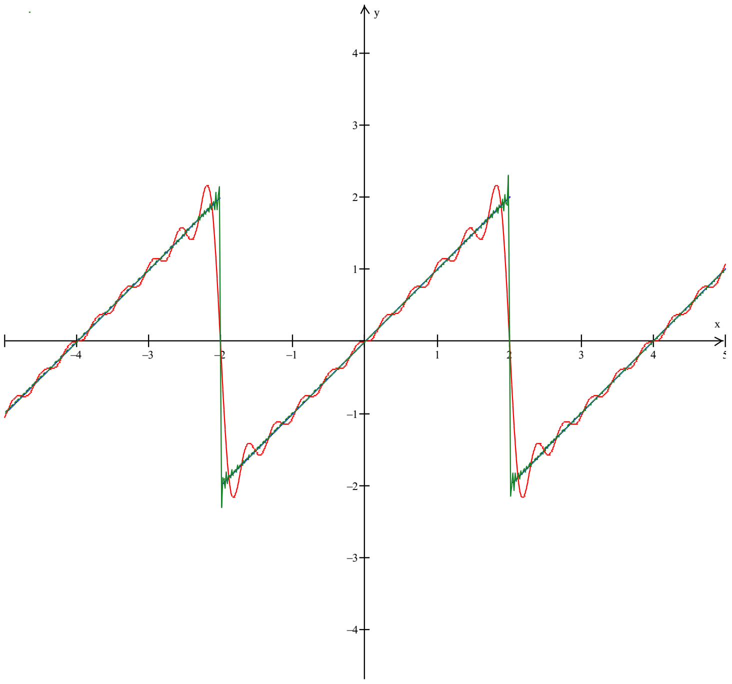



**Figura 2.12**: Gráfico da função $f(x) = x$, $-2 < x < 2$, $f(x) = f(x+4)$, expandida em série de Fourier de senos com $n = 10$ (vermelho) e $n = 100$ (verde).

**Exercícios**

01. Seja $f(x) = 2x$, $-3 \leq x < 3$, $f(x) = f(x+6)$.

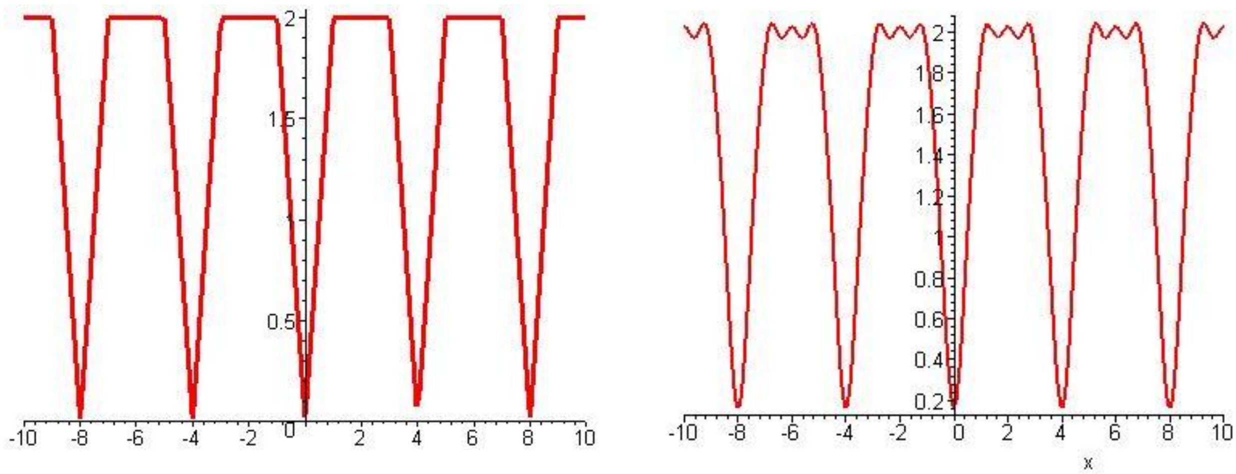
a) Desenvolva f(x) em uma série de Fourier.

Resposta: $f(x) = \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$.

b) Determine para quanto converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Resposta: $\pi/4$.

02. Calcule a série de Fourier do sinal periódico representado no gráfico **(a)** da Figura 2.13.

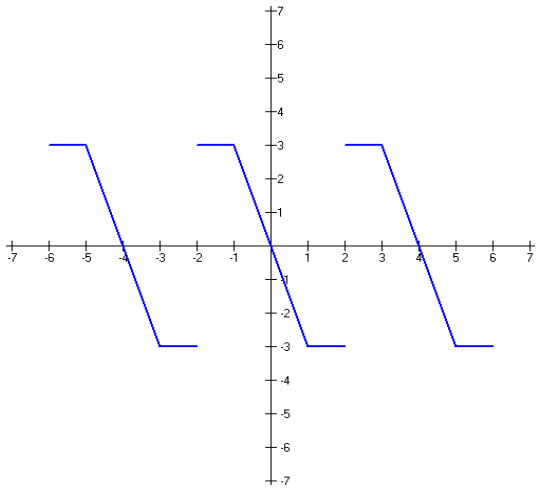



**(a)** **(b)**

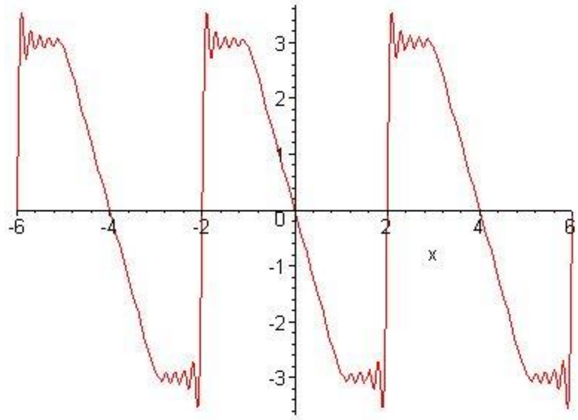
**Figura 2.13**: **(a)** Sinal; **(b)** Série de Fourier do sinal com cinco harmônicos.

Resposta: $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

03. Calcule a série de Fourier do sinal periódico representado no gráfico **(a)** da Figura 2.14.



(a)



(b)

**Figura 2.14**: **(a)** Sinal; **(b)** Série de Fourier do sinal com vinte harmônicos.

Resposta: $f(x) = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n - \dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right)$.

04. Seja $f(x) = \begin{cases} 4, & -4 < x \leq -2 \\ -3x - 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 3x - 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$, $f(x) = f(x+8)$. Determine a série de Fourier de $f(x)$.

Resposta: $f(x) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{24}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) - 1}{n^2} \cos\left(\dfrac{n\pi x}{4}\right)$.

05. Seja $f(x) = x \operatorname{sen}(2x)$, $-\pi < x < \pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, representada graficamente na Figura 2.15.

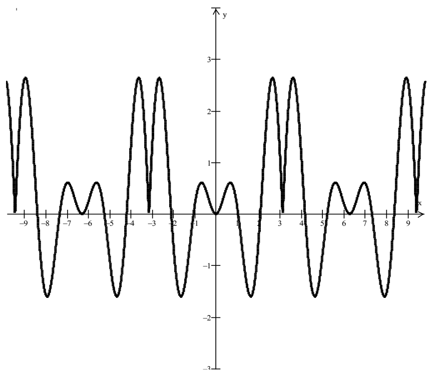


**Figura 2.15**: Gráfico de $f(x) = x \operatorname{sen}(2x)$, $-\pi < x < \pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$.

a) Determine a série de Fourier de $f(x)$.

Resposta: $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x) - 4\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-4}\cos(nx)$.

b) Empregando (a), calcule para quanto converge a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+4)} = \frac{1}{1.5} - \frac{1}{2.6} + \frac{1}{3.7} - \frac{1}{4.8} + \frac{1}{5.9} - \frac{1}{6.10} + \ldots.$$

Resposta: $\frac{7}{48}$.

06. Seja $f: R \to R \,/\, f(x) = x\cos(3x),\ -\pi < x < \pi,\ f(x+2\pi) = f(x)$.

a) Calcule a série de Fourier de $f(x)$.

Resposta: $f(x) = \frac{1}{4}\text{sen}(x) - \frac{4}{5}\text{sen}(2x) - \frac{1}{6}\text{sen}(3x) + 2\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(n-3)(n+3)}\text{sen}(nx)$.

b) Determine para quanto converge a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{n(n+3)} = \frac{5}{1.4} - \frac{7}{2.5} + \frac{9}{3.6} - \frac{11}{4.7} + \frac{13}{5.8} - \frac{15}{6.9} + \ldots.$$

Resposta: $\frac{5}{6}$.

### *2.8 – O fenômeno de Gibbs*

Josiah Willard Gibbs (1839-1903): matemático e físico teórico norte americano. Principais contribuições: análise vetorial e mecânica estatística.

O fenômeno de Gibbs descreve a maneira peculiar como a série de Fourier truncada de uma função $f(x)$ periódica e seccionalmente contínua se comporta nas vizinhanças de uma descontinuidade dessa função. A n-ésima soma parcial da série de Fourier apresenta oscilações de maior amplitude nas proximidades de uma descontinuidade do tipo salto finito. A amplitude dessas oscilações não diminui com o aumento do número de harmônicos, porém tende a um limite. Há uma estimativa para a amplitude das oscilações nas proximidades de uma descontinuidade $x_0$ dada por

$$0{,}09\left[f\left(x_{0+}\right)-f\left(x_{0-}\right)\right].$$

A Figura 2.16 ilustra o fenômeno de Gibbs para a onda quadrada.

*Onda quadrada*: $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$, $f(x+2)=f(x)$.

*Série de Fourier da onda quadrada*: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{n}\operatorname{sen}(n\pi x)$.

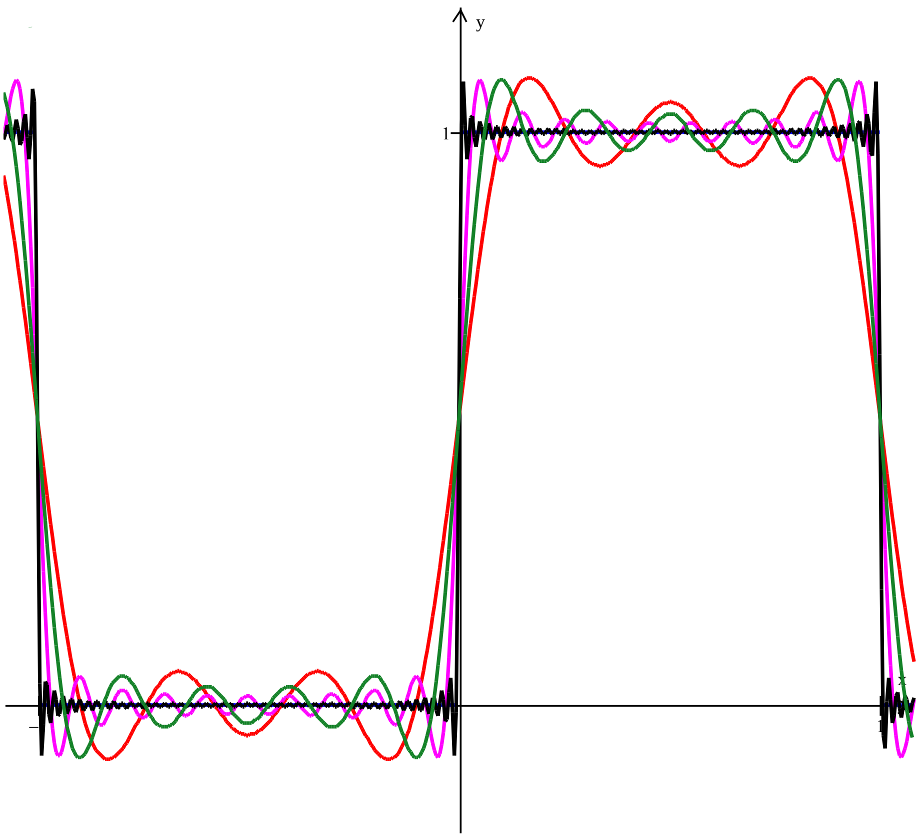



**Figura 2.16**: Série de Fourier da onda quadrada $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$, $f(x+2)=f(x)$, com $n=5$ (vermelho), $n=10$ (verde), $n=20$ (rosa) e $n=100$ (preto).

**Exercício**

Pesquise a respeito dos seguintes aspectos do fenômeno de Gibbs:

a) amplitude das oscilações;

b) como minimizar os efeitos do fenômeno de Gibbs;

c) consequências do fenômeno de Gibbs associadas principalmente à compactação de imagens e de áudio;

d) semelhança entre os fenômenos de Gibbs e de Runge (interpolação polinomial).

### *2.9 – A identidade de Parseval para séries de Fourier*

Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836): matemático francês.

Se $a_n$ e $b_n$ são os coeficientes de Fourier correspondentes a $f(x)$, e se $f(x)$ satisfaz as condições de Dirichlet, então

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

**<u>Demonstração</u>**

Assume-se que a série de Fourier correspondente a $f(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $(-L, L)$.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad \Rightarrow \quad \int_{-L}^{L} f(x)dx = a_0 L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \Rightarrow \quad \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = a_n L$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \Rightarrow \quad \int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = b_n L$$

Dessa forma, multiplica-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

por $f(x)$ e integra-se termo a termo de –L a L.

$$\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx+b_n\int_{-L}^{L}f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0}{2}a_0L+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_nL+b_nb_nL)$$

$$\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx=L\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

**Aplicações**

- Convergência de séries numéricas.
- Verificar se uma série trigonométrica é a série de Fourier de uma função f(x).

**Exercício**

Seja $f(x)=\begin{cases}-x,\ \text{se}\ -2<x<0\\ x,\ \text{se}\ \ 0<x<2\end{cases}$ , $f(x)=f(x+4)$, e sua respectiva Série de Fourier $f(x)=1+\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$. Determine a identidade de Parseval correspondente à série de Fourier de f(x).

Resposta: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$. (2.9.1)

### *2.10 – Convergência de séries numéricas através da série de Fourier*

**Exemplo**

Empregando a identidade (2.9.1), mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{1440}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\left(1-\frac{1}{16}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{15(6)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \tag{2.10.1}$$

Empregando (2.9.1) e (2.10.1), mostra-se que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{1440}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^4}{96}=\frac{16\pi^4-15\pi^4}{1440}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{1440}$$

### *2.11 – Derivação e integração da série de Fourier*

**Teorema**

Se $\{u_n(x)\}$, $n = 1,2,3,\ldots$, forem contínuas em $[a, b]$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergir uniformemente para a soma $S(x)$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_a^b u_n(x)dx\right\} \text{ ou } \int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_a^b u_n(x)dx\right\}.$$

Assim, uma série uniformemente convergente de funções contínuas pode ser integrada termo a termo.

**Teorema**

Se $\{u_n(x)\}$, $n = 1,2,3,\ldots$, forem contínuas e tiverem derivadas contínuas em $[a, b]$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergir para $S(x)$ enquanto $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x)$ é uniformemente convergente em $[a, b]$, então em $[a, b]$

$$S^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x) \text{ ou } \frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x).$$

Dessa forma, a série pode ser derivada termo a termo.

**Observação**: os teoremas oferecem condições suficientes, porém não necessárias.

**Teorema**

A série de Fourier correspondente a f(x) pode ser integrada termo a termo de *a* a *x*, e a série resultante convergirá uniformemente para $\int_a^x f(u)du$ desde que f(x) seja seccionalmente contínua em $-L \le x \le L$ e ambos, *a* e *x*, pertençam a esse intervalo.

**Exemplo**

Seja $f(x) = x,\ -2 < x < 2$.

a) Obtenha uma série de Fourier para $f(x)=x^2,\ 0<x<2$, integrando a série de Fourier $f(x)=x=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

b) Use a série obtida anteriormente para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

a) $f(x)=x=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

$$f(x)=x=\frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3}\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\frac{1}{4}\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi x}{2}\right)+\cdots\right]$$

$$f(u)=u=\frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi u}{2}\right)+\frac{1}{3}\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi u}{2}\right)-\frac{1}{4}\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi u}{2}\right)+\cdots\right]$$

Integrando-se a igualdade anterior de 0 a x.

$$\int_0^x u\,du=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^x\mathrm{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)du-\frac{1}{2}\int_0^x\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi u}{2}\right)du+\frac{1}{3}\int_0^x\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi u}{2}\right)du-\frac{1}{4}\int_0^x\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi u}{2}\right)du+\cdots\right]$$

$$\frac{x^2}{2}=\frac{4}{\pi}\left[\underbrace{-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+C_1+\frac{2}{2^2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+C_2-\frac{2}{3^2\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+C_3+\frac{2}{4^2\pi}\cos\left(\frac{4\pi x}{2}\right)+C_4+\cdots}_{(1)}\right]$$

$$\frac{x^2}{2}=C'+\frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{2}{2^2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right)-\frac{2}{3^2\pi}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+\frac{2}{4^2\pi}\cos\left(\frac{4\pi x}{2}\right)+\cdots\right]$$

$$\frac{x^2}{2}=C'-\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\frac{1}{4^2}\cos\left(\frac{4\pi x}{2}\right)+\cdots\right]$$

$$x^2=C-\frac{16}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\frac{1}{4^2}\cos\left(\frac{4\pi x}{2}\right)+\cdots\right]$$

Em (1), se a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}C_i=C_1+C_2+\ldots<\infty$ for conhecida, podemos usá-la para determinar $a_0$.

$$C=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{L}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

$$x^2=\frac{4}{3}-\frac{16}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\frac{1}{4^2}\cos\left(\frac{4\pi x}{2}\right)+\cdots\right]$$

$$f(x)=x^2=\frac{4}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \qquad (2.11.1)$$

b) Considerando-se $x=0$ em (2.11.1).

$$x^2=\frac{4}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$0=\frac{4}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$-\frac{4}{3}=-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

### *2.12 – A forma exponencial (ou complexa) da série de Fourier*

a) Mostrar que $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ pode ser escrita na forma complexa $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$.

b) Mostrar que os coeficientes de Fourier $a_0, a_n$ e $b_n$ podem ser escritos como uma única integral $c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$.

a) Recordando as identidades de Euler

Leonhard Euler (1707-1783): matemático suíço.

$$e^{\pm i\theta}=\cos(\theta)\pm i\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Seja $f(x)=[\cos(x)+i\,\mathrm{sen}(x)]e^{-i\,x}$. (2.12.1)

$$\frac{d}{dx}f(x)=[i\cos(x)-\mathrm{sen}(x)]e^{-i\,x}+[\cos(x)+i\,\mathrm{sen}(x)](-i)e^{-i\,x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x)=[i\cos(x)-\mathrm{sen}(x)-i\cos(x)+\mathrm{sen}(x)]e^{-i\,x}=0\Rightarrow f(x)\text{ é constante}$$

$$f(0)=[\cos(0)+i\,\mathrm{sen}(0)]e^{-i(0)}=1$$

$$f(x)=1$$

Voltando-se a (2.12.1):

$$1=[\cos(x)+i\,\mathrm{sen}(x)]e^{-i\,x}\Rightarrow\cos(x)+i\,\mathrm{sen}(x)=e^{i\,x}.$$

Assim:

$$e^{i\frac{n\pi\,x}{L}}=\cos\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right);$$

$$e^{-i\frac{n\pi\,x}{L}}=\cos\left(-\frac{n\pi\,x}{L}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{n\pi\,x}{L}\right)=\cos\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right).$$

As igualdades anteriores conduzem a:

$$\cos\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right)=\frac{e^{i\frac{n\pi\,x}{L}}+e^{-i\frac{n\pi\,x}{L}}}{2};$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right)=\frac{e^{i\frac{n\pi\,x}{L}}-e^{-i\frac{n\pi\,x}{L}}}{2i}.$$

Substituindo as igualdades acima na série de Fourier de $f(x)$, prova-se o item a.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}}+e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}+b_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}}-e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}\right)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)e^{i\frac{n\pi x}{L}}+\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right]$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{ia_n+b_n}{2i}\right)e^{i\frac{n\pi x}{L}}+\left(\frac{ia_n-b_n}{2i}\right)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right]$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi x}{L}}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\right]$$

Considerando $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$ e $c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$, tem-se que:

$a_n=c_n+c_{-n}$; $\quad b_n=i(c_n-c_{-n})$;

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}};$$

$$n=0\Rightarrow c_0=\frac{a_0}{2}.$$

**Exercício**

Mostre que $\displaystyle\int_{-L}^{L}e^{i\frac{(n-m)\pi x}{L}}dx=\begin{cases}0, & \text{se } m\neq n\\ 2L, & \text{se } m=n\end{cases}$.

b) Multiplica-se $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$ por $e^{-i\frac{m\pi x}{L}}$, integra-se de –L a L e considera-se $n=m$.

$$\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n\int_{-L}^{L}e^{i\frac{n\pi x}{L}}e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx\right)$$

$$\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{m\pi x}{L}}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n\int_{-L}^{L}e^{i\frac{(n-m)\pi x}{L}}dx\right)$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx = c_n 2L$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

Pode-se mostrar o mesmo usando-se a definição de $c_n$.

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \Rightarrow 2c_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \Rightarrow 2c_0 = a_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{2}$$

**Exemplo**

$$f(x) = x,\ -2 < x < 2,\ P = 4 \Rightarrow L = 2$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} xe^{-i\frac{n\pi x}{2}}dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]dx \qquad (2.12.2)$$

$$c_n = -\frac{i}{4}\int_{-2}^{2} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{i}{2}\int_{0}^{2} x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

Integrando-se por partes, tem-se que:

$$c_n = -\frac{i}{2}\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = -\frac{i}{2}\left[-\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi)\right];$$

$$c_n = \frac{2i}{n\pi}(-1)^n,\ n \neq 0;$$

$n = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ (substitua n por 0 em (2.12.2));

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \ ;$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2i}{n\pi}(-1)^n e^{i\frac{n\pi x}{2}} = \frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{i\frac{n\pi x}{2}} \ .$$

Verificando a equivalência entre as formas exponencial e usual:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left[i\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right].$$

Para n opostos, $\frac{(-1)^n}{n} i\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ se anula e $\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ duplica. Assim:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right);$$

$$c_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x\,dx=0\,.$$

**Exercícios**

01. Determine a série de Fourier na forma exponencial de $f(x)=e^{-x}$, $-\pi<x<\pi$, $f(x)=f(x+2\pi)$.

Resposta: $f(x)=\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} e^{inx}$ .

02. Seja $f(x)=\begin{cases} 10, & -5<x<0 \\ -10, & 0<x<5 \end{cases}$, $f(x)=f(x+10)$. Expanda $f(x)$ em série de Fourier na forma exponencial.

Resposta: $f(x)=\frac{10i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} e^{i\frac{n\pi x}{5}}$, $n=0 \Rightarrow c_0=0$ ou $f(x)=\frac{20i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{(2n-1)\pi x}{5}}}{2n-1}$ .

03. Seja $f(x)=2x,\ -\pi<x<\pi,\ f(x+2\pi)=f(x)$.

a) Expanda $f(x)$ em série de Fourier na *forma exponencial*. Para quanto converge a série em $x = \pm\pi$?

Resposta: $f(x) = 2i\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}, n = 0 \Rightarrow c_0 = 0$.

Em $x = \pm\pi$, a série de Fourier converge para a média dos limites laterais, ou seja, zero.

b) Use a série determinada no item a para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Resposta: $\frac{\pi^2}{6}$.

***2.13 – Aplicações da série de Fourier na solução de equações diferenciais parciais***

A série de Fourier surge na solução de equações diferenciais parciais, tais como a equação do calor, a equação da onda e a equação de Laplace.

**2.13.1 – Equações diferenciais**

Uma equação diferencial é uma igualdade que relaciona uma função e suas derivadas (ou apenas as derivadas dessa função).

Uma *equação diferencial ordinária* (EDO) é uma igualdade envolvendo as derivadas de uma função de uma única variável independente.

**Exemplos**

(1) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 0, \quad t > 0$

(2) $u''(x) - 4u(x) = 3\cos(2\pi x), \quad x > 0$

Uma *equação diferencial parcial* (EDP) é uma igualdade envolvendo as derivadas de uma função de duas ou mais variáveis independentes.

**Exemplos**

(3) $u_t(x,t) = 2u_{xx}(x,t),\ 0 < x < 2,\ t > 0$

(4) $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 2xy,\ \ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$

(5) $u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = \Gamma\, u_{xx}(x,t),\ 1 < x < 5,\ t > 0$

A ordem de uma equação diferencial é dada pela derivada (simples ou parcial) de maior ordem que ocorre na equação.

Uma equação diferencial é dita linear quando depende linearmente da função (variável dependente) envolvida e seus coeficientes independem dessa função.

Uma equação diferencial é dita homogênea quando o termo que independe da função incógnita e de suas derivadas é identicamente nulo.

Assim, nos exemplos dados anteriormente, tem-se em:

(1) uma EDO linear de 1ª ordem homogênea;

(2) uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea;

(3) uma EDP linear de 2ª ordem homogênea;

(4) uma EDP linear de 2ª ordem não homogênea (equação de Poisson);

(5) uma EDP não linear de 2ª ordem não homogênea (equação de Burger).

Na solução de equações diferenciais parciais pode-se ter dois tipos de informações suplementares necessárias à unicidade de solução: condições iniciais e condições de contorno (domínios limitados). Dessa forma, tem-se problemas de valor inicial, problemas de contorno ou problemas mistos (ambos).

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem da forma

$$A\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial^2 x} + B\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial^2 y} + D\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} + E\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} + F\phi(x,y) = G$$

é dita *elíptica* se $B^2 - 4AC < 0$, *parabólica* se $B^2 - 4AC = 0$ e *hiperbólica* se $B^2 - 4AC > 0$.

**2.13.2 – Equação do calor**

$u_t(x,t) = \kappa\, u_{xx}(x,t)$ (equação diferencial parcial parabólica)

A formulação matemática da equação do calor pode ser encontrada em **FIGUEIREDO**, D.G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, página 1.

Obter uma solução $u(x,t)$ para o problema misto abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, 0 < x < 2 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 2 \\ |u(x,t)| < M \ \text{(solução limitada)} \end{cases}$$

Solução: $u(x,t) = X(x)T(t)$ (*separação de variáveis*) . (2.13.2.1)

Substituindo (2.13.2.1) na equação diferencial parcial, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(XT) = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT);$$

$$X\frac{dT}{dt} = 3T\frac{d^2X}{dx^2};$$

$$\frac{1}{3T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = c = -\lambda^2. \tag{2.13.2.2}$$

Pode-se mostrar que uma constante $c \geq 0$ em (2.13.2.2) não satisfaz as condições de contorno.

Assim:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} + 3\lambda^2 T = 0 \\ \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \end{cases}. \tag{2.13.2.3}$$

A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (2.13.2.3) é:

$$\begin{aligned} T &= Ce^{-3\lambda^2 t} \\ X &= A_1\cos(\lambda x) + B_1\mathrm{sen}(\lambda x) \end{aligned}. \tag{2.13.2.4}$$

Substituindo (2.13.2.4) em (2.13.2.1), encontra-se

$$u(x,t) = e^{-3\lambda^2 t}[A\cos(\lambda x) + B\mathrm{sen}(\lambda x)], \ A \text{ e } B \text{ constantes}. \tag{2.13.2.5}$$

Precisa-se agora determinar A e B de tal maneira que (2.13.2.5) satisfaça as condições de contorno.

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow e^{-3\lambda^2 t}A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow u(x,t) = Be^{-3\lambda^2 t}\mathrm{sen}(\lambda x) \tag{2.13.2.6}$$

$$u(2,t) = 0 \Rightarrow Be^{-3\lambda^2 t}\mathrm{sen}(2\lambda) = 0 \tag{2.13.2.7}$$

Como $B = 0$ satisfaz (2.13.2.7) (não interessa a solução trivial), evita-se essa escolha ($u(x,t) = 0$). Considere-se então

$$\operatorname{sen}(2\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2}, n \in Z. \qquad (2.13.2.8)$$

Substituindo-se (2.13.2.8) em (2.13.2.6):

$$u(x,t) = B_n e^{-\frac{3n^2\pi^2 t}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right). \qquad (2.13.2.9)$$

Em (2.13.2.9), substitui-se B por $B_n$, indicando que constantes diferentes podem ser usadas para diferentes valores de n.

Lembrando que somas de soluções da forma (2.13.2.9) são também soluções (*princípio da superposição*), pode-se escrever (2.13.2.9) como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{3n^2\pi^2 t}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right). \qquad (2.13.2.10)$$

A solução (2.13.2.10) deve satisfazer também a condição inicial $u(x,0) = x,\ 0 < x < 2$. Portanto, substituindo $t = 0$ em (2.13.2.10), obtém-se:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right),\ 0 < x < 2. \qquad (2.13.2.11)$$

Observe-se que (2.13.2.11) equivale a expandir $f(x) = x$, $-2 < x < 2$, em uma série de Fourier de senos. Logo:

$$B_n = -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}. \qquad (2.13.2.12)$$

Substituindo (2.13.2.12) em (2.13.2.10), chega-se à solução

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{3n^2\pi^2 t}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

(2.13.2.13)

**<u>Exercício</u>**

Mostre que a solução (2.13.2.13) satisfaz a equação diferencial parcial, as condições de contorno e a condição inicial.

### 2.13.3 – Equação da onda

$u_{tt}(x,t) = c^2\, u_{xx}(x,t)$ (equação diferencial parcial hiperbólica)

A formulação matemática da equação da onda pode ser encontrada em **FIGUEIREDO**, D.G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, página 130.

Determinar uma solução $u(x,t)$ para o seguinte problema misto.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < L \\ |u(x,t)| < M & \end{cases}$$

Solução: $u(x,t) = X(x)T(t)$ (*separação de variáveis*) . (2.13.3.1)

Substituindo (2.13.3.1) na equação diferencial parcial, obtém-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(XT) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT);$$

$$X\frac{d^2T}{dt^2} = a^2 T\frac{d^2X}{dx^2};$$

$$\frac{1}{a^2T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2; \tag{2.13.3.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dt^2} + a^2\lambda^2 T = 0 \\ \dfrac{d^2X}{dt^2} + \lambda^2 X = 0 \end{cases}. \tag{2.13.3.3}$$

A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (2.13.3.3) é:

$$\begin{aligned} T &= A_1 \cos(a\lambda t) + A_2 \operatorname{sen}(a\lambda t) \\ X &= B_1 \cos(\lambda x) + B_2 \operatorname{sen}(\lambda x) \end{aligned}. \tag{2.13.3.4}$$

Substituindo (2.13.3.4) em (2.13.3.1), encontra-se

$$u(x,t) = [A_1 \cos(a\lambda t) + A_2 \operatorname{sen}(a\lambda t)][B_1 \cos(\lambda x) + B_2 \operatorname{sen}(\lambda x)]. \tag{2.13.3.5}$$

Deve-se agora determinar as constantes para que (2.13.3.5) satisfaça as condições de contorno e as condições iniciais.

$u(0,t) = 0 \Rightarrow B_1[A_1 \cos(a\lambda t) + A_2 \operatorname{sen}(a\lambda t)] = 0 \Rightarrow B_1 = 0$ (a solução trivial não interessa)

(2.13.3.6)

$$u(x,t) = [A_1 \cos(a\lambda t) + A_2 \operatorname{sen}(a\lambda t)][B_2 \operatorname{sen}(\lambda x)] = \operatorname{sen}(\lambda x)[A\operatorname{sen}(a\lambda t) + B\cos(a\lambda t)]$$

(2.13.3.7)

$$u(L,t) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\lambda L)[A\operatorname{sen}(a\lambda t) + B\cos(a\lambda t)] = 0 \qquad (2.13.3.8)$$

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L},\ n \in Z \qquad (2.13.3.9)$$

$$u_t(x,t) = \operatorname{sen}(\lambda x)[a\lambda A\cos(a\lambda t) - a\lambda B\operatorname{sen}(a\lambda t)]$$

$$u_t(x,0) = a\lambda A\operatorname{sen}(\lambda x) = 0 \Rightarrow A = 0 \qquad (2.13.3.10)$$

Substituindo (2.13.3.9) e (2.13.3.10) em (2.13.3.7), tem-se que:

$u(x,t) = B\operatorname{sen}(\lambda x)\cos(a\lambda t)$;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right). \qquad (2.13.3.11)$$

Em (2.13.3.11), acrescenta-se o índice n à constante B pensando-se na superposição de soluções.

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x). \qquad (2.13.3.12)$$

Tem-se em (2.13.3.12) a expansão de f(x) em uma série de Fourier de senos. Logo:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \qquad (2.13.3.13)$$

Substituindo-se (2.13.3.13) em (2.13.3.11), obtém-se a solução procurada.

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \qquad (2.13.3.14)$$

**Exercício**

Mostre que a solução (2.13.3.14) satisfaz a equação diferencial parcial, as condições de contorno e as condições iniciais.

### 2.13.4 – Equação de Laplace

$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$ (equação diferencial parcial elíptica)

Obter uma solução $u(x, y)$ para o problema de contorno a seguir.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = u_1 = f(y) \\ |u(x,t)| < M \end{cases}$$

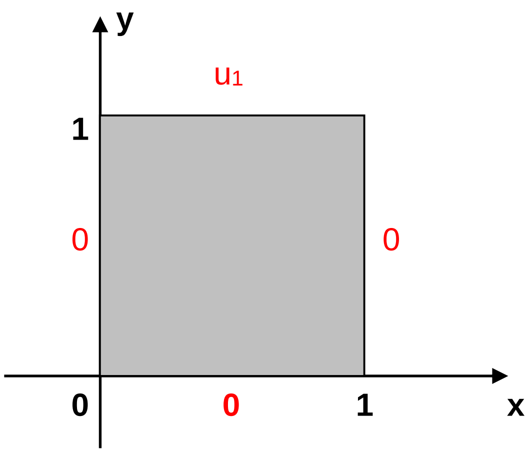



**Figura 2.17**: Condições de contorno para a equação de Laplace.

Solução: $u(x, y) = X(x)Y(y)$ (*separação de variáveis*). (2.13.4.1)

Substituindo-se (2.13.4.1) na equação diferencial parcial, obtém-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XY) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(XY) = 0\,;$$

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0\,;$$

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} = -X\frac{d^2Y}{dy^2} = -\lambda^2\,;$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\lambda^2\,; \qquad (2.13.4.2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{cases}. \qquad (2.13.4.3)$$

A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (2.13.4.3) é:

$$\begin{aligned} X &= A_1\cos(\lambda x) + B_1\text{sen}(\lambda x) \\ Y &= A_2\cosh(\lambda y) + B_2\text{senh}(\lambda y) \end{aligned} . \qquad (2.13.4.4)$$

Substituindo-se (2.13.4.4) em (2.13.4.1), encontra-se

$$u(x,t) = [A_1\cos(\lambda x) + B_1\text{sen}(\lambda x)][A_2\cosh(\lambda y) + B_2\text{senh}(\lambda y)]. \qquad (2.13.4.5)$$

Deve-se agora determinar as constantes para que (2.13.4.5) satisfaça as condições de contorno.

$u(0,y) = 0 \Rightarrow A_1[A_2\cosh(\lambda y) + B_2\text{senh}(\lambda y)] = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ (a solução trivial não interessa) (2.13.4.6)

$$u(x,t) = \text{sen}(\lambda x)[A\cosh(\lambda y) + B\text{senh}(\lambda y)] \qquad (2.13.4.7)$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow A\text{sen}(\lambda x) = 0 \Rightarrow A = 0 \qquad (2.13.4.8)$$

$$u(x,t) = B\text{sen}(\lambda x)\text{senh}(\lambda y) \qquad (2.13.4.9)$$

$$u(1,y) = 0 \Rightarrow B\text{sen}(\lambda)\text{senh}(\lambda y) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\lambda) = 0 \ \Rightarrow \lambda = n\pi,\ n \in Z \qquad (2.13.4.10)$$

Substituindo-se (2.13.4.10) em (2.13.4.9) e usando-se o princípio da superposição, tem-se que:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\text{sen}(n\pi x)\text{senh}(n\pi y); \qquad (2.13.4.11)$$

$$u(x,1) = u_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\text{senh}(n\pi)\text{sen}(n\pi x) = u_1. \qquad (2.13.4.12)$$

Tem-se em (2.13.4.12) a expansão de $u_1$ em uma série de Fourier de senos. Assim:

$$\text{senh}(n\pi)B_n = \frac{2}{1}\int_0^1 u_1\text{sen}(n\pi\, x)dx \Rightarrow B_n = \frac{2u_1}{\text{senh}(n\pi)}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi\, x)\right]_0^1;$$

$$B_n = \frac{2u_1}{n\pi\,\text{senh}(n\pi)}[-\cos(n\pi) + 1] = \frac{2u_1}{n\pi\,\text{senh}(n\pi)}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]. \qquad (2.13.4.13)$$

Substituindo-se (2.13.4.13) em (2.13.4.11), obtém-se a solução procurada.

$$u(x,t) = \frac{2u_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^{n+1} + 1\right]}{n\,\text{senh}(n\pi)}\text{sen}(n\pi x)\text{senh}(n\pi y) \qquad (2.13.4.14)$$

**Exercícios**

01. Mostre que a solução (2.13.4.14) satisfaz a equação diferencial parcial e as condições de contorno.

02. Suponha uma barra de comprimento L (extremos em $x = 0$ e $x = L$) com temperatura inicial dada por uma função f(x). Determine a distribuição de temperatura na barra.

Para este caso, o problema de valor de contorno é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ 0 < x < L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L \\ |u(x,t)| < M \text{ (solução limitada)} & \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)dx + \dfrac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]e^{-\frac{\kappa n^2\pi^2 t}{L^2}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$.

03. Solucione o problema misto a seguir.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) & 0 < x < 4,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(4,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 25x & 0 < x < 4 \\ |u(x,t)| < M & \end{cases}$$

Resposta:

$$B_n = \frac{200}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{8}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$$

04. Solucione os problemas de valor de contorno a seguir empregando o método de separação de variáveis.

a) $\begin{cases} 3u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = 0 \\ u(x,0) = 4e^{-x} \end{cases}$

Resposta: $u(x,y) = 4e^{(3y-2x)/2}$.

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}u(x,y) = 2\dfrac{\partial}{\partial y}u(x,y) + u(x,y) \\ u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x} \end{cases}$

Resposta: $u(x,y) = 3e^{-5x-3y} + 2e^{-3x-2y}$.

## *2.14 – Exercícios resolvidos*

01. Seja $f:R\to R\,/\,f(x)=x^2\operatorname{sen}(2x),\ x\in(-\pi,\pi),\ f(x+2\pi)=f(x)$.

a) Plote o gráfico de $f(x)$ com pelo menos três períodos.

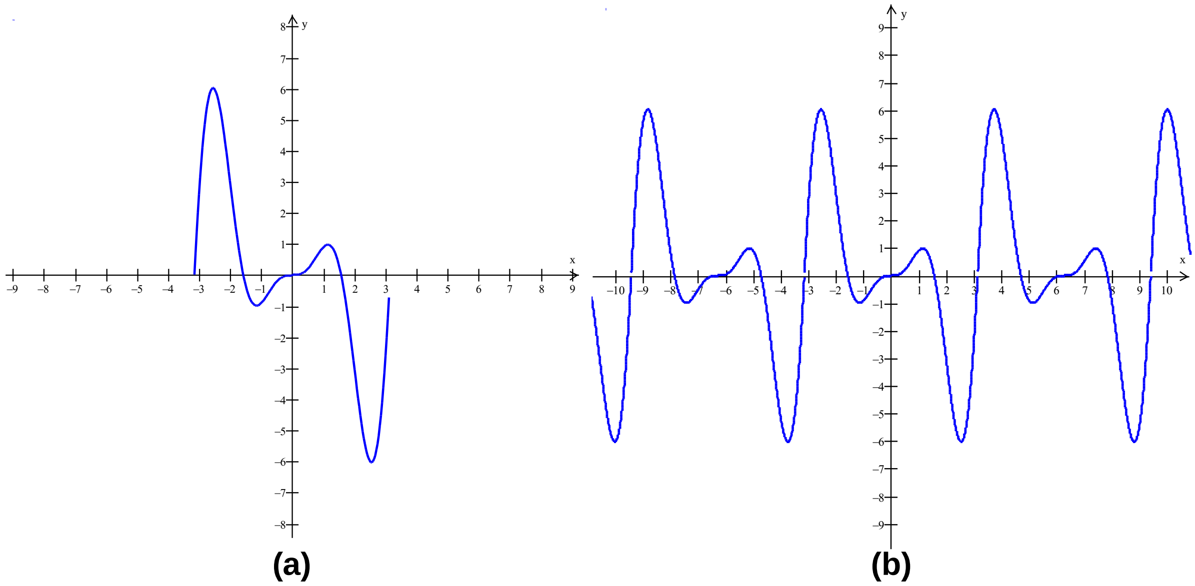


**Figura 2.18**: Gráfico de $f:R\to R\,/\,f(x)=x^2\operatorname{sen}(2x)$: **(a)** $x\in(-\pi,\pi)$; **(b)** $f(x+2\pi)=f(x)$.

b) Determine a série de Fourier de $f(x)$.

$$f(-x)=(-x)^2\operatorname{sen}(-2x)=-x^2\operatorname{sen}(2x)$$

$f(x)$ é função ímpar (produto de uma par por uma ímpar) $\Rightarrow a_0=0,\ a_n=0\forall n\geq 1$

$$P=2L=2\pi\Rightarrow L=\pi$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(nx)dx \qquad (2.14.1)$$

Empregando-se a identidade $\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)=\frac{1}{2}[\cos(u-v)-\cos(u+v)]$ em (2.14.1), tem-se que:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\pi x^2\cos[(n-2)x]dx-\int_0^\pi x^2\cos[(n+2)x]dx\right\}. \qquad (2.14.2)$$

Calculando a integral indefinida (integração por partes).

$u=x^2,\ du=2xdx$ $\qquad$ $u=x,\ du=dx$

$dv=\cos(ax)dx,\ v=\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{a}$ $\qquad$ $dv=\operatorname{sen}(ax)dx,\ v=-\dfrac{\cos(ax)}{a}$

$$\int x^2\cos(ax)dx = \frac{x^2\mathrm{sen}(ax)}{a} - \frac{2}{a}\int x\,\mathrm{sen}(ax)dx$$

$$= \frac{x^2\mathrm{sen}(ax)}{a} - \frac{2}{a}\left[-\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{1}{a}\int \cos(ax)dx\right] \qquad (2.14.3)$$

$$= \frac{x^2\mathrm{sen}(ax)}{a} + \frac{2x\cos(ax)}{a^2} - \frac{2\mathrm{sen}(ax)}{a^3} + C$$

Retornando a (2.14.2).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x^2\mathrm{sen}[(n-2)x]}{n-2} + \frac{2x\cos[(n-2)x]}{(n-2)^2} - \frac{2\mathrm{sen}[(n-2)x]}{(n-2)^3}\Bigg|_0^{\pi}\right\} +$$

$$-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{x^2\mathrm{sen}[(n+2)x]}{n+2} + \frac{2x\cos[(n+2)x]}{(n+2)^2} - \frac{2\mathrm{sen}[(n+2)x]}{(n+2)^3}\Bigg|_0^{\pi}\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^2\mathrm{sen}[(n-2)\pi]}{n-2} + \frac{2\pi\cos[(n-2)\pi]}{(n-2)^2} - \frac{2\mathrm{sen}[(n-2)\pi]}{(n-2)^3}\right\} +$$

$$-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^2\mathrm{sen}[(n+2)\pi]}{n+2} + \frac{2\pi\cos[(n+2)\pi]}{(n+2)^2} - \frac{2\mathrm{sen}[(n+2)\pi]}{(n+2)^3}\right\}$$

$\cos[(n\pm 2)\pi] = (-1)^n$ e $\mathrm{sen}[(n\pm 2)\pi] = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi(-1)^n}{(n-2)^2} - \frac{2\pi(-1)^n}{(n+2)^2}\right] = 2(-1)^n\left[\frac{1}{(n-2)^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right]$$

$$b_n = 2(-1)^n\left[\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n-2)^2(n+2)^2}\right] = 2(-1)^n\left[\frac{n^2+4n+4-(n^2-4n+4)}{(n^2-4)^2}\right]$$

$$b_n = 2(-1)^n\left[\frac{8n}{(n^2-4)^2}\right] = \frac{16n(-1)^n}{(n^2-4)^2},\ n \neq 2$$

$$b_1 = -\frac{16}{9}$$

Para calcular $b_2$, volta-se a (2.14.2).

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} x^2\cos[(2-2)x]dx - \int_0^{\pi} x^2\cos[(2+2)x]dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} x^2dx - \int_0^{\pi} x^2\cos(4x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\pi} - \left[\frac{x^2\mathrm{sen}(4x)}{4} + \frac{2x\cos(4x)}{4^2} - \frac{2\mathrm{sen}(4x)}{4^3}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi}{16}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{8}$$

$$f(x) = -\frac{16}{9}\mathrm{sen}(x) + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{8}\right)\mathrm{sen}(2x) + 16\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(n^2-4)^2}\mathrm{sen}(nx) \qquad (2.14.4)$$

c) Plote simultaneamente os gráficos de $f(x)$ e da série de Fourier de $f(x)$ truncada (empregue diferentes harmônicos) e faça comentários pertinentes.

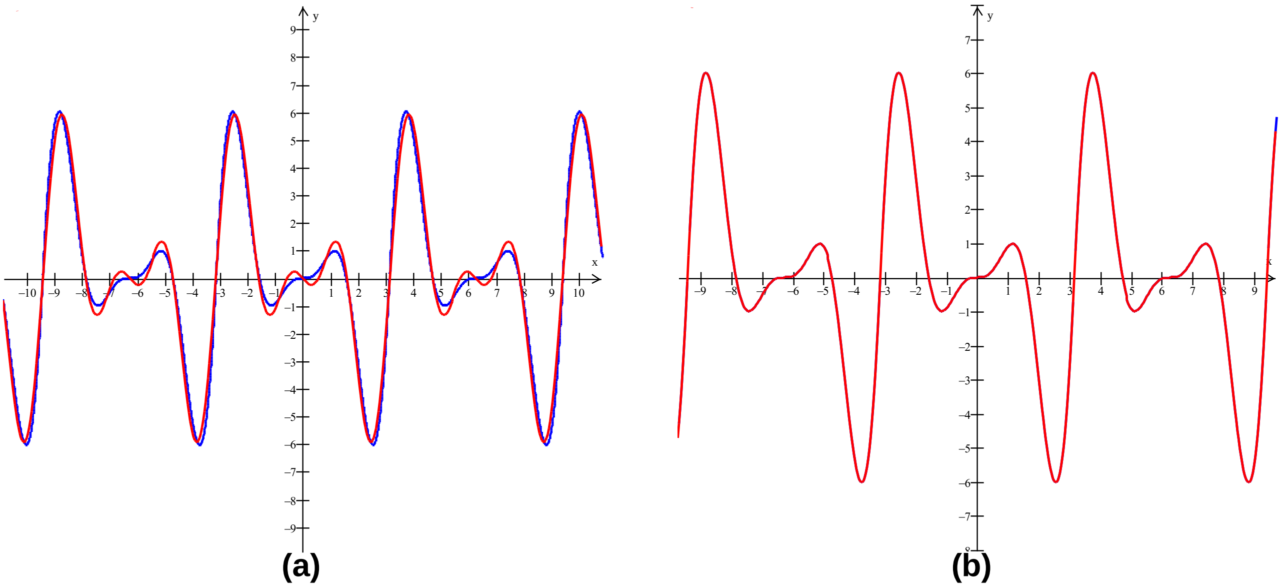



**Figura 2.19**: Gráfico de $f(x) = -\frac{16}{9}\mathrm{sen}(x) + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{8}\right)\mathrm{sen}(2x) + 16\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(n^2-4)^2}\mathrm{sen}(nx)$: **(a)** $n = 3$; **(b)** $n = 1000$.

**Comentários**: Como $f(x)$ tem descontinuidades do tipo removível em $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$, não se observa o fenômeno de Gibbs na série de Fourier de $f(x)$. Nas descontinuidades de $f(x)$, a série de Fourier converge para a média dos limites laterais (zero).

d) Use a série de Fourier de $f(x)$ para determinar para quanto converge a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(2n-1)^2(2n+3)^2}=\frac{3}{1^2.5^2}-\frac{5}{3^2.7^2}+\frac{7}{5^2.9^2}-\frac{9}{7^2.11^2}+\ldots.$$

Considerando-se $x=\frac{\pi}{2}$ em (2.14.4) e lembrando que $(n^2-4)^2=(n^2-2)(n^2+2)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=-\frac{16}{9}+16\left(\frac{3}{1^2.5^2}-\frac{5}{3^2.7^2}+\frac{7}{5^2.9^2}-\frac{9}{7^2.11^2}+\ldots\right)$$

$$\frac{16}{9}=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(2n-1)^2(2n+3)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(2n-1)^2(2n+3)^2}=\frac{1}{9}.$$

02. Seja $f:R\to R\,/\,f(x)=\mathrm{senh}(x)\cosh(x),\ x\in(-\pi,\pi),\ f(x+2\pi)=f(x)$.

a) Determine a série de Fourier de $f(x)$.

$$\begin{aligned}f(-x)&=\mathrm{senh}(-x)\cosh(-x)\\&=-\mathrm{senh}(x)\cosh(x)\\&=-f(x)\end{aligned}$$

$f(x)=\mathrm{senh}(x)\cosh(x)$ é uma função ímpar (produto de uma ímpar por uma par)

$\Rightarrow a_0=0,\ a_n=0\forall n\geq 1$

$P=2L=2\pi\Rightarrow L=\pi$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{senh}(x)\cosh(x)\mathrm{sen}(nx)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\mathrm{sen}(nx)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{2x}+1-1-e^{-2x}}{4}\right)\mathrm{sen}(nx)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}e^{2x}\mathrm{sen}(nx)dx-\int_0^{\pi}e^{-2x}\mathrm{sen}(nx)dx\right\}\qquad(2.14.5)$$

Calculando a integral indefinida (integração por partes) $\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx$ .

$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}dx$$
$$dv = \operatorname{sen}(nx)dx,\ v = -\frac{\cos(nx)}{n}$$
$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{e^{ax}\cos(nx)}{n} + \frac{a}{n}\int e^{ax}\cos(nx)dx$$
$$u = e^{ax},\ du = ae^{ax}dx$$
$$dv = \cos(nx)dx,\ v = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$$
$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{e^{ax}\cos(nx)}{n} + \frac{a}{n}\left[\frac{e^{ax}\operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{a}{n}\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx\right]$$
$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{e^{ax}\cos(nx)}{n} + \frac{ae^{ax}\operatorname{sen}(nx)}{n^2} - \frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx$$
$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{e^{ax}\cos(nx)}{n} + \frac{ae^{ax}\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$
$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{n^2}{n^2+a^2}\left[-\frac{e^{ax}\cos(nx)}{n} + \frac{ae^{ax}\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right] + C \qquad (2.14.6)$$

Substituindo-se (2.14.6) em (2.14.5), primeiramente com $a = 2$ e depois com $a = -2$ .

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\frac{n^2}{n^2+4}\left[-\frac{e^{2x}\cos(nx)}{n} + \frac{2e^{2x}\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right] +$$
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{n^2}{n^2+4}\left[-\frac{e^{-2x}\cos(nx)}{n} - \frac{2e^{-2x}\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right]$$
$$b_n = \frac{1}{2\pi}\frac{n^2}{n^2+4}\left[-\frac{e^{2\pi}\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{e^{-2\pi}\cos(n\pi)}{n} - \frac{1}{n}\right]$$
$$b_n = \frac{1}{2\pi}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+4}\left(-e^{2\pi} + e^{-2\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{n(-1)^n}{n^2+4}\left(-e^{2\pi} + e^{-2\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+4}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+4}\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2}$$

$$= \frac{\text{senh}(2\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 4}$$

$$b_n = \frac{\text{senh}(2\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 4}, \ n \geq 1$$

$$f(x) = \frac{\text{senh}(2\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 4} \text{sen}(nx)$$

b) Plote simultaneamente os gráficos de $f(x)$ e da série de Fourier de $f(x)$ truncada (empregue diferentes harmônicos) e faça comentários pertinentes.

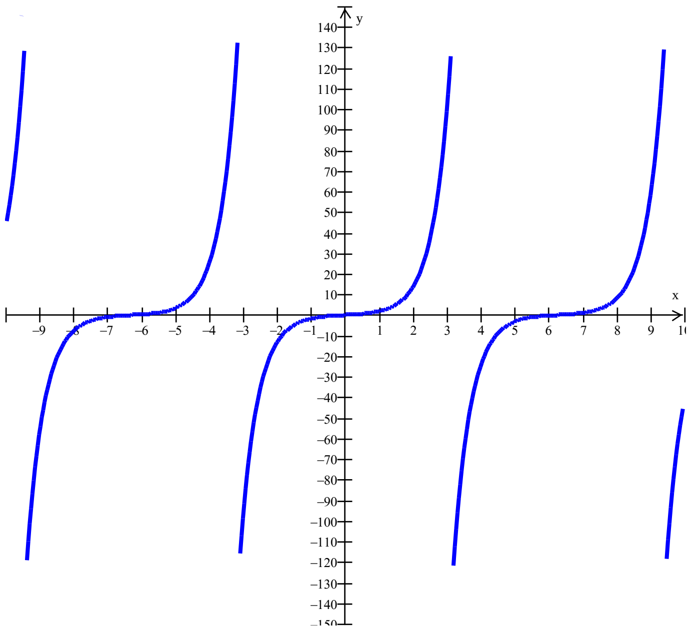
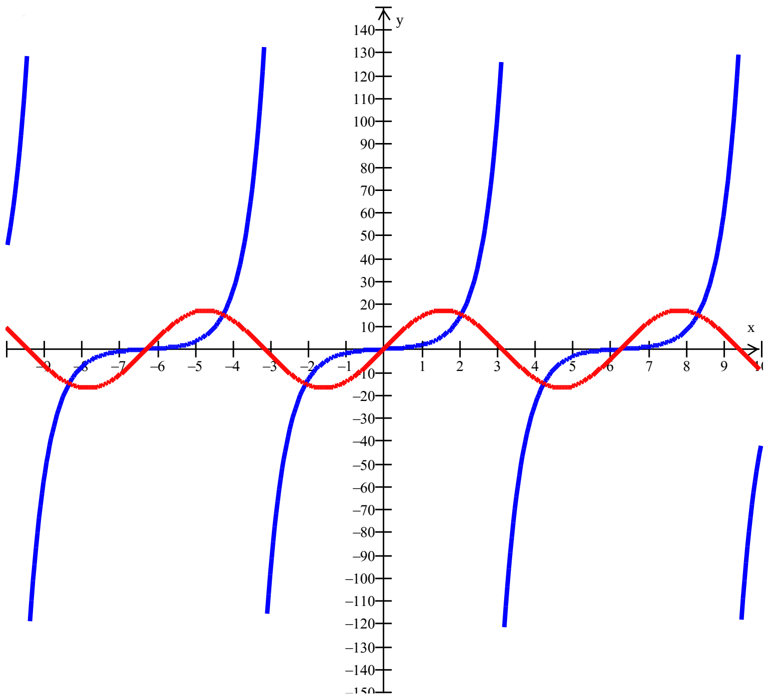
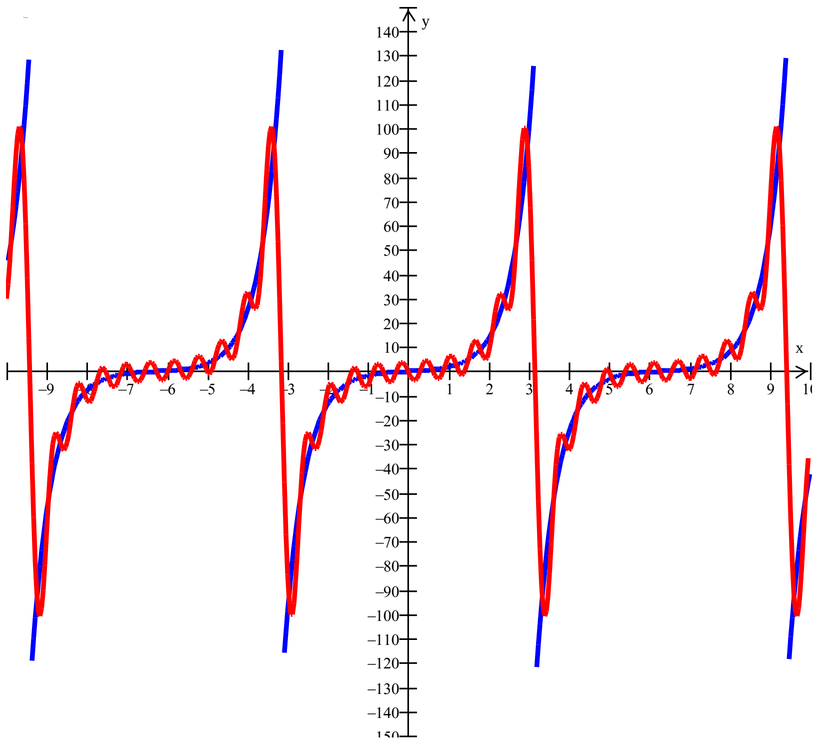



**Figura 2.20**: Gráfico de $f(x) = \text{senh}(x)\cosh(x), \ x \in (-\pi, \pi), \ f(x + 2\pi) = f(x)$.




**<u>Figura 2.21</u>**: Gráfico de $f(x) = \mathrm{senh}(x)\cosh(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$ (azul), e da série de Fourier de $f(x)$ com $n = 1$ (vermelho).




**<u>Figura 2.22</u>**: Gráfico de $f(x) = \mathrm{senh}(x)\cosh(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$ (azul), e da série de Fourier de $f(x)$ com $n = 10$ (vermelho).

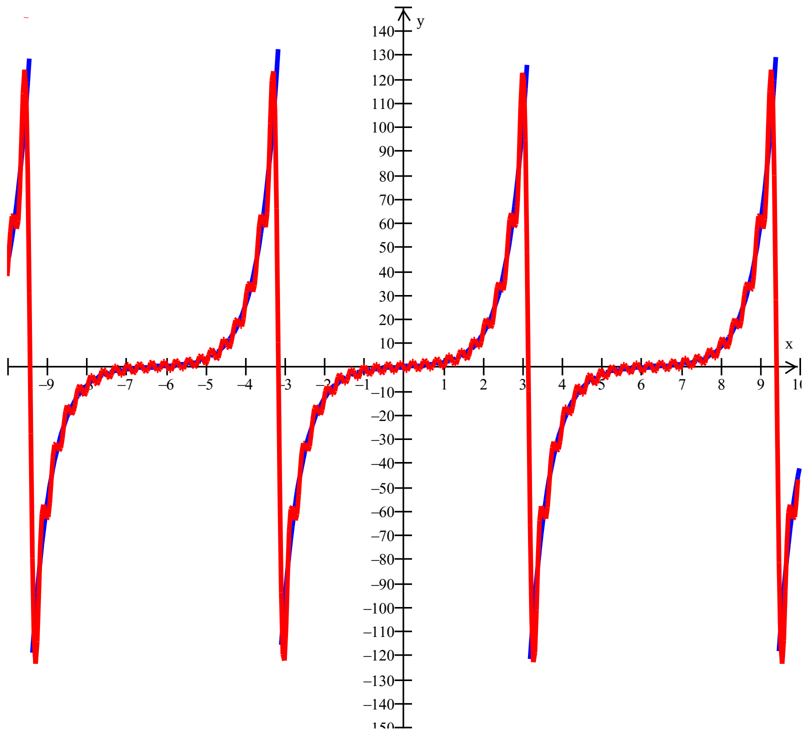


**Figura 2.23**: Gráfico de $f(x) = \mathrm{senh}(x)\cosh(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ (azul), e da série de Fourier de $f(x)$ com $n = 20$ (vermelho).

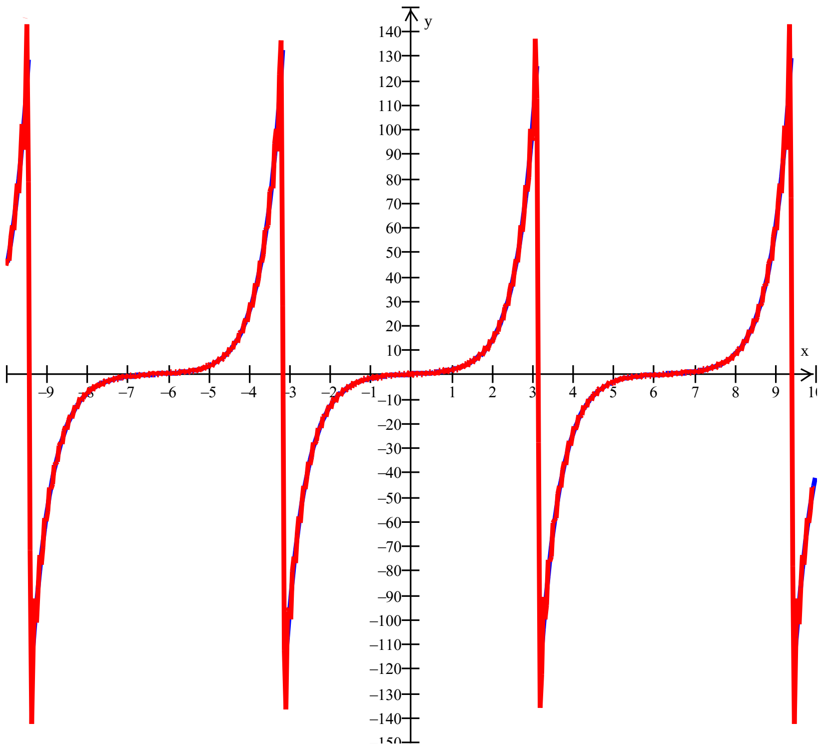


**Figura 2.24**: Gráfico de $f(x) = \mathrm{senh}(x)\cosh(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ (azul), e da série de Fourier de $f(x)$ com $n = 50$ (vermelho).

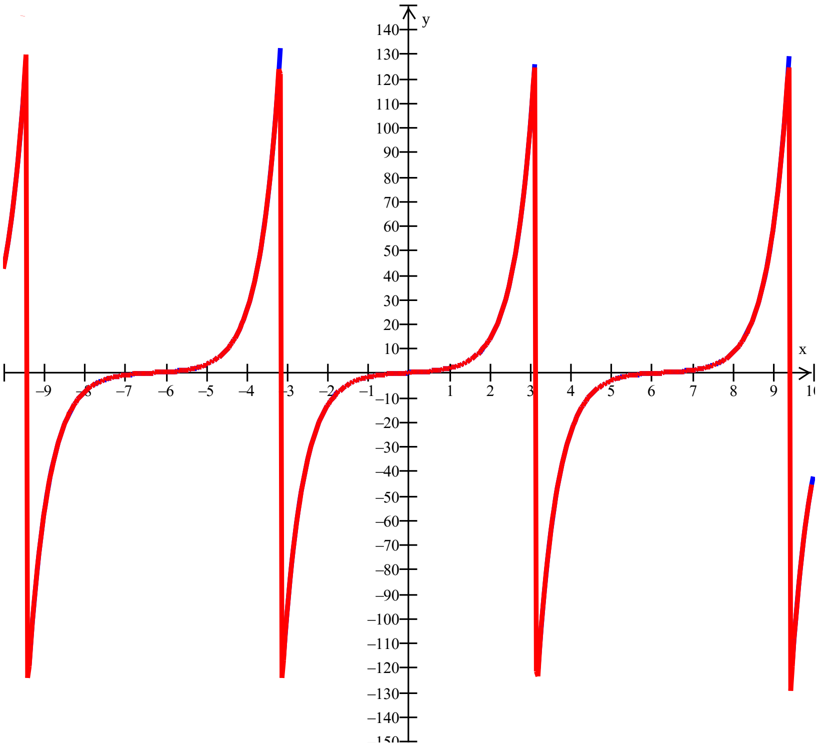



**Figura 2.25**: Gráfico de $f(x)=\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$, $x\in(-\pi,\pi)$, $f(x+2\pi)=f(x)$ (azul), e da série de Fourier de $f(x)$ com $n=1000$ (vermelho).

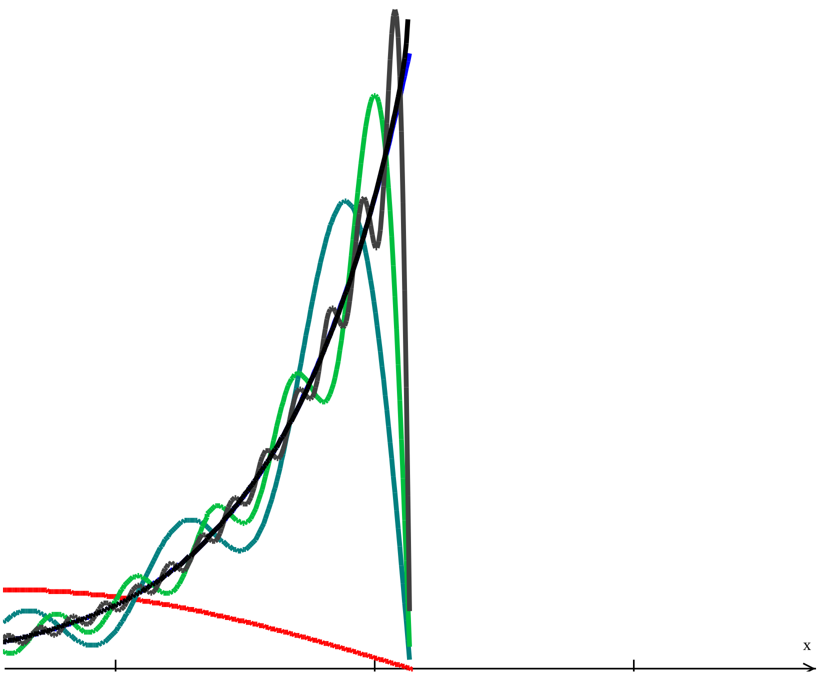



**Figura 2.26**: Gráfico da série de Fourier de $f(x)$ com $n=1$ (vermelho), $n=10$ (verde escuro), $n=20$ (verde claro), $n=50$ (marron) e $n=1000$ (preto).

**Comentários**: Como o prolongamento periódico de $f(x)$ tem descontinuidades do tipo salto finito, observa-se o fenômeno de Gibbs na série de Fourier de $f(x)$, isto é, oscilações de maior amplitude nas vizinhanças dos saltos. A estimativa para a maior amplitude é de cerca de $9\%$ da amplitude do salto. Nas descontinuidades de $f(x)$, a série de Fourier converge para a média dos limites laterais (zero).

03. Seja $f(x)=\cosh(3x),\ -\pi<x<\pi,\ f(x+2\pi)=f(x)$.

a) Determine a série de Fourier de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cosh(-3x)\\ &= \cosh(3x) \qquad f(x)=\cosh(3x) \text{ é uma função par } \Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \geq 1\\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$P = 2L = 2\pi \Rightarrow L = \pi$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(3x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\text{senh}(3x)}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{3\pi}\text{senh}(3\pi)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(3x)\cos(n\,x)dx \tag{2.14.7}$$

Calculando a integral indefinida (integração por partes) $\int \cosh(3x)\cos(nx)dx$ .

$$u = \cosh(3x),\ du = 3\text{senh}(3x)dx \qquad u = \text{senh}(3x),\ du = 3\cosh(3x)dx$$

$$dv = \cos(nx)dx,\ v = \frac{\text{sen}(nx)}{n} \qquad dv = \text{sen}(nx)dx,\ v = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

$$\int \cosh(3x)\cos(nx)dx = \frac{\cosh(3x)\text{sen}(nx)}{n} - \frac{3}{n}\int \text{senh}(3x)\text{sen}(nx)dx$$

$$\int \cosh(3x)\cos(nx)dx = \frac{\cosh(3x)\text{sen}(nx)}{n} - \frac{3}{n}\left[-\frac{\text{senh}(3x)\cos(nx)}{n} + \frac{3}{n}\int \cosh(3x)\cos(nx)dx\right]$$

$$\left(1+\frac{9}{n^2}\right)\int \cosh(3x)\cos(nx)dx = \frac{\cosh(3x)\text{sen}(nx)}{n} + \frac{3\text{senh}(3x)\cos(nx)}{n^2}$$

$$\int \cosh(3x)\cos(nx)dx = \frac{n^2}{n^2+9}\left[\frac{\cosh(3x)\text{sen}(nx)}{n} + \frac{3\text{senh}(3x)\cos(nx)}{n^2}\right] + C \tag{2.14.8}$$

Substituindo-se (2.14.8) em (2.14.7), tem-se que:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{n^2+9}\left[\frac{\cosh(3x)\text{sen}(nx)}{n} + \frac{3\text{senh}(3x)\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{n^2+9}\left[\frac{3\operatorname{senh}(3\pi)\cos(n\pi)}{n^2}\right];$$

$$a_n = \frac{6\operatorname{senh}(3\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{n^2+9};$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{senh}(3\pi)}{3\pi} + \frac{6\operatorname{senh}(3\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9}\cos(nx). \qquad (2.14.9)$$

b) Calcule para quanto converge a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9} = -\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{1}{18}+\frac{1}{25}-\frac{1}{34}+\dots.$$

Considerando $x=0$ em (2.14.9), tem-se que $\cosh(0)=1$ ($f(x)$ é contínua em $x=0$) e que

$$1 = \frac{\operatorname{senh}(3\pi)}{3\pi} + \frac{6\operatorname{senh}(3\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9};$$

$$1 - \frac{\operatorname{senh}(3\pi)}{3\pi} = \frac{6\operatorname{senh}(3\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9};$$

$$\frac{3\pi - \operatorname{senh}(3\pi)}{3\pi} = \frac{6\operatorname{senh}(3\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9} = \frac{3\pi - \operatorname{senh}(3\pi)}{3\pi}\frac{\pi}{6\operatorname{senh}(3\pi)} = \frac{3\pi - \operatorname{senh}(3\pi)}{18\operatorname{senh}(3\pi)}.$$

*2.15 – Exercícios complementares*

01. Seja $f(x)$, representada graficamente abaixo, uma função $\pi$-periódica.

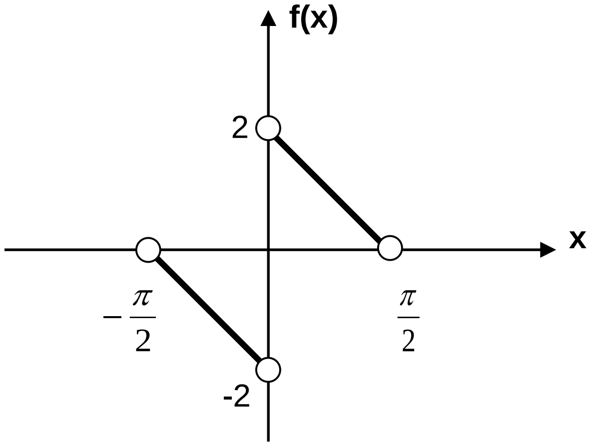



**Figura 2.27**: Gráfico de $f(x)=\begin{cases} -\frac{4}{\pi}x-2, -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ -\frac{4}{\pi}x+2, 0<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$, $f(x+\pi)=f(x)$.

Expanda $f(x)$ em série de Fourier.

Resposta: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{sen}(2nx)$.

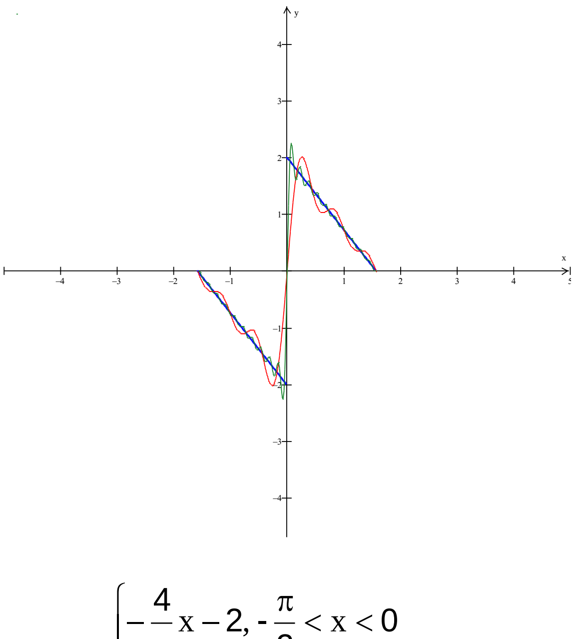


**Figura 2.28**: Gráfico de $f(x)=\begin{cases} -\frac{4}{\pi}x-2, -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ -\frac{4}{\pi}x+2, 0<x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$, $f(x+\pi)=f(x)$, e da série de Fourier de $f(x)$ com $n=5$ (vermelho) e $n=20$ (verde).

02. Seja $f(x)$, representada graficamente abaixo, uma função $\pi$-periódica.

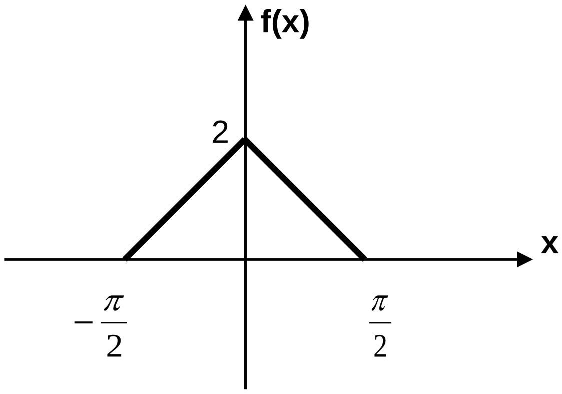



**Figura 2.29**: Gráfico de $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}x+2, -\frac{\pi}{2}\le x<0\\ -\frac{4}{\pi}x+2, 0\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $f(x+\pi)=f(x)$.

Expanda $f(x)$ em série de Fourier.

Resposta: $1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2}\cos(2nx)$.

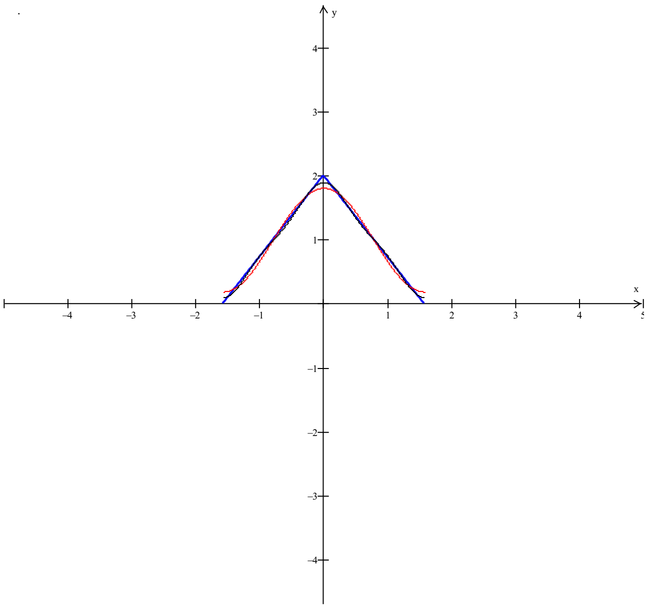


**Figura 2.30**: Gráfico de $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}x+2, -\frac{\pi}{2}\le x<0\\ -\frac{4}{\pi}x+2, 0\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $f(x+\pi)=f(x)$, e da série de Fourier de $f(x)$ com $n=2$ (vermelho) e $n=4$ (preto).

03. Seja $f(x)$ a função representada graficamente abaixo. Sabendo que $f(x) = f(x+4\pi)$, determine a série de Fourier de $f(x)$ na forma usual.

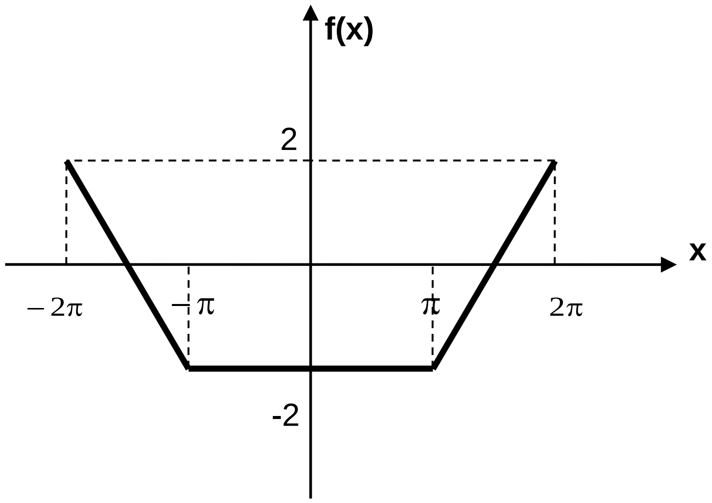



**Figura 2.31**: Gráfico de $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi}x - 6, & -2\pi \le x < -\pi \\ -2, & -\pi \le x < \pi \\ \frac{4}{\pi}x - 6, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$, $f(x+4\pi) = f(x)$.

Resposta: $f(x) = -1 + \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} \cos\left(\frac{n\,x}{2}\right)$.

04. Seja $f(x)$ a função representada graficamente abaixo. Sabendo que $f(x) = f(x+6\pi)$, determine a série de Fourier de $f(x)$ na forma usual.

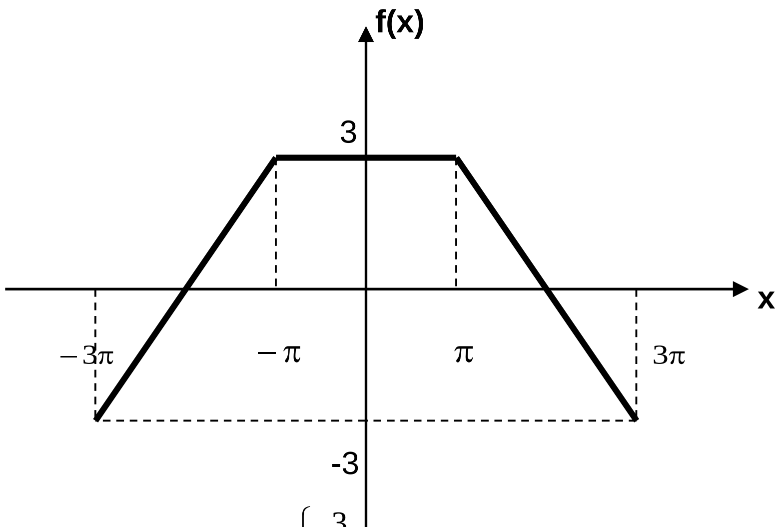



**Figura 2.32**: Gráfico de $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}x + 6, & -3\pi \le x < -\pi \\ 3, & -\pi \le x < \pi \\ -\frac{3}{\pi}x + 6, & \pi \le x \le 3\pi \end{cases}$, $f(x+6\pi) = f(x)$.

Resposta: $f(x)=1+\frac{18}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^{n+1}+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}\cos\left(\frac{n\,x}{3}\right)$.

05. Seja $f(x)=\begin{cases}-8, & -4<x<0\\ 8, & 0<x<4\end{cases}$, $f(x)=f(x+8)$. Expanda $f(x)$ em série de Fourier na forma exponencial.

Resposta: $f(x)=\frac{8i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}e^{i\frac{n\pi x}{4}}$, $n=0\Rightarrow c_0=0$.

06. Seja $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi<x\le 0\\ 2x, & 0<x<\pi\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$.

a) Expanda $f(x)$ em série de Fourier na *forma exponencial*. Para quanto converge a série em $x=\pm\pi$?

Resposta: $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}e^{inx}$, $n=0\Rightarrow c_0=\pi$.

Em $x=\pm\pi$ a série de Fourier converge para a média dos limites laterais, ou seja, $2\pi$.

b) Use a série determinada no item a para calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

Resposta: $\frac{\pi^2}{8}$.

07. a) Obtenha a série de Fourier que converge para a função $2\pi$-periódica $f(x)=e^x$, $-\pi<x<\pi$.

Resposta: $f(x)=\frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}[\cos(nx)-n\operatorname{sen}(nx)]\right\}$.

b) Determine a identidade de Parseval correspondente à série obtida no item anterior.

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi\operatorname{senh}(2\pi)-2\operatorname{senh}^2(\pi)}{4\operatorname{senh}^2(\pi)}$.

08. Sendo $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le x \le 0 \\ \text{sen}(x), & \text{se } 0 \le x \le \pi \end{cases}$ uma função $2\pi$-periódica:

a) expanda $f(x)$ em uma série de Fourier;

Resposta: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\text{sen}(x)+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\cos(nx)$.

b) mostre que $\dfrac{1}{1^2.3^2}+\dfrac{1}{3^2.5^2}+\dfrac{1}{5^2.7^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2-8}{16}$.

*Sugestão*: calcule a identidade de Parseval.

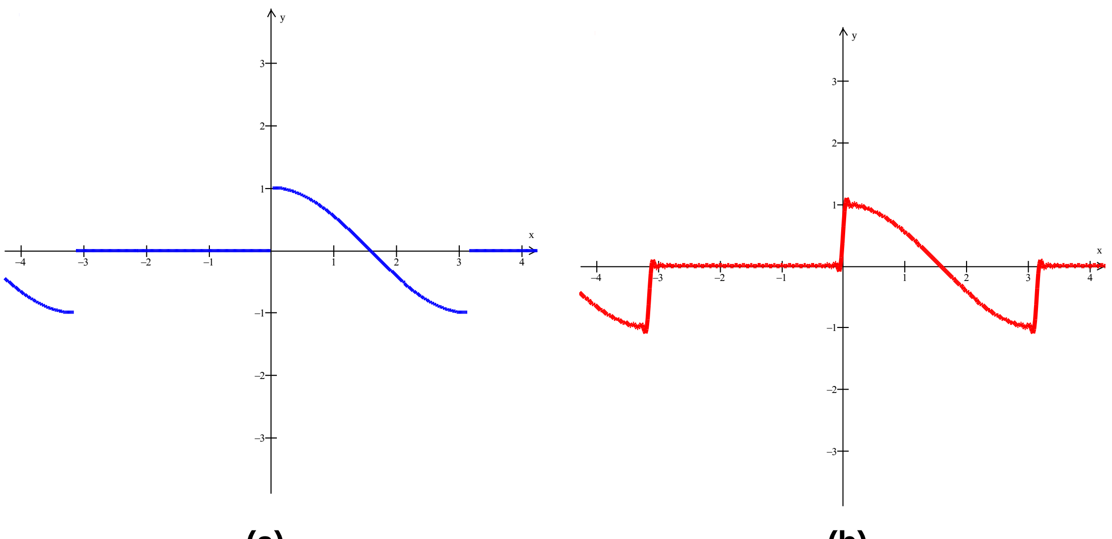
09. Seja

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \cos(x), & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x)=f(x+2\pi) \tag{1}$$

e sua série de Fourier

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\left[(-1)^n+1\right]}{n^2-1}\text{sen}(nx). \tag{2}$$

A Figura 2.33 ilustra o gráfico de $f(x)$ e de sua série de Fourier com $n=50$.



**(a)** **(b)**

<u>**Figura 2.33**</u>: **(a)** Gráfico de $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \cos(x), & 0 < x < \pi \end{cases}$, $f(x)=f(x+2\pi)$; **(b)** gráfico de

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\left[(-1)^n+1\right]}{n^2-1}\text{sen}(nx), \text{ com } n=50.$$

a) $f(x)$ é par ou ímpar? Justifique.

b) Identifique os coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Resposta: $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 0 \forall n \geq 2, b_1 = 0, b_n = \frac{n\left[(-1)^n + 1\right]}{\pi\left(n^2 - 1\right)} \forall n \geq 2$.

c) Para quanto converge a série (2) se $x = 14\pi$? E se $x = \frac{953\pi}{6}$? Justifique.

Resposta: em $x = 14\pi$ a série converge para $\frac{1}{2}$; em $x = \frac{953\pi}{6}$ a série converge para $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Use a série de Fourier de $f(x)$ para determinar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

Resposta: $\frac{\pi^2}{16}$.

10. Prove que, para $0 \leq x \leq \pi$:

a) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left[\frac{\cos(2x)}{1^2} + \frac{\cos(4x)}{2^2} + \frac{\cos(6x)}{3^2} + \cdots\right]$;

b) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left[\frac{sen(x)}{1^3} + \frac{sen(3x)}{3^3} + \frac{sen(5x)}{5^3} + \cdots\right]$.

Usando (a) e (b), mostre que:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

11. a) Mostre que, em $-\pi < x < \pi$,

$$x\cos(x) = -\frac{1}{2}\text{sen}(x) + 2\left[\frac{2}{1.3}\text{sen}(2x) - \frac{3}{2.4}\text{sen}(3x) + \frac{4}{3.5}\text{sen}(4x) - \cdots\right].$$

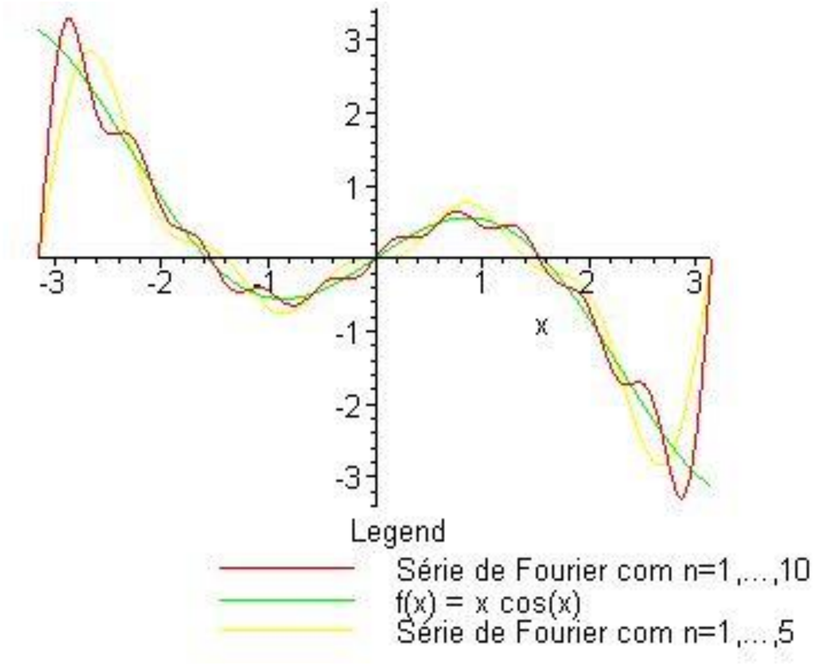



**Figura 2.34**: Gráfico de $f(x) = x\cos(x), -\pi < x < \pi$, e da série de Fourier de $f(x)$ com $n = 5$ e $n = 10$.

b) Usando (a), mostre que em $-\pi \le x \le \pi$

$$x\,\mathrm{sen}(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x) - 2\left[\frac{\cos(2x)}{1.3} - \frac{\cos(3x)}{2.4} + \frac{\cos(4x)}{3.5} - \cdots\right].$$

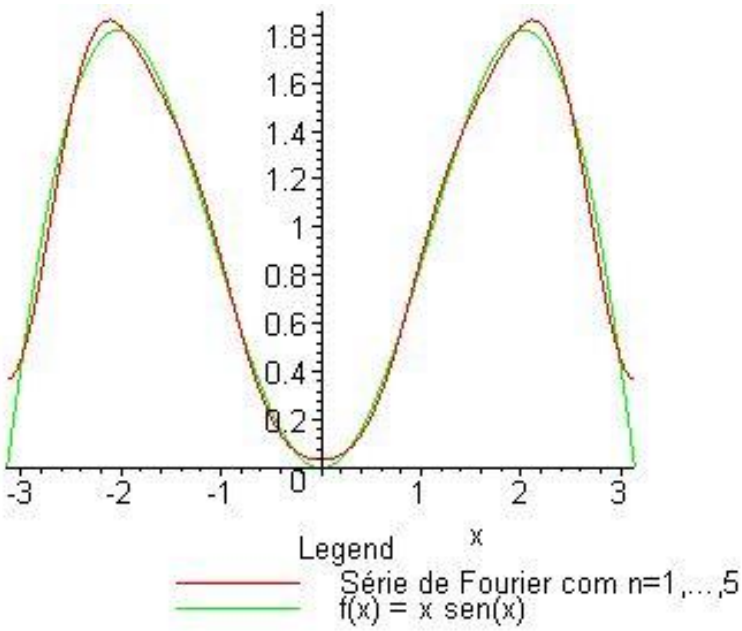



**Figura 2.35**: Gráfico de $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x), -\pi \le x \le \pi$, e da série de Fourier de $f(x)$ com $n = 5$.

c) Empregando (a) e (b), mostre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4};$$ Resposta: Use $x=\frac{\pi}{2}$ em (a).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}.$$ Resposta: Use $x=\pi$ em (b).

12. Seja $f(x)=\begin{cases}\frac{e^2}{2}(x+2), & \text{se} -2<x\le 0\\ e^{-x+2}, & \text{se}\ 0\le x<2\end{cases}$ uma função 4-periódica, representada graficamente abaixo.

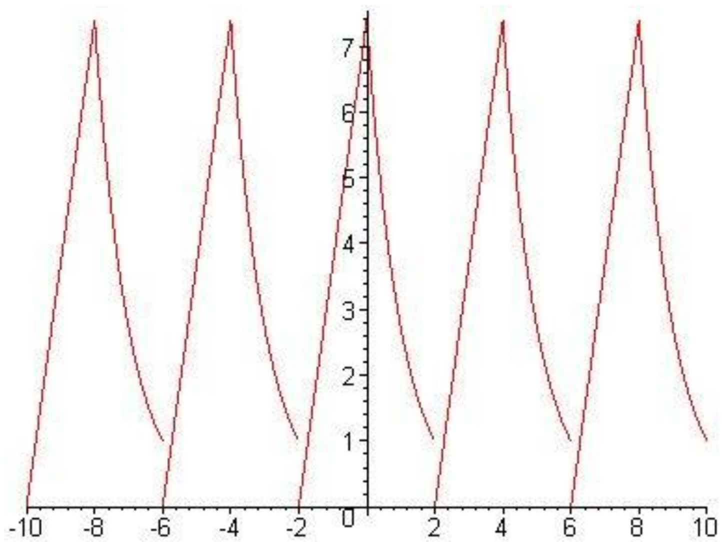



**Figura 2.36**: Gráfico da função $f(x)=\begin{cases}\frac{e^2}{2}(x+2), & \text{se} -2<x\le 0\\ e^{-x+2}, & \text{se}\ 0\le x<2\end{cases}$, de período fundamental $P=4$.

a) Verifique se f(x) satisfaz as condições de Dirichlet.

b) Determine a série de Fourier correspondente a f(x).

Resposta: $a_0=e^2-\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{e^2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{2}{n^2\pi^2+4}\left[e^2-(-1)^n\right]$,

$$b_n=-\frac{e^2}{n\pi}+\frac{n\pi}{n^2\pi^2+4}\left[e^2-(-1)^n\right].$$

c) Calcule a identidade de Parseval da série de Fourier obtida no item anterior.

Resposta: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}\right)=\frac{e^4}{12}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{8}$.

d) Usando um software gráfico, plote o gráfico da série de Fourier determinada em (b) com pelo menos quinze (15) harmônicos.

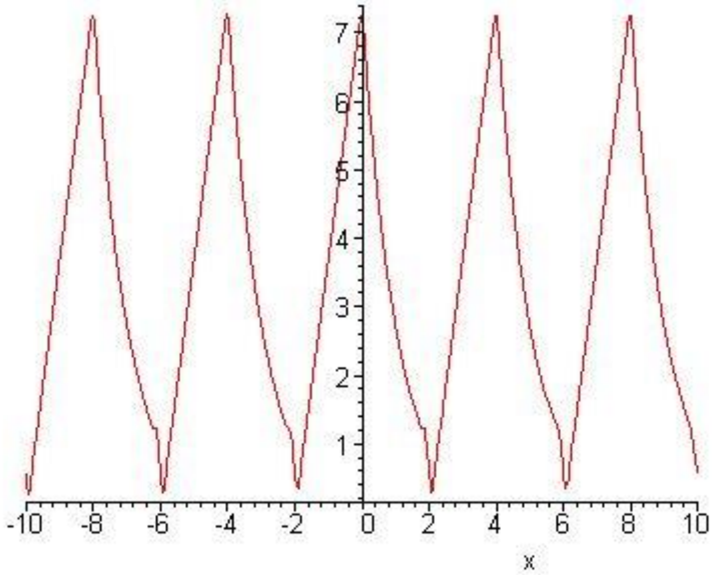



**Figura 2.37**: Série de Fourier com $n = 15$ da função $f(x) = \begin{cases} \frac{e^2}{2}(x+2), & \text{se } -2 < x \le 0 \\ e^{-x+2}, & \text{se } 0 \le x < 2 \end{cases}$, de período fundamental $P = 4$.

13. Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -3 \le x \le 0 \\ x^2(3-x), & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$, $f(x+6) = f(x)$.

a) Esboce o gráfico da função dada com pelo menos três períodos.

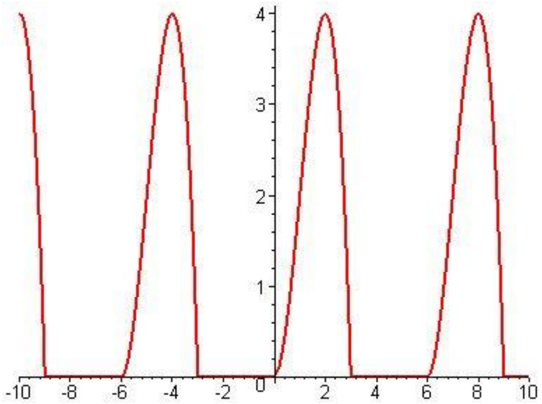



**Figura 2.38**: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -3 \le x \le 0 \\ x^2(3-x), & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$, de período fundamental $P = 6$.

b) Determine a série de Fourier de f(x).

Resposta: $a_0 = \frac{9}{4}$, $a_n = \frac{162}{n^4\pi^4}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{27}{n^2\pi^2}(-1)^n$, $b_n = \frac{54}{n^3\pi^3}\left[2(-1)^{n+1} - 1\right]$.

c) Usando um software gráfico, plote o gráfico da série de Fourier determinada em (b) com pelo menos cinco (5) harmônicos.

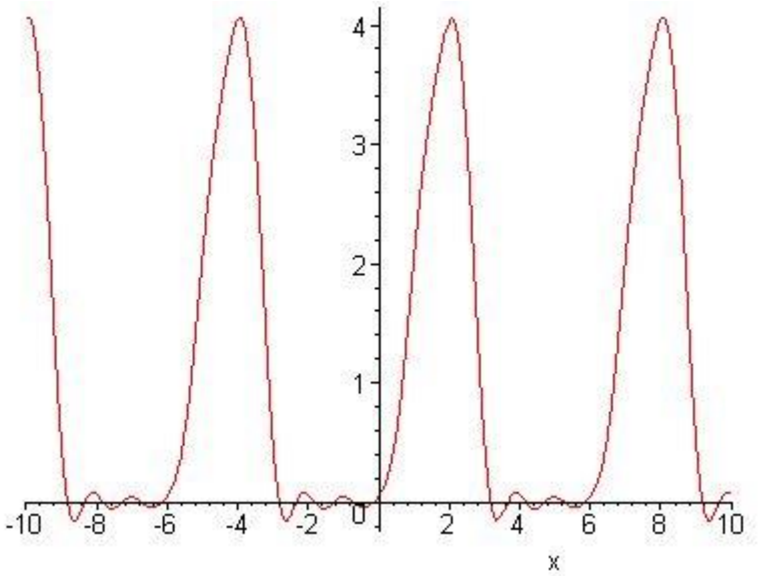



**Figura 2.39**: Série de Fourier com $n = 5$ da função $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} -3 \le x \le 0 \\ x^2(3 - x), & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$, de período fundamental $P = 6$.

14. Seja $f(x) = x^2 \text{sen}(x)$, $-\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$, $f(x) = f(x + 3\pi)$.

a) Esboce o gráfico de $f(x)$ com pelo menos três períodos.

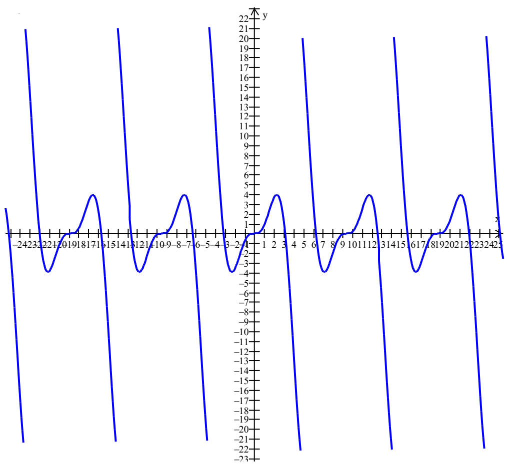


**Figura 2.40**: Gráfico de $f(x) = x^2 \text{sen}(x)$, $f(x) = f(x + 3\pi)$.

b) Determine a série de Fourier de $f(x)$.

Resposta: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{18(-1)^n}{\pi(9-4n^2)}\left[-\pi^2 n + \frac{8n(27+4n^2)}{(9-4n^2)^2}\right]$,

$$f(x) = \frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9-4n^2}\left[-\pi^2 n + \frac{8n(27+4n^2)}{(9-4n^2)^2}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{2nx}{3}\right).$$

c) Esboce o gráfico da série de Fourier de $f(x)$ com $n=1$, $n=10$, $n=100$, $n=1000$, … (Explore as limitações do aplicativo gráfico empregado).

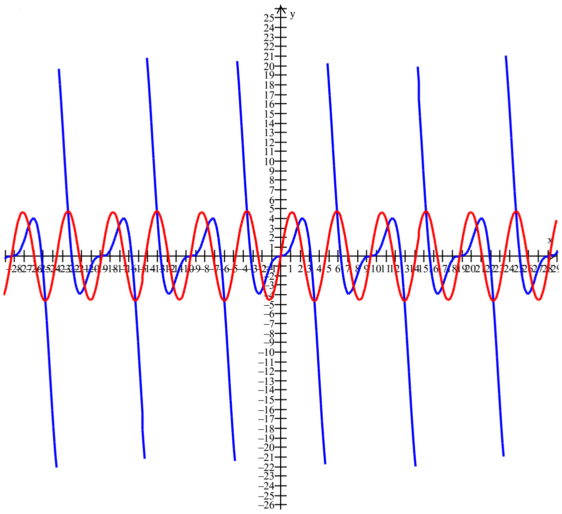


**Figura 2.41**: Gráfico de $f(x) = x^2\operatorname{sen}(x)$, $f(x) = f(x+3\pi)$ (azul) e de

$$f(x) = \frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9-4n^2}\left[-\pi^2 n + \frac{8n(27+4n^2)}{(9-4n^2)^2}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{2nx}{3}\right)$$ com $n=2$ (vermelho).

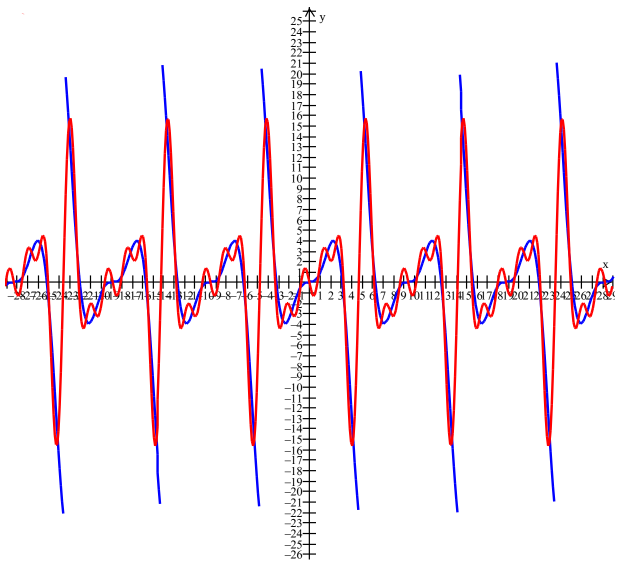


**Figura 2.42**: Gráfico de $f(x) = x^2\operatorname{sen}(x)$, $f(x) = f(x+3\pi)$ (azul) e de

$$f(x) = \frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9-4n^2}\left[-\pi^2 n + \frac{8n(27+4n^2)}{(9-4n^2)^2}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{2nx}{3}\right)$$ com $n=5$ (vermelho).

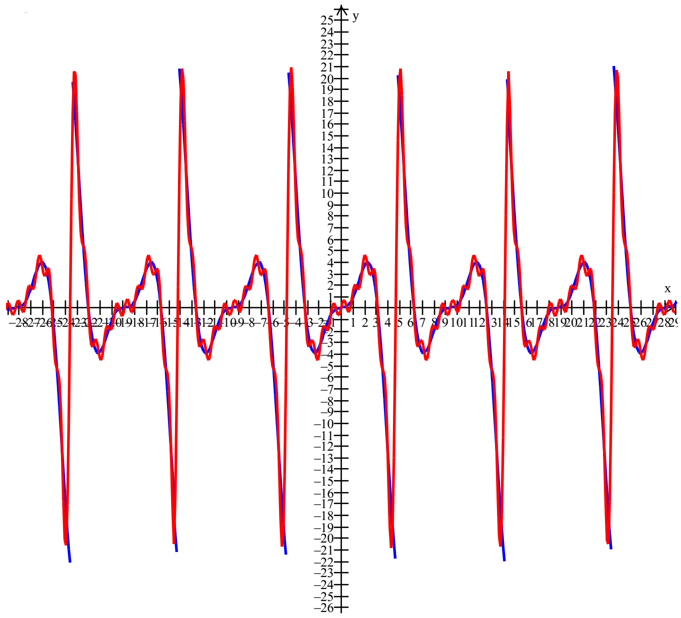



**Figura 2.43**: Gráfico de $f(x)=x^2\text{sen}(x)$, $f(x)=f(x+3\pi)$ (azul) e de

$$f(x)=\frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9-4n^2}\left[-\pi^2 n+\frac{8n(27+4n^2)}{(9-4n^2)^2}\right]\text{sen}\left(\frac{2nx}{3}\right)$$ com $n=10$ (vermelho).

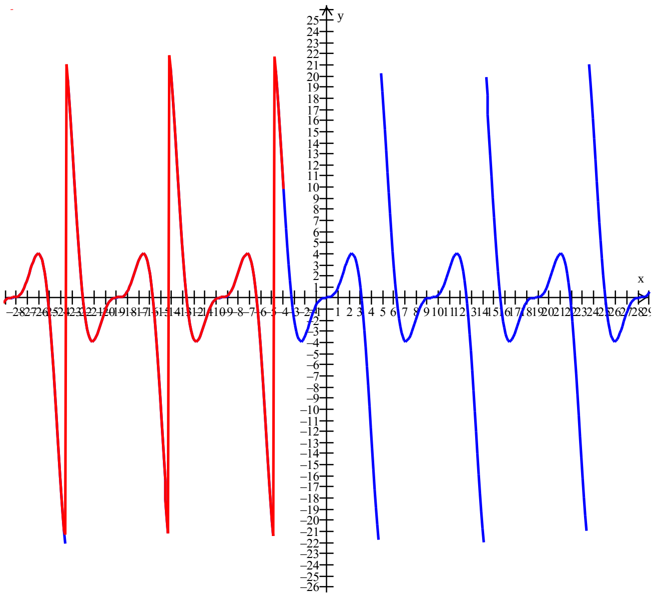



**Figura 2.44**: Gráfico de $f(x)=x^2\text{sen}(x)$, $f(x)=f(x+3\pi)$ (azul) e de

$$f(x)=\frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9-4n^2}\left[-\pi^2 n+\frac{8n(27+4n^2)}{(9-4n^2)^2}\right]\text{sen}\left(\frac{2nx}{3}\right)$$ com $n=5000$ (vermelho).

d) Para quanto converge a série de Fourier de $f(x)$ se $x=-\frac{17\pi}{12}$? E se $x=\frac{619\pi}{2}$? Justifique.

Resposta: em $x=-\frac{17\pi}{12}$, a série de Fourier converge para $\frac{289\pi^2}{576}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$;

em $x=\frac{619\pi}{2}$, a série de Fourier converge para $\frac{\pi^2}{4}$.

15. Seja

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0 \\ \cos(x), & 0<x<\pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi)=f(x).$$

a) Esboce o gráfico de $f(x)$ com pelo menos três períodos.

b) Determine a série de Fourier de $f(x)$.

Resposta: $f(x)=\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\left[(-1)^n+1\right]}{n^2-1}\operatorname{sen}(nx)$.

c) Plote simultaneamente os gráficos de $f(x)$ e da série de Fourier de $f(x)$ truncada. Empregue diferentes harmônicos.

d) Para quanto converge a série de Fourier de $f(x)$ se $x=15\pi$? E se $x=\frac{425\pi}{4}$? Justifique.

Resposta: $-\frac{1}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Use a série de Fourier de $f(x)$ para determinar para quanto converge a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(4n^2-1\right)^2}.$$

Resposta: $\frac{\pi^2}{64}$.

## 3. A INTEGRAL DE FOURIER - TRANSFORMADAS DE FOURIER

Usa-se a *série de Fourier* para representar uma função f(x) definida em um intervalo de amplitude $2L\,((-L,L)\,\text{ou}\,(0,L))$. Quando $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas nesse intervalo, uma série de Fourier representa a função no intervalo e converge para um prolongamento periódico de $f(x)$ fora do intervalo.

Estabelece-se neste capítulo uma forma de representação integral de algumas funções definidas na reta (*expansão de f(x) em uma integral de Fourier*). A partir da integral de Fourier, define-se as transformadas de Fourier (direta e inversa) e emprega-se estas transformadas na solução de equações integrais e equações diferenciais ordinárias e parciais.

### *3.1 – Da série de Fourier à integral de Fourier*

Suponha-se uma função f(x) definida em $(-L,L)$ que satisfaça as condições de Dirichlet. Assim:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right];$$

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(u)\,du+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\int_{-L}^{L}f(u)\cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right)du\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\\+\left[\int_{-L}^{L}f(u)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi u}{L}\right)du\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\end{array}\right\}. \qquad (3.1.1)$$

Considerando $\alpha_n=\frac{n\pi}{L}, \Delta\alpha=\alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{(n+1)\pi}{L}-\frac{n\pi}{L}=\frac{\pi}{L}$, reescreve-se (3.1.1) como

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-L}^{L}f(u)\,du\right]\Delta\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\int_{-L}^{L}f(u)\cos(\alpha_n u)\,du\right]\cos(\alpha_n x)+\\+\left[\int_{-L}^{L}f(u)\operatorname{sen}(\alpha_n u)\,du\right]\operatorname{sen}(\alpha_n x)\end{array}\right\}\Delta\alpha\,. \qquad (3.1.2)$$

Como $L\to\infty\Rightarrow\Delta\alpha\to 0$, tem-se que

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-L}^{L}f(u)\,du\right]\Delta\alpha\right\}=0\,.$$

Logo, o restante de (3.1.2) toma a forma

$$f(x) = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n)\Delta\alpha = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} F(n\Delta\alpha)\Delta\alpha . \tag{3.1.3}$$

Em (3.1.3) tem-se uma soma de Riemann, o que leva à integral $\int_0^{\infty} F(\alpha)d\alpha$.

Dessa forma, pode-se escrever o limite de (3.1.2), quando $L \to \infty \Rightarrow \Delta\alpha \to 0$, como

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\{ \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\alpha\, u)du}_{A(\alpha)} \right] \cos(\alpha\, x) + \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\operatorname{sen}(\alpha\, u)du}_{B(\alpha)} \right] \operatorname{sen}(\alpha\, x) \right\} d\alpha .$$

### *3.2 – A integral de Fourier*

A integral de Fourier de uma função f(x) definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos(\alpha\, x) + B(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha\, x)]\,d\alpha$$

onde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha\, x)dx$$

e

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(\alpha\, x)dx .$$

### *3.3 – Convergência da integral de Fourier*

Se:

**(1)** f(x) e f'(x) são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo finito;

**(2)** $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ converge, isto é, f(x) é absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$,

então a integral de Fourier converge para f(x) em um ponto de continuidade e converge para $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ (média dos limites laterais) em um ponto de descontinuidade.

**Demonstração**

SPIEGEL, Murray R.; WREDE, Robert C. *Cálculo avançado*. Porto Alegre: Bookman, 2004.

**Observação**: as condições de convergência da integral de Fourier são suficientes, porém não necessárias.

### 3.3.1 – Convergência absoluta e condicional

A integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)dx$ é dita *absolutamente convergente* se $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ converge. Se $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge mas $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ diverge, então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ é dita *condicionalmente convergente*.

**Teorema**: Se $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ converge, então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

**Exemplos**

1º) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente, isto porque $\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos(x)}{x^2+1}\right|dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ e $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ converge.

2º) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx = \pi$, mas $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right|dx$ diverge. Assim, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$ é condicionalmente convergente.

**Exercício**

Mostre que $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ converge.

### *3.4 – A integral cosseno de Fourier*

Se f(x) é uma função par no intervalo $(-\infty,\infty)$, tem-se que:

$$A(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha\, x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\alpha\, x)dx \;;$$

$$B(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(\alpha\, x)dx = 0 \;;$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\alpha)\cos(\alpha\, x)d\alpha \,.$$ *Integral cosseno de Fourier*

### *3.5 – A integral seno de Fourier*

Se f(x) é uma função ímpar no intervalo $(-\infty,\infty)$, tem-se que:

$$A(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha\, x)dx = 0 \;;$$

$$B(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(\alpha\, x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(\alpha\, x)dx \;;$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} B(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha\, x)d\alpha \,.$$ *Integral seno de Fourier*

**<u>Exercícios</u>**

Seja $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } x<0 \\ 1, & \text{se } 0<x<2 \\ 0, & \text{se } x>2 \end{cases}.$

01. Determine a integral de Fourier de f(x).

Resposta: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos[(x-1)\alpha]}{\alpha}d\alpha$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos[(x-1)\alpha]}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ \dfrac{\pi}{2}, & 0 < x < 2 \\ \dfrac{\pi}{4}, & x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

02. Para quanto a integral de Fourier converge em $x = 0$ e $x = 2$?

03. Prove que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \pi$.

### *3.6 – Formas equivalentes da integral de Fourier*

**(1)**

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos(\alpha\, x) + B(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha\, x)]\, d\alpha$$

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha\, x)dx$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(\alpha\, x)dx$$

**(2)**

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\alpha\, u)du\right]\cos(\alpha\, x) + \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\operatorname{sen}(\alpha\, u)du\right]\operatorname{sen}(\alpha\, x)\right\} d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\cos(\alpha\, u)\cos(\alpha\, x) + \operatorname{sen}(\alpha\, u)\operatorname{sen}(\alpha\, x)]du \right\} d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos[(u - x)\alpha]du \right\} d\alpha$$

**(3) Forma complexa**

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos[(u - x)\alpha]du \right\} d\alpha$$

Como $f(u)\cos[(u - x)\alpha]$ é uma função par em $\alpha$, tem-se que

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos[(u-x)\alpha]du\right\}d\alpha\,. \qquad (3.6.1)$$

Uma vez que $f(u)\mathrm{sen}[(u-x)\alpha]$ é uma função ímpar em $\alpha$, o que implica que $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\mathrm{sen}[(u-x)\alpha]du\right\}d\alpha=0$, pode-se escrever (3.6.1) em uma forma exponencial.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\{f(u)\cos[(u-x)\alpha]+i\,f(u)\mathrm{sen}[(u-x)\alpha]\}du\right\}d\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\{\cos[(u-x)\alpha]+i\,\mathrm{sen}[(u-x)\alpha]\}du\right\}d\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i(u-x)\alpha}du\right]d\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha u}e^{-i\alpha x}du\right]d\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha u}du}_{F(\alpha)}\right]e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \quad \text{onde } F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx\,.$$

**<u>Observação</u>**: se em (3.6.1) se considera $\cos[(x-u)\alpha]$, tem-se que

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \text{ com } F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\alpha x}dx\,.$$

## <u>Exercícios</u>

01. Determine a integral de Fourier que representa a função pulso

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{se}\,|x|<a\\ 0, & \text{se}\,|x|>a\end{cases}. \qquad (3.6.2)$$

Resposta: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(a\alpha)\cos(\alpha x)}{\alpha}d\alpha\,.$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(a\alpha)\cos(\alpha\, x)}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \\ \frac{\pi}{4}, & |x| = a \end{cases}$$

**Observação**: se $a = 1$, a função (3.6.2) é chamada *pulso unitário*.

02. Represente por uma integral de Fourier as funções a seguir.

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0 \\ e^{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ Resposta: $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ .

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0 \\ -\, e^{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ Resposta: $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\alpha\, \text{sen}(\alpha\, x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ .

03. Usando a representação integral de Fourier, mostre que:

a) $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi\alpha)\text{sen}(\alpha x)}{1 - \alpha^2} d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\text{sen}(x), & \text{se } |x| < \pi \\ 0, & \text{se } |x| > \pi \end{cases}$ ;

b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cos(\alpha x)}{1 - \alpha^2} d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos(x), & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ .

### *3.7 – Definição da transformada de Fourier e da transformada de Fourier inversa*

Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha\, x} d\alpha \quad \text{onde } F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha\, x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha\, u} du}_{F(\alpha)} \right] e^{-i\alpha\, x} d\alpha$$

*Transformada de Fourier*

$$\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\alpha x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha x)]dx \qquad (3.7.1)$$

*Transformada de Fourier inversa*

$$\Im^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \qquad (3.7.2)$$

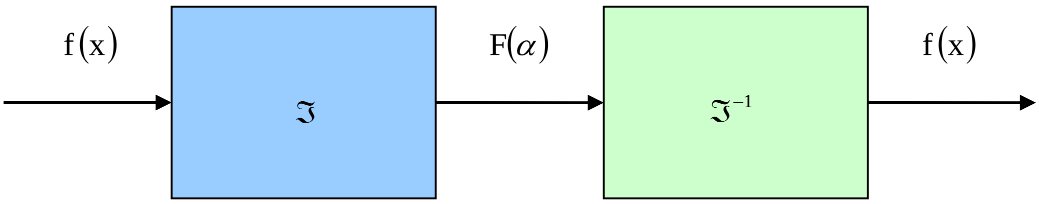



**Figura 3.1**: Transformadas de Fourier.

Define-se a *transformada de Fourier* de f como sendo a função $F(\alpha)$ ou $\hat{f}$ que associa a cada função absolutamente integrável $f : R \to C$ a função $F(\alpha) : R \to C \left( \text{ou } \hat{f} : R \to C \right)$ definida pela expressão (3.7.1); a sua inversa, chamada *transformada de Fourier inversa*, é a função que associa a cada função $F(\alpha) : R \to C \left( \text{ou } \hat{f} : R \to C \right)$ pertencente ao conjunto imagem de $\Im\{f(x)\}$ a função absolutamente integrável $f : R \to C$ definida pela expressão (3.7.2).

$$\boxed{f(x) \rightleftarrows F(\alpha)}$$

Se f(x) é uma função par, então $\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx$ ( $F(\alpha)$ é um real puro); se f(x) é uma função ímpar, então $\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x)dx$ ($F(\alpha)$ é um imaginário puro).

**Observações**

1ª) A literatura não é unânime quanto à forma para as transformadas (3.7.1) e (3.7.2). Nela se encontra também os pares de transformadas abaixo.

**1.**
$$\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$
$$\Im^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

**2.**
$$\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$
$$\Im^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

**3.**
$$\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$
$$\Im^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

2ª) Os pares **2** e **3** constituem a *forma simétrica*.

3ª) Quanto às constantes que multiplicam as integrais nos pares de transformadas, o produto das mesmas deve sempre ser igual a $\frac{1}{2\pi}$.

4ª) A transformada de Fourier é convergente somente para um conjunto muito limitado de funções $f(x)$, isto porque as condições de existência (suficientes, não necessárias) da integral de Fourier são bastante restritivas.

### *3.8 – Transformadas cosseno de Fourier*

A função f(x) é par no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Integral cosseno de Fourier

$$A(\alpha) = 2\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha\, x)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos(\alpha\, x)d\alpha$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u)\cos(\alpha\, u)du\right]\cos(\alpha\, x)d\alpha$$

*Transformada cosseno de Fourier*

$$\Im_C\{f(x)\} = F_C(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos(\alpha\, x)dx$$

*Transformada cosseno de Fourier inversa*

$$\Im_C^{-1}\{F_C(\alpha)\} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_C(\alpha)\cos(\alpha\, x)d\alpha$$

### *3.9 – Transformadas seno de Fourier*

A função f(x) é ímpar no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Integral seno de Fourier

$$B(\alpha) = 2\int_0^\infty f(x)\text{sen}(\alpha\, x)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\alpha)\text{sen}(\alpha\, x)d\alpha$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u)\text{sen}(\alpha\, u)du\right]\text{sen}(\alpha\, x)d\alpha$$

*Transformada seno de Fourier*

$$\Im_S\{f(x)\} = F_S(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\alpha\, x)\,dx$$

*Transformada seno de Fourier inversa*

$$\Im_S^{-1}\{F_S(\alpha)\} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_S(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha\, x)\,d\alpha$$

## Exercícios

01. Seja $f(x)=1$. Calcule $\Im\{f(x)\}$.

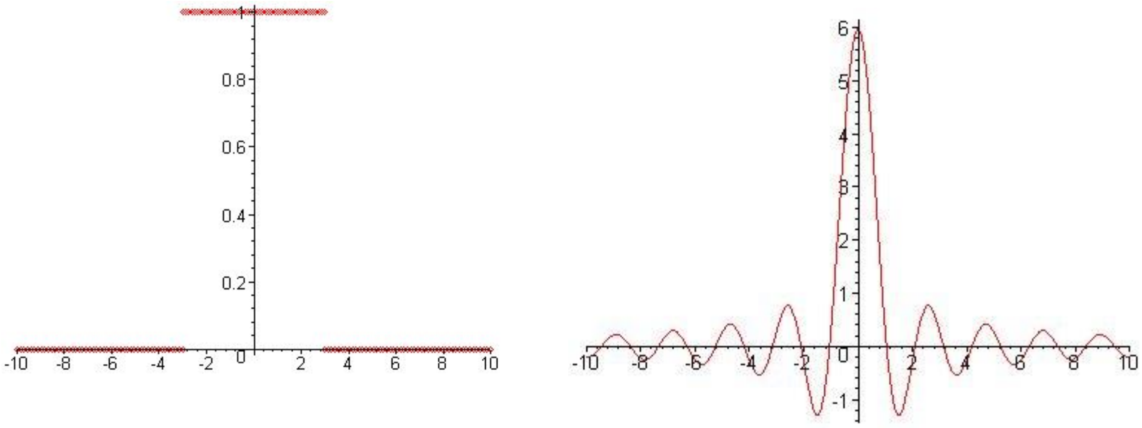
Resposta: $\Im\{f(x)\}$ diverge.

02. a) Determine a transformada de Fourier de $f(x)=\begin{cases}1, & \text{se}\ |x|<a\\ 0, & \text{se}\ |x|>a\end{cases}$.

Resposta: $F(\alpha)=\dfrac{2\,\mathrm{sen}(a\alpha)}{\alpha}=2a\,\mathrm{sinc}(a\alpha),\ \alpha\neq 0$;

$\alpha = 0 \Rightarrow F(0) = 2a$.

b) Esboce o gráfico de f(x) e de sua transformada de Fourier para $a=3$.




(a) (b)

**Figura 3.2**: **(a)** Gráfico de f(x) para $a=3$; **(b)** gráfico de $\Im\{f(x)\}$ para $a=3$ (função par).

c) Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(a\alpha)\cos(\alpha\, x)}{\alpha} d\alpha$ .

Resposta: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(a\alpha)\cos(\alpha\, x)}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi, & \text{se } |x| < a \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } |x| = a \\ 0, & \text{se } |x| > a \end{cases}$ .

03. Solucione a equação integral $\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\alpha\, x)dx = e^{-\alpha}$ .

Resposta: $\int e^{-\alpha}\cos(\alpha x)d\alpha = \frac{x^2}{x^2+1}\left[\frac{e^{-\alpha}\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} - \frac{e^{-\alpha}\cos(\alpha x)}{x^2}\right] + C$;

$f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)}$ .

04. A transformada de Fourier preserva paridade?

05. a) Determine a transformada cosseno de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$ .

Resposta: $F_C(\alpha) = 2\frac{\operatorname{sen}(\alpha) - \alpha\cos(\alpha)}{\alpha^3}, \alpha \neq 0$ .

b) Mostre que $\int_{0}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{x^3}\right]\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{3\pi}{16}$ .

<u>Sugestão</u>: considere $x = \frac{1}{2}$ em $f(x) = \mathfrak{I}^{-1}\{F(\alpha)\}$ .

### *3.10 – Função de Heaviside*

Oliver Heaviside (1850-1925): engenheiro eletrônico inglês.

A função de Heaviside (ou *função unitária de Heaviside*) é definida como

$$H : R - \{0\} \to R$$

$$x \to \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \qquad (3.10.1)$$

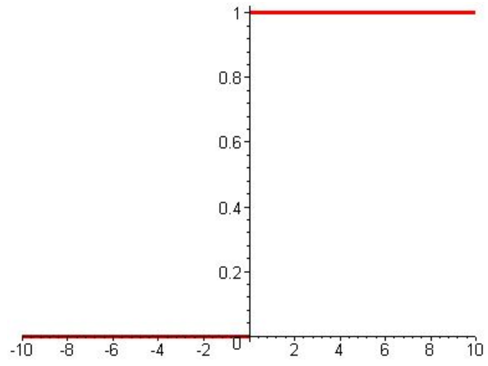



**Figura 3.3**: Função de Heaviside.

A função de Heaviside (3.10.1), também chamada *função salto unitário* ou *função degrau unitário*, não é definida em $x = 0$. Alguns autores definem

$$H(0) = \frac{1}{2}.$$

Na literatura também é comum encontrar a notação $u(x)$ para $H(x)$.

A função degrau unitário transladada é definida como

$$u(x - c) = \begin{cases} 1, & x > c \\ 0, & x < c \end{cases}. \qquad (3.10.2)$$

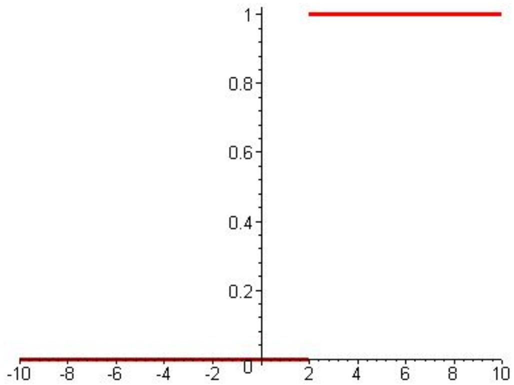



**Figura 3.4**: Função degrau unitário transladada $u(x - 2) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}.$

Quando multiplicada por outra função definida em $(-\infty, \infty)$, a função degrau unitário (3.10.2) cancela uma porção do gráfico da função.

**Exemplo**

Mostre que $\Im\{e^{-ax}\,u(x)\} = \dfrac{1}{a - i\alpha}$, $a > 0$, onde $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ é a *função unitária de Heaviside*.

$$\Im\{e^{-ax}\,u(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}\,u(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{i\alpha x} dx = \int_{0}^{\infty} e^{(-a+i\alpha)x} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(-a+i\alpha)x}}{-a+i\alpha}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-ax}e^{i\alpha x}}{-a+i\alpha}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{e^{-ax}\left[\cos(\alpha x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha x)\right]}{-a+i\alpha}\right\}_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\underbrace{\frac{e^{-ab}\left[\cos(\alpha b) + i\,\mathrm{sen}(\alpha b)\right]}{-a+i\alpha}}_{\to 0 \text{ se } a>0} - \frac{1}{-a+i\alpha}\right\} = -\frac{1}{-a+i\alpha} = \frac{1}{a-i\alpha}$$

**Observações**

1ª) Se $a \in C$, então $\Im\{e^{-ax}\,u(x)\} = \dfrac{1}{a - i\alpha}$, $\mathrm{Re}(a) > 0$.

2ª) A função $f(x) = e^{-ax}$ não é absolutamente integrável; já a função $f(x) = e^{-ax}\,u(x)$ é absolutamente integrável.

**Exercício**

Mostre que $f(x) = e^{-ax}\,u(x)$ é absolutamente integrável.

### *3.11 – Espectro, amplitude e fase da transformada de Fourier*

Denomina-se *conjunto dos números complexos* (C) o conjunto de pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as seguintes propriedades:

1. *igualdade*: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$;
2. *adição*: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$;
3. *multiplicação*: $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

$$z \in C \Leftrightarrow z = (x, y),\ \ x, y \in R$$

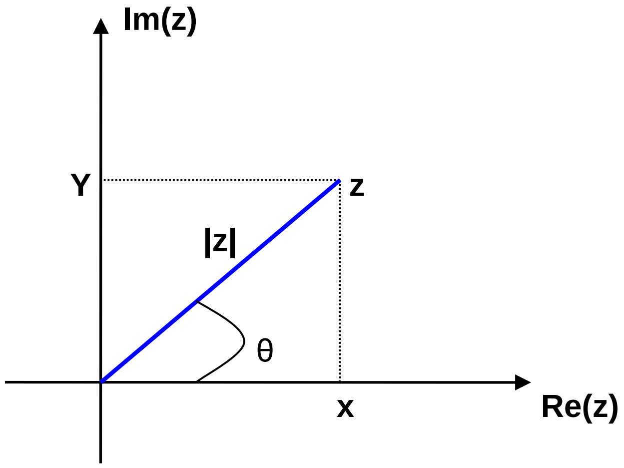
<u>Exemplos</u>: $2i + 3 = (2{,}3)$, $i = (0{,}1)$ (imaginário puro), $1 = (1{,}0)$ (real puro).

**Forma algébrica**: $z = x + i\,y,\ i = \sqrt{-1}$.

$$i^2 = i.i = (0{,}1).(0{,}1) = (0 - 1{,}0 + 0) = (-1{,}0) = -1$$

**Conjugado**: $\bar{z} = \overline{x + i\,y} = x - i\,y$.

**Plano de Argand-Gauss**




<u>**Figura 3.5**</u>: Plano de Argand-Gauss.

**Módulo**: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$;

$$z.\bar{z} = (x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

**Forma polar ou trigonométrica**:

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z|\cos\theta;$$

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z|\mathrm{sen}\theta;$$

$$z = x + i\,y = |z|\cos\theta + i|z|\mathrm{sen}\theta = |z|[\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta] = |z|\,e^{i\theta}.$$

**Argumento**: $\text{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \theta = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \text{arctg}\left(\dfrac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)$.

Sabe-se que $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$, onde $f : R \to C$ e $F : R \to C$. Assim, pode-se considerar a transformada de Fourier $F(\alpha)$ como sendo

$$F(\alpha) = F_R(\alpha) + i\, F_I(\alpha) \tag{3.11.1}$$

ou

$$F(\alpha) = |F(\alpha)|\, e^{i\theta}, \tag{3.11.2}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, $F_R(\alpha)$ é a *parte real* de $F(\alpha)$, $F_I(\alpha)$ é a *parte imaginária* de $F(\alpha)$,

$$|F(\alpha)| = \sqrt{{F_R}^2(\alpha) + {F_I}^2(\alpha)} \tag{3.11.3}$$

e

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{F_I(\alpha)}{F_R(\alpha)}\right). \tag{3.11.4}$$

A forma (3.11.2) é a *forma polar* da transformada de Fourier, (3.11.3) é a *amplitude* da transformada de Fourier ou o *espectro de amplitude* do sinal $f(x)$, (3.11.4) é o *ângulo de fase* da transformada de Fourier ou o *espectro de fase* do sinal $f(x)$ e

$$P(\alpha) = |F(\alpha)|^2 = {F_R}^2(\alpha) + {F_I}^2(\alpha) \tag{3.11.5}$$

é o *espectro de potência* do sinal $f(x)$.

**Exercícios**

Seja $f(x) = e^{-ax}\, u(x)$, onde $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ é a função unitária de Heaviside e $a > 0$.

Determine:

01. a parte real de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $F_R(\alpha) = \dfrac{a}{a^2 + \alpha^2}$

02. a parte imaginária de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $F_I(\alpha) = \dfrac{\alpha}{a^2 + \alpha^2}$

03. o ângulo de fase de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $\theta = \text{arctg}\left(\dfrac{\alpha}{a}\right)$

04. a amplitude de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $|F(\alpha)| = \dfrac{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}{a^2 + \alpha^2}$

05. o espectro de potência de $f(x)$. Resposta: $P(\alpha) = \dfrac{1}{a^2 + \alpha^2}$

### *3.12 – Propriedades operacionais das transformadas de Fourier*

**Funções de decrescimento rápido**

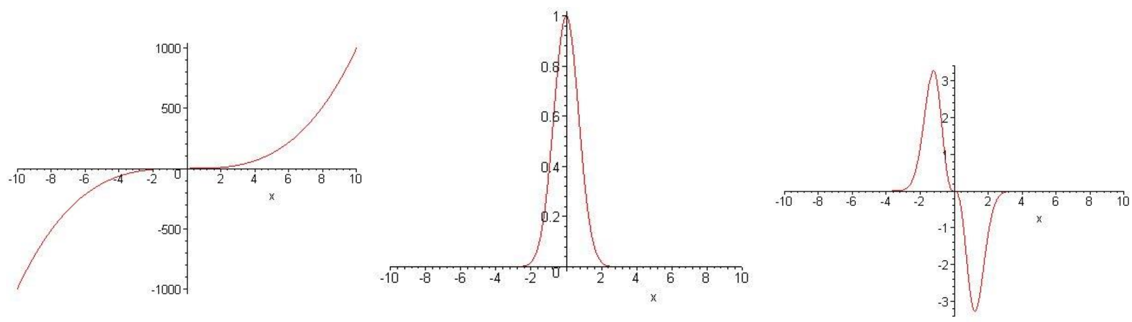
Uma função $f: R \to C$ é de *decrescimento rápido* se ela for infinitamente diferenciável (f é $C^{\infty}$) e se

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m D^n f(x) = 0,$$

ou seja, f(x) e suas derivadas vão mais rapidamente para zero do que as potências $x^m$ vão para infinito quando $|x| \to \infty$.

**Exemplo**

$f(x) = e^{-x^2}$



(a) (b) (c)

**Figura 3.6**: **(a)** Gráfico de $f(x) = x^3$; **(b)** gráfico de $g(x) = e^{-x^2}$; **(c)** gráfico de $D^3 g(x) = -8x^3 e^{-x^2}$.

O conjunto das funções $f$ de classe $C^{\infty}(R)$ tais que, tanto $f$ como todas as suas derivadas tendem a zero quando $|x| \to \infty$, constituem o *espaço de Schwarz*, denotado por $S(R)$.

1. A função Gaussiana $f(x) = e^{-ax^2}$, com $a > 0$, pertence a $S(R)$.
2. O produto de uma função polinomial $p = p(x)$ pela função Gaussiana é uma função $h(x) = p(x)e^{-ax^2}$ pertencente a $S(R)$.
3. $S(R)$ é um espaço vetorial de funções.
4. Se uma função $f(x)$ pertence a $S(R)$, então sua derivada também pertence a $S(R)$.

5. Se uma função $f(x)$ pertence a $S(R)$, então a transformada de Fourier de $f(x)$ também pertence a $S(R)$.

### 3.12.1 – Comportamento de F(α) quando |α|→∞

A transformada de Fourier $F(\alpha)$ de uma função $f(x)$ absolutamente integrável é uma função contínua e que se anula no infinito, isto é,

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty} F(\alpha) = 0 .$$

**Exemplo**

A função pulso unitário $u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se}\,|x| \le 1 \\ 0, & \text{se}\,|x| > 1 \end{cases}$, cuja transformada de Fourier é

$$\Im\{u(x)\} = U(\alpha) = \frac{2\,\text{sen}(\alpha)}{\alpha}, \alpha \neq 0, \alpha = 0 \Rightarrow U(0) = 2 .$$

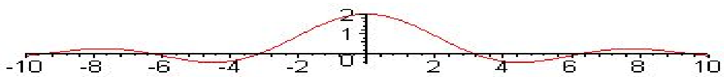



**Figura 3.7**: Gráfico de $\Im\{u(x)\} = U(\alpha) = \dfrac{2\,\text{sen}(\alpha)}{\alpha}, \alpha \neq 0, \alpha = 0 \Rightarrow U(0) = 2$.

**Teorema**

Se $f : R \to C$ é uma função absolutamente integrável, então sua transformada de Fourier $F(\alpha): R \to C$ (ou $\hat{f} : R \to C$) é uma função contínua e limitada. Se, além disso, $F(\alpha)$ (ou $\hat{f}$) for absolutamente integrável, então f é contínua.

### 3.12.2 – Linearidade

Se $f, g : R \to C$ são *funções absolutamente integráveis* e $a, b \in R$, então

$$\Im\{af(x)+bg(x)\}=a\Im\{f(x)\}+b\Im\{g(x)\}=aF(\alpha)+bG(\alpha).$$

**<u>Prova</u>**: segue da definição de transformada de Fourier e da propriedade de linearidade da integral.

$$\Im\{af(x)+bg(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}[af(x)+bg(x)]e^{i\alpha x}dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx+b\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{i\alpha x}dx=aF(\alpha)+bG(\alpha)$$

**3.12.3 – Simetria (ou dualidade)**

Se $\Im\{f(x)\}=F(\alpha)$, então $\Im\{F(x)\}=2\pi f(-\alpha)$.

**<u>Prova</u>**

$$\Im^{-1}\{F(\alpha)\}=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha=2\pi f(x) \qquad (3.12.3.1)$$

Efetuando as substituições $\alpha \leftarrow x$ e $x \leftarrow -\alpha$ em (3.12.3.1), tem-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-i\,x(-\alpha)}dx=2\pi f(-\alpha);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{\,i\alpha x}dx=2\pi f(-\alpha);$$

$$\Im\{F(x)\}=2\pi f(-\alpha).$$

**<u>Exemplo</u>**

$$\Im\left\{e^{-2|x|}x^2\right\}=8\frac{4-3\alpha^2}{\left(\alpha^2+4\right)^3}$$

$$\Im\left\{\frac{4-3x^2}{\left(x^2+4\right)^3}\right\}=\frac{1}{8}2\pi e^{-2|\alpha|}\alpha^2=\frac{\pi}{4}\alpha^2e^{-2|\alpha|}$$

**3.12.4 – Conjugado**

Se $f:R\rightarrow C$ é uma função *absolutamente integrável*, então

$\Im\left\{\overline{f(x)}\right\} = \overline{F(-\alpha)}$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$ e $\bar{\ }$ é o conjugado complexo.

**Prova**

$$\Im\left\{\overline{f(x)}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\left[\cos(\alpha x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha x)\right] dx$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x} dx} = \overline{F(-\alpha)}$$

**Observação**: $\overline{f.g} = \bar{f}.\bar{g}$ e $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$.

### 3.12.5 – Translação (no tempo)

Se $f: R \to C$ é uma função *absolutamente integrável*, então

$$\Im\{f(x-a)\} = e^{ia\alpha} F(\alpha), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}.$$

**Prova**

$x - a = u$

$$\Im\{f(x-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\, e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha(u+a)} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha a} e^{i\alpha u} du = e^{i\alpha a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u} du = e^{ia\alpha} F(\alpha), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$$

**Observação**: se $\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x} dx$, então $\Im\{f(x-a)\} = e^{-ia\alpha} F(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

### 3.12.6 – Translação (na frequência)

Se $f: R \to C$ é uma função *absolutamente integrável*, então

$$\Im\left\{e^{iax} f(x)\right\} = F(\alpha + a), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}.$$

**Prova**

$\alpha + a = u$

$$\Im\{e^{ia\,x} f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\,x} f(x) e^{i\alpha\,x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i(\alpha+a)x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux} dx = F(u) = F(\alpha + a)$$

**Observação**: se $\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha\,x} dx$, então $\Im\{e^{ia\alpha} f(x)\} = F(\alpha - a)$.

### 3.12.7 – Similaridade (ou mudança de escala) e inversão de tempo

Se $f : R \to C$ é uma função *absolutamente integrável* e $a \neq 0$, então

$$\Im\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right), \text{onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}. \qquad (3.12.7.1)$$

**Prova**

**(1)** $a > 0,\ ax = u,\ x = \frac{u}{a},\ dx = \frac{du}{a},\ x \to \infty \Rightarrow u \to \infty,\ x \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty$

$$\Im\{f(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{i\alpha\,x} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha \frac{u}{a}} du$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iu\frac{\alpha}{a}} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

**(2)** $a < 0,\ ax = u,\ x = \frac{u}{a},\ dx = \frac{du}{a},\ x \to \infty \Rightarrow u \to -\infty,\ x \to -\infty \Rightarrow u \to \infty$

$$\Im\{f(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{i\alpha\,x} dx = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{i\alpha \frac{u}{a}} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha \frac{u}{a}} du$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iu\frac{\alpha}{a}} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

**Observação**: considerando-se em (3.12.7.1) $a = -1$, obtém-se $\Im\{f(-x)\} = F(-\alpha)$. Esta última igualdade é conhecida como *propriedade da inversão de tempo.*

**Exercícios**

Sabendo que $\Im\{g(x)\} = G(\alpha) = \dfrac{i\alpha}{-\alpha^2 + 5i\alpha + 6}$, calcule:

01. $\Im\{g(2x)\}$; Resposta: $\Im\{g(2x)\} = \dfrac{1}{2}G\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{i\alpha}{-\alpha^2 + 10i\alpha + 24}$

02. $\Im\{g(x-2)\}$; Resposta: $\Im\{g(x-2)\} = e^{2i\alpha}G(\alpha) = e^{2i\alpha}\dfrac{i\alpha}{-\alpha^2 + 5i\alpha + 6}$

03. $\Im\{e^{-100ix}g(x)\}$. Resposta: $\Im\{e^{-100ix}g(x)\} = G(\alpha - 100) = \dfrac{i(\alpha - 100)}{-(\alpha-100)^2 + 5i(\alpha - 100) + 6}$

### 3.12.8 – Convolução

A *convolução* (ou *produto de convolução*) de duas funções absolutamente integráveis $f(x)$ e $g(x)$ é definida como sendo a função

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du\,.$$

A integral imprópria que define a convolução converge para todo $x$ se as funções $f(x)$ e $g(x)$, além de serem absolutamente integráveis, são também *quadrado-integráveis*, isto é, seus quadrados também são absolutamente integráveis.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du < \infty$$

A afirmativa anterior pode ser comprovada com o emprego da *desigualdade de Schwarz*

$$|ab| \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

válida para todo $a, b \in R$.

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u)g(u)|du \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u)|^2 du + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du < \infty$$

A convolução de funções absolutamente integráveis, quando está definida, é também uma função absolutamente integrável.

**<u>Transformada de Fourier de uma convolução</u>**

Se $f, g : R \to C$ são funções *absolutamente integráveis*, então

$$\Im\{(f * g)(x)\} = F(\alpha)G(\alpha), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\} \text{ e } G(\alpha) = \Im\{g(x)\}.$$

**Prova**

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du \right\} e^{i\alpha x} dx$$

Como $e^{i\alpha x} = e^{i\alpha u} e^{i\alpha(x-u)}$:

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du \right\} e^{i\alpha u} e^{i\alpha(x-u)} dx .$$

Mudando-se a ordem de integração:

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u) e^{i\alpha(x-u)} dx \right\} e^{i\alpha u} du .$$

Considerando-se $x - u = v \Rightarrow x = u + v \Rightarrow dx = dv$.

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{i\alpha v} dv \right\} e^{i\alpha u} du$$

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \Im\{g\} e^{i\alpha u} du$$

$$\Im\{f * g\} = \Im\{g\} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u} du$$

$$\Im\{f * g\} = \Im\{g\} \Im\{f\}$$

$$\Im\{f * g\} = F(\alpha) G(\alpha)$$

**Propriedades da convolução**

**1ª) Comutativa** $f * g = g * f$

**2ª) Associativa** $f * (g * h) = (f * g) * h$

**3ª) Distributiva** $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

**4ª) Elemento nulo** $f * 0 = 0$

**5ª) Elemento identidade** $\delta * f = f$ $\delta$ **:** delta de Dirac (distribuição)

Modelos matemáticos que envolvem a convolução estão presentes em diferentes ramos do conhecimento. A convolução modela distorções em ondas sonoras e luminosas, surge no processamento de sinais e na detecção de ondas eletromagnéticas e/ou mecânicas e é também base de alguns sistemas de redes neurais de autoaprendizagem. Na Matemática, a convolução é empregada na solução de sistemas lineares de equações diferenciais e na solução de alguns tipos de equações integrais. Na Estatística, é usada para calcular funções de densidade de probabilidade.

**Exemplo**

Solucione a equação integral

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u) r(x-u) du \text{ ,}$$

onde $g(x)$ e $r(x)$ são conhecidas.

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u) r(x-u) du$$
$$y(x) = g(x) + (y * r)$$
$$\Im\{y(x)\} = \Im\{g(x) + (y * r)\}$$
$$\Im\{y(x)\} = \Im\{g(x)\} + \Im\{y * r\}$$
$$Y(\alpha) = G(\alpha) + Y(\alpha)R(\alpha)$$
$$Y(\alpha) - Y(\alpha)R(\alpha) = G(\alpha)$$
$$[1 - R(\alpha)]Y(\alpha) = G(\alpha)$$
$$Y(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{1 - R(\alpha)}$$
$$\Im^{-1}\{Y(\alpha)\} = \Im^{-1}\left\{\frac{G(\alpha)}{1 - R(\alpha)}\right\}$$
$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{G(\alpha)}{1 - R(\alpha)}\right] e^{-i\alpha x} d\alpha$$

**Exercícios**

01. Mostre que:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ ;

b) $x * e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-u) e^{-u^2} du = x\sqrt{\pi}$ .

02. Mostre que $f(x) * u(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\kappa)d\kappa$, sendo $u(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

### 3.12.9 – Multiplicação (Convolução na frequência)

Se $f, g : R \to C$ são funções *absolutamente integráveis*, então

$$\Im\{f(x).g(x)\} = \frac{1}{2\pi} F(\alpha) * G(\alpha), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\} \text{ e } G(\alpha) = \Im\{g(x)\}.$$

**Prova**

$$\Im\{f(x).g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa)e^{-i x \kappa}d\kappa \right] g(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i(\alpha-\kappa)x}dx \right] d\kappa$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa)G(\alpha - \kappa)d\kappa$$

$$= \frac{1}{2\pi} F(\alpha) * G(\alpha)$$

### 3.12.10 – Transformada de Fourier de derivadas

Sejam $f : R \to C$ uma função *diferenciável absolutamente integrável* e $f'$ uma função *absolutamente integrável*. Como $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, então

$$\Im\{f'(x)\} = -i\alpha F(\alpha), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}.$$

Sejam $f : R \to C$ uma função *duas vezes diferenciável absolutamente integrável* e $f'$ e $f''$ funções *absolutamente integráveis*. Como $f'(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, então

$$\Im\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha), \text{onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}.$$

Generalizando, sejam $f: R \to C$ uma função *n vezes diferenciável absolutamente integrável* e as derivadas até ordem *n* de *f* funções *absolutamente integráveis*. Como $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, então

$$\Im\{f^{(n)}(x)\} = (-i\alpha)^n F(\alpha), \text{onde } n \in Z, n \geq 1, F(\alpha) = \Im\{f(x)\}.$$

**Prova**

$$\Im\{f'(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Im\{f'(x)\} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f'(x) e^{i\alpha x} dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b f'(x) e^{i\alpha x} dx \qquad (3.12.10.1)$$

Integrando por partes.

$$u = e^{i\alpha x} \Rightarrow du = i\alpha\, e^{i\alpha x} dx$$
$$dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x)$$

$$\int f'(x) e^{i\alpha x} dx = f(x) e^{i\alpha x} - i\alpha \int f(x) e^{i\alpha x} dx \qquad (3.12.10.2)$$

Empregando-se (3.12.10.2) e (3.12.10.1).

$$\Im\{f'(x)\} = \lim_{a \to -\infty} \left\{ \left[f(x) e^{i\alpha x}\right]_a^0 - i\alpha \int_a^0 f(x) e^{i\alpha x} dx \right\} + \lim_{b \to \infty} \left\{ \left[f(x) e^{i\alpha x}\right]_0^b - i\alpha \int_0^b f(x) e^{i\alpha x} dx \right\}$$

$$\Im\{f'(x)\} = \lim_{a \to -\infty} \left\{ f(0) - f(a) e^{i\alpha a} - i\alpha \int_a^0 f(x) e^{i\alpha x} dx \right\} + \lim_{b \to \infty} \left\{ f(b) e^{i\alpha b} - f(0) - i\alpha \int_0^b f(x) e^{i\alpha x} dx \right\}$$

$$\Im\{f'(x)\} = -i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Im\{f'(x)\} = -i\alpha \Im\{f(x)\} = -i\alpha\, F(\alpha)$$

Por recursividade:

$$\Im\{f''(x)\} = -i\alpha\, \Im\{f'(x)\} = (-i\alpha)(-i\alpha)\Im\{f(x)\} = -\alpha^2\, \Im\{f(x)\} = -\alpha^2\, F(\alpha).$$

**Exercícios**

01. Mostre que $\Im\{f'(x)\} = i\alpha F(\alpha)$ se $F(\alpha) = \Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$ .

02. Sejam $f: R \to C$ uma função *diferenciável absolutamente integrável* e $f'$ uma função *absolutamente integrável*. Como $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, mostre que:

a) $\Im_C\{f'(x)\} = \alpha\, \Im_S\{f(x)\} - f(0) = \alpha\, F_S(\alpha) - f(0)$;

b) $\Im_S\{f'(x)\} = -\alpha\, \Im_C\{f(x)\} = -\alpha\, F_C(\alpha)$.

**Observação**: as transformadas seno e cosseno de Fourier não são adequadas para transformar a derivada primeira (ou qualquer derivada de ordem ímpar), isto porque a transformada seno (ou cosseno) da derivada de f não é expressa em termos da transformada seno (ou cosseno) da função f.

03. Sejam $f: R \to C$ uma função *duas vezes diferenciável absolutamente integrável* e $f'$ e $f''$ funções *absolutamente integráveis*. Como $f'(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, mostre que:

a) $\Im_C\{f''(x)\} = -\alpha^2\, \Im_C\{f(x)\} - f'(0) = -\alpha^2\, F_C(\alpha) - f'(0)$;

b) $\Im_S\{f''(x)\} = -\alpha^2\, \Im_S\{f(x)\} + \alpha\, f(0) = -\alpha^2\, F_S(\alpha) + \alpha\, f(0)$.

### 3.12.11 – Derivadas de transformadas de Fourier

Se $f: R \to C$ é uma função *absolutamente integrável* e $x\,f(x)$ também é uma função *absolutamente integrável*, então

$\Im\{xf(x)\} = -i\,F'(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

Se $f: R \to C$ é uma função *absolutamente integrável* e $x^2\,f(x)$ também é uma função *absolutamente integrável*, então

$\Im\{x^2 f(x)\} = -F''(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

Se $f: R \to C$ é uma função *absolutamente integrável* e $x^n\,f(x)$ também é uma função *absolutamente integrável*, então

$\Im\{x^n f(x)\} = (-i)^n\, F^{(n)}(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

**Prova**

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[f(x)e^{i\alpha x}\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}ix\,f(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=i\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\,f(x)\right]e^{i\alpha x}dx=i\Im\{xf(x)\}$$

$$\Im\{xf(x)\}=\frac{1}{i}F'(\alpha)$$

$$\Im\{xf(x)\}=-i\,F'(\alpha)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}F(\alpha)=\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[f(x)e^{i\alpha x}\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}i^2x^2f(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}F(\alpha)=-\int_{-\infty}^{\infty}\left[x^2\,f(x)\right]e^{i\alpha x}dx=-\Im\{x^2f(x)\}$$

$$\Im\{x^2f(x)\}=-F''(\alpha)$$

**Exemplos**

1º)

$$\begin{aligned}\Im\{(2x-x^2+3x^3)f(x)\}&=2\Im\{x\,f(x)\}-\Im\{x^2\,f(x)\}+3\Im\{x^3\,f(x)\}\\&=-2\;i\,F'(\alpha)+F''(\alpha)+3\,i\,F'''(\alpha)\end{aligned}$$

2º)

$$\Im\{xe^{-ax}\,u(x)\}=(-i)\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{a-i\alpha}\right]=-i\frac{-(-i)}{(a-i\alpha)^2}=\frac{1}{(a-i\alpha)^2}$$

$\mathrm{Re}(a)>0$ e $u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

3º)

$$\Im\{x^2e^{-ax}\,u(x)\}=(-i)^2\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{1}{a-i\alpha}\right]=-i\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{(a-i\alpha)^2}\right]=-i\frac{-2(a-i\alpha)(-i)}{(a-i\alpha)^4}=\frac{2}{(a-i\alpha)^3}$$

$\mathrm{Re}(a)>0$ e $u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

4º)

$$\Im\{x^3 e^{-ax}\, u\,(x)\} = (-i)^3 \frac{d^3}{d\alpha^3}\left[\frac{1}{a-i\alpha}\right] = -\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{1}{(a-i\alpha)^2}\right] = \frac{6}{(a-i\alpha)^4}$$

$$\mathrm{Re}(a) > 0 \text{ e } u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

5º)

$$\Im\{x^n e^{-ax}\, u\,(x)\} = \frac{n!}{(a-i\alpha)^{n+1}}$$

$$\mathrm{Re}(a) > 0 \text{ e } u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

**<u>Exercícios</u>**

01. Seja $f(x) = x\, e^{-ax}\, u(x)$, onde $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ é a função unitária de Heaviside e $a > 0$.

Determine:

a) a parte real de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $F_R(\alpha) = \dfrac{a^2 - \alpha^2}{(a^2 + \alpha^2)^2}$

b) a parte imaginária de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $F_I(\alpha) = \dfrac{2a\alpha}{(a^2 + \alpha^2)^2}$

c) o ângulo de fase de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2a\alpha}{a^2 - \alpha^2}\right)$

d) a amplitude de $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$; Resposta: $|F(\alpha)| = \dfrac{1}{a^2 + \alpha^2}$

e) o espectro de potência de $f(x)$. Resposta: $P(\alpha) = \dfrac{1}{(a^2 + \alpha^2)^2}$

02. Prove a propriedade da diferenciação na frequência $\Im\{i\, x\, f(x)\} = \dfrac{d}{d\alpha} F(\alpha)$.

### *3.13 – Resumo: propriedades operacionais das transformadas de Fourier*

**1. Linearidade**

$$\Im\{af(x)+bg(x)\}=a\Im\{f(x)\}+b\Im\{g(x)\}=aF(\alpha)+bG(\alpha)$$

**2. Simetria**

Se $F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$, então $\Im\{F(x)\}=2\pi f(-\alpha)$.

**3. Conjugado**

Se $F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$, então $\Im\{\overline{f(x)}\}=\overline{F(-\alpha)}$.

**4. Translação (no tempo)**

$$\Im\{f(x-a)\}=e^{ia\alpha}F(\alpha), \text{onde } F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$$

**5. Translação (na freqüência)**

$$\Im\{e^{iax}f(x)\}=F(\alpha+a), \text{onde } F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$$

**6. Dilatação (ou similaridade)**

$$\Im\{f(ax)\}=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\alpha}{a}\right), \text{onde } F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$$

**7. Inversão de tempo**

$\Im\{f(-x)\}=F(-\alpha)$, onde $F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$

**8. Convolução**

$$\Im\{(f*g)(x)\}=F(\alpha)G(\alpha), \text{onde } F(\alpha)=\Im\{f(x)\} \text{ e } G(\alpha)=\Im\{g(x)\}$$

**9. Multiplicação (convolução na frequência)**

Se $F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$ e $G(\alpha)=\Im\{g(x)\}$, então $\Im\{f(x).g(x)\}=\frac{1}{2\pi}F(\alpha)*G(\alpha)$.

**10. Transformada da derivada primeira**

$$\Im\{f'(x)\}=-i\alpha F(\alpha), \text{onde } F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$$

$$\Im_C\{f'(x)\}=\alpha\,\Im_S\{f(x)\}-f(0)=\alpha\,F_S(\alpha)-f(0)$$

$$\Im_S\{f'(x)\}=-\alpha\,\Im_C\{f(x)\}=-\alpha\,F_C(\alpha)$$

**11. Transformada da derivada segunda**

$$\Im\{f''(x)\}=-\alpha^2 F(\alpha), \text{onde } F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$$

$$\Im_C\{f''(x)\}=-\alpha^2\,\Im_C\{f(x)\}-f'(0)=-\alpha^2 F_C(\alpha)-f'(0)$$

$$\Im_S\{f''(x)\}=-\alpha^2\,\Im_S\{f(x)\}+\alpha\,f(0)=-\alpha^2 F_S(\alpha)+\alpha\,f(0)$$

**12. Transformada de derivadas**

$$\Im\{f^{(n)}(x)\}=(-i\alpha)^n F(\alpha), \text{onde } n\in Z, n\geq 1, F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$$

| | |
|---|---|
| **13. Derivadas de transformadas de Fourier**<br>$\Im\{xf(x)\} = -i\,F'(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$<br>$\Im\{x^2 f(x)\} = -F''(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$<br>$\Im\{x^n f(x)\} = (-i)^n F^{(n)}(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$ | |
| **14. Diferenciação na frequência**<br>$\Im\{i\,x\,f(x)\} = \dfrac{d}{d\alpha}F(\alpha)$ | |

**Tabela 3.1**: Propriedades das transformadas de Fourier.

### *3.14 – Delta de Dirac*

Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984): físico, matemático e engenheiro britânico. Partilhou o Nobel de Física de 1933 com Erwin Schrödinger.

**Função impulso unitário**

$$\delta_a(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & x_0 - a \le x < x_0 + a \qquad a > 0 \\ 0, & x \ge x_0 + a \end{cases} \tag{3.14.1}$$

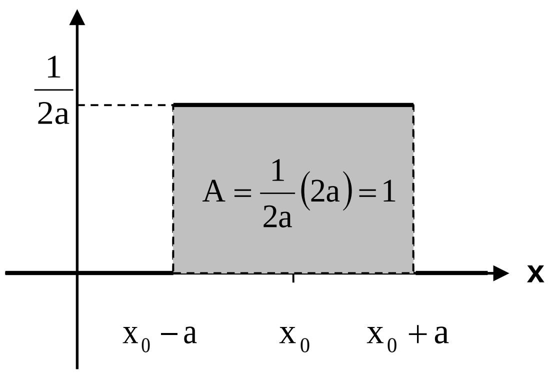



**Figura 3.8**: Função impulso unitário.

A função (3.14.1) pode ser compactada usando-se a função degrau unitário. Assim,

$$\delta_a(x - x_0) = \frac{1}{2a}\{u[x - (x_0 - a)] - u[x - (x_0 + a)]\},$$

onde

$$u[x-(x_0-a)] = \begin{cases} 1, & x > x_0 - a \\ 0, & x < x_0 - a \end{cases} \quad \text{e} \quad u[x-(x_0+a)] = \begin{cases} 1, & x > x_0 + a \\ 0, & x < x_0 + a \end{cases}.$$

Considerando-se

$$\delta(x-x_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(x-x_0),$$

tem-se a *distribuição delta de Dirac*

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = x_0 \\ 0, & \text{se } x \neq x_0 \end{cases}. \qquad (3.14.2)$$

A distribuição (3.14.2) pode ser escrita como $\delta_c(x) = \delta(x-c) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \neq c \end{cases}$.

Quando $c = 0$, tem-se que $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$.

Fisicamente, o delta de Dirac pode ser interpretado como um impulso de energia em um sistema, razão pela qual recebe o nome de função impulso de Dirac.

### 3.14.1 – Propriedades do delta de Dirac

A distribuição delta de Dirac $\delta = \delta(x)$ apresenta as seguintes propriedades:

1. $\delta(x) = 0, \text{ se } x \neq 0$;
2. $\delta(x) = \delta(-x), \forall x \in R$;
3. $\delta(0) = \infty$;
4. $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ se $f(x)$ for contínua em $x = 0$;
5. $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$ se $f(x)$ for contínua em $x = x_0$;
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$;
7. $(f * \delta)(x) = f(x)$, se $f(x)$ é contínua;
8. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$, se $f(x)$ é contínua em $x = 0$;
9. $(f * \delta_c)(x) = f(c)$, se $f(x)$ é contínua em $x = c$;
10. $\delta(x) = u'(x) = \frac{d}{dx} u(x)$, onde $u(x)$ é a função degrau unitário;

11. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

**<u>Observação</u>**: mais informações a respeito do delta de Dirac podem ser obtidas em HSU, H.P. *Sinais e sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 2004.

### 3.14.2 – Transformada de Fourier do delta de Dirac

Aplicando-se a transformada de Fourier à propriedade 7, prova-se a transformada de Fourier do Delta de Dirac.

$$(f * \delta)(x) = f(x)$$

$$\Im\{(f * \delta)(x)\} = \Im\{f(x)\}$$

$$\Im\{f(x)\}\Im\{\delta(x)\} = \Im\{f(x)\}$$

$$\Im\{\delta(x)\} = 1$$

$$\Im^{-1}\{1\} = \delta(x)$$

Dessa maneira, pode-se escrever o par de transformadas

$$\delta(x) \rightleftarrows 1.$$

### *3.15 – Métodos para obter a transformada de Fourier*

### 3.15.1 – Uso da definição e propriedades

Mostre que $\Im\left\{e^{-a|x|}\right\} = \frac{2a}{\alpha^2 + a^2}$, $\mathrm{Re}(a) > 0$.

$$e^{-a|x|} = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ e^{ax}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Im\left\{e^{-a|x|}\right\} = \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{i\alpha x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(a+i\alpha)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-a+i\alpha)x}dx$$

$$= \lim_{k_1\to-\infty}\left[\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha}\right]_{k_1}^{0} + \lim_{k_2\to\infty}\left[\frac{e^{(-a+i\alpha)x}}{-a+i\alpha}\right]_{0}^{k_2}$$

$$= \lim_{k_1\to-\infty}\left\{\frac{e^{ax}[\cos(\alpha x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha x)]}{a+i\alpha}\right\}_{k_1}^{0} + \lim_{k_2\to\infty}\left\{\frac{e^{-ax}[\cos(\alpha x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha x)]}{-a+i\alpha}\right\}_{0}^{k_2}$$

$$= \lim_{k_1 \to -\infty} \left\{ \frac{1}{a+i\alpha} - \underbrace{\frac{e^{ak_1}\left[\cos(\alpha k_1) + i\,\mathrm{sen}(\alpha k_1)\right]}{a+i\alpha}}_{\to 0 \text{ se } \mathrm{Re}(a)>0} \right\} +$$

$$+ \lim_{k_2 \to \infty} \left\{ \underbrace{\frac{e^{-ak_2}\left[\cos(\alpha k_2) + i\,\mathrm{sen}(\alpha k_2)\right]}{-a+i\alpha}}_{\to 0 \text{ se } \mathrm{Re}(a)>0} - \frac{1}{-a+i\alpha} \right\}$$

$$= \frac{1}{a+i\alpha} - \frac{1}{-a+i\alpha} = \frac{-a+i\alpha-(a+i\alpha)}{(i\alpha)^2 - a^2} = \frac{-2a}{-\alpha^2 - a^2} = \frac{2a}{\alpha^2 + a^2}$$

## Exemplo 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|+2i\,x}dx = \Im\left\{e^{-3|x|}\right\}\Big|_{\alpha=2} = \frac{2(3)}{2^2+3^2} = \frac{6}{13}$$

## Exemplo 2

Seja $f : R \to R \,/\, f(x) = x^6 e^{-a|x|}$.

1. Determine $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

$\Im\left\{x^n f(x)\right\} = (-i)^n F^{(n)}(\alpha)$, $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$ e $\Im\left\{e^{-a|x|}\right\} = \dfrac{2a}{\alpha^2+a^2}$, $a > 0$.

$$\Im\left\{x^6 e^{-a|x|}\right\} = F(\alpha) = (-i)^6 \frac{d^6}{d\alpha^6}\left[\frac{2a}{\alpha^2+a^2}\right] = -2a\frac{d^6}{d\alpha^6}\left[\frac{1}{\alpha^2+a^2}\right]$$

$$= -2a\frac{d^5}{d\alpha^5}\left[\frac{-2\alpha}{\left(\alpha^2+a^2\right)^2}\right] = 4a\frac{d^5}{d\alpha^5}\left[\frac{\alpha}{\left(\alpha^2+a^2\right)^2}\right]$$

$$= 4a\frac{d^4}{d\alpha^4}\left[\frac{\left(\alpha^2+a^2\right)^2 - 2\alpha\left(\alpha^2+a^2\right)2\alpha}{\left(\alpha^2+a^2\right)^4}\right] = 4a\frac{d^4}{d\alpha^4}\left[\frac{\alpha^2+a^2-4\alpha^2}{\left(\alpha^2+a^2\right)^3}\right]$$

$$= 4a\frac{d^4}{d\alpha^4}\left[\frac{a^2-3\alpha^2}{\left(\alpha^2+a^2\right)^3}\right] = 4a\frac{d^3}{d\alpha^3}\left[\frac{-6\alpha\left(\alpha^2+a^2\right)^3 - \left(a^2-3\alpha^2\right)3\left(\alpha^2+a^2\right)^2 2\alpha}{\left(\alpha^2+a^2\right)^6}\right]$$

$$= 4a\frac{d^3}{d\alpha^3}\left[\frac{-6\alpha\left(\alpha^2+a^2\right) - \left(a^2-3\alpha^2\right)6\alpha}{\left(\alpha^2+a^2\right)^4}\right] = 4a\frac{d^3}{d\alpha^3}\left[\frac{12\alpha^3-12a^2\alpha}{\left(\alpha^2+a^2\right)^4}\right]$$

$$= 48a\frac{d^3}{d\alpha^3}\left[\frac{\alpha^3-a^2\alpha}{\left(\alpha^2+a^2\right)^4}\right]$$

$$= 48a\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{(3\alpha^2-a^2)(\alpha^2+a^2)^4-(\alpha^3-a^2\alpha)4(\alpha^2+a^2)^3 2\alpha}{(\alpha^2+a^2)^8}\right]$$

$$= 48a\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{(3\alpha^2-a^2)(\alpha^2+a^2)-(\alpha^3-a^2\alpha)8\alpha}{(\alpha^2+a^2)^5}\right]$$

$$= 48a\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{3\alpha^4+3a^2\alpha^2-a^2\alpha^2-a^4-8\alpha^4+8a^2\alpha^2}{(\alpha^2+a^2)^5}\right]$$

$$= 48a\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{10a^2\alpha^2-5\alpha^4-a^4}{(\alpha^2+a^2)^5}\right]$$

$$= 48a\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{10a^2\alpha^2-5\alpha^4-a^4}{(\alpha^2+a^2)^5}\right]$$

$$= 48a\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{(20a^2\alpha-20\alpha^3)(\alpha^2+a^2)^5-(10a^2\alpha^2-5\alpha^4-a^4)5(\alpha^2+a^2)^4 2\alpha}{(\alpha^2+a^2)^{10}}\right]$$

$$= 48a\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{(20a^2\alpha-20\alpha^3)(\alpha^2+a^2)-(10a^2\alpha^2-5\alpha^4-a^4)10\alpha}{(\alpha^2+a^2)^6}\right]$$

$$= 48a\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{20a^2\alpha^3+20a^4\alpha-20\alpha^5-20a^2\alpha^3-100a^2\alpha^3+50\alpha^5+10a^4\alpha}{(\alpha^2+a^2)^6}\right]$$

$$= 48a\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{30\alpha^5-100a^2\alpha^3+30a^4\alpha}{(\alpha^2+a^2)^6}\right]= 480a\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{3\alpha^5-10a^2\alpha^3+3a^4\alpha}{(\alpha^2+a^2)^6}\right]$$

$$= 480a\left[\frac{(15\alpha^4-30a^2\alpha^2+3a^4)(\alpha^2+a^2)^6-(3\alpha^5-10a^2\alpha^3+3a^4\alpha)6(\alpha^2+a^2)^5 2\alpha}{(\alpha^2+a^2)^{12}}\right]$$

$$= 480a\left[\frac{(15\alpha^4-30a^2\alpha^2+3a^4)(\alpha^2+a^2)-(3\alpha^5-10a^2\alpha^3+3a^4\alpha)12\alpha}{(\alpha^2+a^2)^7}\right]$$

$$= 480a\left[\frac{-21\alpha^6+105a^2\alpha^4-63a^4\alpha^2+3a^6}{(\alpha^2+a^2)^7}\right]$$

$$= 1440a\left[\frac{a^6-21a^4\alpha^2+35a^2\alpha^4-7\alpha^6}{(\alpha^2+a^2)^7}\right]$$

$$\Im\left\{x^6e^{-a|x|}\right\}= 1440a\left[\frac{a^6-21a^4\alpha^2+35a^2\alpha^4-7\alpha^6}{(\alpha^2+a^2)^7}\right],\ a>0 \qquad (3.15.1.1)$$

2. Plote os gráficos de $f(x)$ e de $F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$ para $a=2$ e comente-os.

$f(x)=x^6e^{-2|x|}$

$$F(\alpha) = 2880\left[\frac{64 - 336\alpha^2 + 140\alpha^4 - 7\alpha^6}{(\alpha^2 + 4)^7}\right]$$

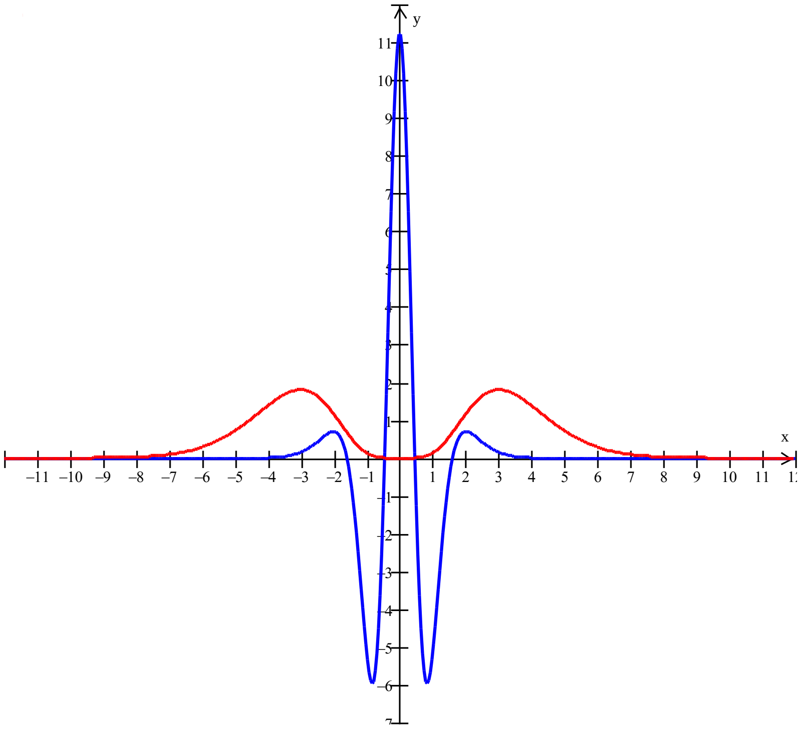



**Figura 3.9**: Gráfico de $F(\alpha) = 2880\left[\frac{64 - 336\alpha^2 + 140\alpha^4 - 7\alpha^6}{(\alpha^2 + 4)^7}\right]$ (azul) e de $f(x) = x^6 e^{-2|x|}$ (vermelho).

**Comentários**: $f(x)$ e $F(\alpha)$ são funções

1. que se anulam no infinito;
2. pares;
3. limitadas;
4. contínuas;
5. absolutamente integráveis;
6. pertencentes ao espaço de Schwarz.

3. Calcule $\Im\left\{\frac{1 - 21x^2 + 35x^4 - 7x^6}{(x^2 + 1)^7}\right\}$.

Considerando-se $a = 1$ em (3.15.1.1), tem-se que

$$f(x) = x^6 e^{-|x|} \quad \text{e} \quad F(\alpha) = 1440\left[\frac{1 - 21\alpha^2 + 35\alpha^4 - 7\alpha^6}{(\alpha^2 + 1)^7}\right].$$

Propriedade da simetria (dualidade): $\Im\{F(x)\} = 2\pi f(-\alpha)$, $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$.

$$\Im\left\{\frac{1-21x^2+35x^4-7x^6}{\left(x^2+1\right)^7}\right\}=\frac{2\pi}{1440}(-\alpha)^6 e^{-|-\alpha|}=\frac{\pi}{720}\alpha^6 e^{-|\alpha|}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{720}\alpha^6 e^{-\alpha}, & \text{se}\,\alpha>0\\[2mm] \dfrac{\pi}{720}\alpha^6 e^{\alpha}, & \text{se}\,\alpha<0\end{cases}$$

### 3.15.2 – Uso de equações diferenciais

Mostre que $\Im\left\{e^{-\frac{ax^2}{2}}\right\}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$ e, conseqüentemente, $\Im\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}=\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$, sendo $f(x)=e^{-ax^2}$ a função gaussiana e $a>0$.

Seja $f(x)=e^{-\frac{ax^2}{2}}$. Então, $f(x)$ satisfaz à equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$f'(x)+axf(x)=0. \tag{3.15.2.1}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier a ambos os lados de (3.15.2.1), obtém-se:

$$\Im\{f'(x)\}+a\Im\{x\,f(x)\}=\Im\{0\};$$

$$-i\alpha\,F(\alpha)+a(-i)\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=0;$$

$$a\,i\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=-i\alpha\,F(\alpha);$$

$$\frac{1}{F(\alpha)}\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{\alpha}{a}\Rightarrow\frac{d}{d\alpha}\left[\ln|F(\alpha)|\right]=-\frac{\alpha}{a};$$

$$\int\frac{d}{d\alpha}\left[\ln|F(\alpha)|\right]d\alpha=\int-\frac{\alpha}{a}d\alpha;$$

$$\ln|F(\alpha)|=-\frac{1}{a}\frac{\alpha^2}{2}+C_1;$$

$$F(\alpha)=Ce^{-\frac{\alpha^2}{2a}}. \tag{3.15.2.2}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa a (3.14.2.2), chega-se a

$$f(x)=\Im^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Ce^{-\frac{\alpha^2}{2a}}e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{3.15.2.3}$$

Considerando-se $x=0$ em (3.15.2.3), tem-se que

$$f(0)=1=\frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}d\alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}d\alpha=\frac{2\pi}{C} \Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}d\alpha=\frac{\pi}{C}. \quad (3.15.2.4)$$

Calculando-se a integral em (3.15.2.4):

$$\frac{\alpha^2}{2a}=u^2 \Rightarrow \alpha=\sqrt{2a}u,\ d\alpha=\sqrt{2a}du;$$

$$\alpha\to 0 \Rightarrow u\to 0,\ \alpha\to\infty \Rightarrow u\to\infty,\ a>0;$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}d\alpha=\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\sqrt{2a}du=\sqrt{2a}\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}du=\frac{\pi}{C}. \quad (3.15.2.5)$$

Calculando-se a integral em (3.15.2.5):

$$u^2=w \Rightarrow u=\sqrt{w}=w^{\frac{1}{2}},\ du=\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}dw;$$

$$u\to 0 \Rightarrow w\to 0,\ u\to\infty \Rightarrow w\to\infty;$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}du=\int_{0}^{\infty} e^{-w}\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}dw=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} w^{-\frac{1}{2}}e^{-w}dw=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.15.2.6)$$

Substituindo (3.15.2.6) em (3.15.2.5), obtém-se

$$\sqrt{2a}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi}{C} \Rightarrow C=\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}. \quad (3.15.2.7)$$

Substituindo-se (3.15.2.7) em (3.15.2.2), tem-se que

$$F(\alpha)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}. \quad (3.15.2.8)$$

Considerando-se $a=1$ em (3.15.2.8), conclui-se que $\Im\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}=\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$.

**<u>Exemplo</u>**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+3i\,x}dx=\Im\left\{e^{-x^2}\right\}\Big|_{\alpha=3}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3^2}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{e^{9/4}}$$

### 3.15.3 – Decomposição em frações parciais

Seja $F(\alpha)=\dfrac{10(4-i\alpha)}{\alpha^2+8i\alpha-6}$. Determine $\Im^{-1}\{F(\alpha)\}$.

$$\alpha^2+8i\alpha-6=0 \Rightarrow \alpha=\frac{-8i\pm\sqrt{-40}}{2}=-4i\pm\sqrt{10}i=\left(-4\pm\sqrt{10}\right)i$$

$$F(\alpha)=\frac{40-10\,i\alpha}{\left[\alpha-\left(-4+\sqrt{10}\right)i\right]\left[\alpha-\left(-4-\sqrt{10}\right)i\right]} \qquad (3.15.3.1)$$

Decompondo-se (3.15.3.1) em frações parciais, tem-se que:

$$F(\alpha)=\frac{40-10\,i\alpha}{\left[\alpha-\left(-4+\sqrt{10}\right)i\right]\left[\alpha-\left(-4-\sqrt{10}\right)i\right]}=\frac{A}{\alpha-\left(-4+\sqrt{10}\right)i}+\frac{B}{\alpha-\left(-4-\sqrt{10}\right)i} \qquad (3.15.3.2)$$

$$40-10\,i\alpha = A\left[\alpha-\left(-4-\sqrt{10}\right)i\right]+B\left[\alpha-\left(-4+\sqrt{10}\right)i\right]$$

$$40-10\,i\alpha = \left[\left(4+\sqrt{10}\right)i\,A+\left(4-\sqrt{10}\right)i\,B\right]+\left(A+B\right)\alpha$$

$$\begin{cases} A+ \qquad\qquad B=-10\,i \\ \left(4+\sqrt{10}\right)i\,A+\left(4-\sqrt{10}\right)i\,B= \quad 40 \end{cases} \Rightarrow A=-5\,i,\ B=-5\,i \qquad (3.15.3.3)$$

Substituindo-se (3.15.3.3) em (3.15.3.2), obtém-se:

$$F(\alpha)=-\frac{5\,i}{\alpha-\left(-4+\sqrt{10}\right)i}-\frac{5\,i}{\alpha-\left(-4-\sqrt{10}\right)i}$$

$$F(\alpha)=-\frac{5\,i}{\alpha-\left(-4+\sqrt{10}\right)i}\frac{(i)}{(i)}-\frac{5\,i}{\alpha-\left(-4-\sqrt{10}\right)i}\frac{(i)}{(i)}$$

$$F(\alpha)=\frac{5}{\left(-4+\sqrt{10}\right)+i\,\alpha}+\frac{5}{\left(-4-\sqrt{10}\right)+i\,\alpha}$$

$$F(\alpha)=-\frac{5}{\left(4-\sqrt{10}\right)-i\,\alpha}-\frac{5}{\left(4+\sqrt{10}\right)-i\,\alpha} \qquad (3.15.3.4)$$

Sabe-se que $\Im\{e^{-ax}\,u(x)\}=\dfrac{1}{a-i\,\alpha}$, $\mathrm{Re}(a)>0$, $u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$. (3.15.3.5)

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa a (3.15.3.4) e empregando-se (3.15.3.5), chega-se a

$$f(x)=\Im^{-1}\{F(\alpha)\}=-5\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\underbrace{\left(4-\sqrt{10}\right)}_{>0}-i\,\alpha}\right\}-5\Im^{-1}\left\{\frac{1}{\underbrace{\left(4+\sqrt{10}\right)}_{>0}-i\,\alpha}\right\}$$

$$=-5e^{-\left(4-\sqrt{10}\right)x}\,u(x)-5e^{-\left(4+\sqrt{10}\right)x}\,u(x)$$

$$=-5\,u(x)\left[e^{-\left(4-\sqrt{10}\right)x}+e^{-\left(4+\sqrt{10}\right)x}\right]$$

$$=-5\,u(x)e^{-4x}\left[e^{\sqrt{10}\,x}+e^{-\sqrt{10}\,x}\right]$$

$$=-10e^{-4x}\cosh\left(\sqrt{10}x\right)u(x).$$

**Exercícios**

01. Seja $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(x), & |x|\le \pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$. Determine $\Im\{f(x)\}$.

Resposta: $\Im\{f(x)\}=\dfrac{2i\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{1-\alpha^2}$.

02. Use uma transformada de Fourier conhecida e as propriedades operacionais para calcular $\Im\{x^2e^{-|x|}\}$.

Resposta: $\Im\{x^2e^{-|x|}\}=-\dfrac{4(3\alpha^2-1)}{(\alpha^2+1)^3}$.

03. Calcule $\Im\{(1-x)^2e^{-|x|}\}$.

Resposta: $\Im\{(1-x)^2e^{-|x|}\}=\dfrac{2}{\alpha^2+1}-\dfrac{8i\alpha}{(\alpha^2+1)^2}-\dfrac{4(3\alpha^2-1)}{(\alpha^2+1)^3}$.

04. Seja $f:R\to C \,/\, f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}, \operatorname{Re}(a)>0$.

a) A função $f(x)$ é absolutamente integrável? Calcule, se possível, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{x^2+a^2}\right|dx$.

Resposta: $\dfrac{\pi}{a},\ \operatorname{Re}(a)>0$.

b) Mostre que $\Im\left\{\dfrac{1}{x^2+a^2}\right\}=\dfrac{\pi}{a}e^{-a|\alpha|}, \operatorname{Re}(a)>0$.

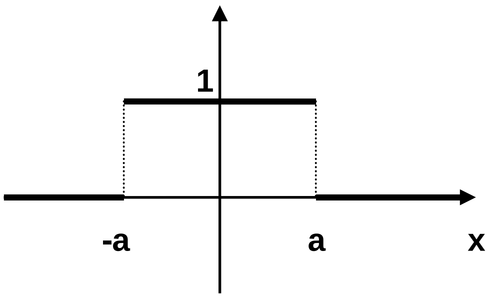
### *3.16 – Transformada de Fourier de algumas funções não absolutamente integráveis*

Aborda-se agora a transformada de Fourier de algumas funções que não são absolutamente integráveis.

### 3.16.1 – A função constante unitária

A função constante unitária pode ser vista como o *caso limite* da função pulso.

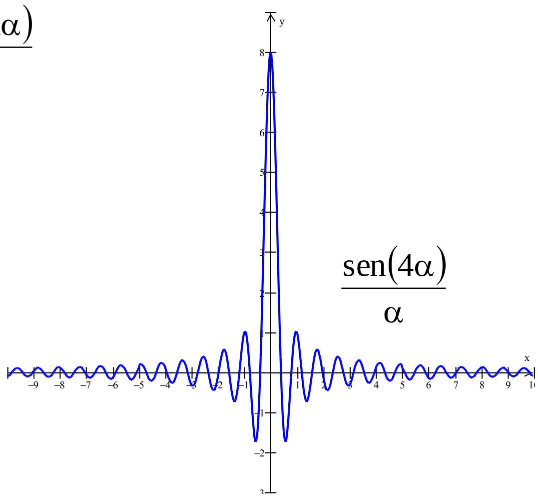
Função pulso: $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$.




$$\lim_{a \to \infty} f(x) = 1$$

$$\Im\{1\} = \Im\left\{\lim_{a \to \infty} f(x)\right\} = \lim_{a \to \infty} \Im\{f(x)\} = \lim_{a \to \infty} \frac{2\text{sen}(a\alpha)}{\alpha}$$
$$= 2\pi \lim_{a \to \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(a\alpha)}{\alpha}$$
$$= 2\pi\delta(\alpha)$$

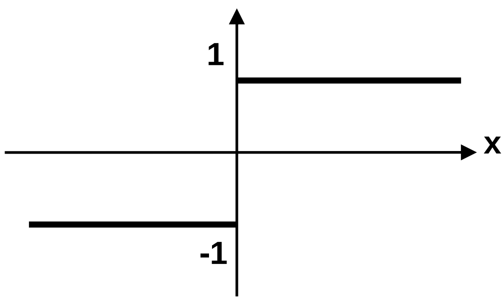
$$\Im^{-1}\{2\pi\delta(\alpha)\} = 1$$




$$1 \rightleftarrows 2\pi\delta(\alpha)$$

### 3.16.2 – A função sinal

Função sinal: $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.




A função sinal pode ser expressa pelo limite

$$\text{sgn}(x) = \lim_{a \to 0} [e^{-ax}\, u(x) - e^{ax}\, u(-x)],$$

onde $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ e $u(-x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$.

Assim:

$$\Im\{\text{sgn}(x)\} = \Im\{\lim_{a \to 0} [e^{-ax}\, u(x) - e^{ax}\, u(-x)]\}$$

$$= \lim_{a \to 0} \Im\{[e^{-ax}\, u(x) - e^{ax}\, u(-x)]\}$$

$$= \lim_{a \to 0} \left[ \frac{1}{a - i\alpha} - \frac{1}{a + i\alpha} \right]$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{2i\alpha}{a^2 + \alpha^2}$$

$$= \frac{2i}{\alpha}$$

$$\Im^{-1}\left\{ \frac{2i}{\alpha} \right\} = \operatorname{sgn}(x)$$

$$\operatorname{sgn}(x) \rightleftarrows \frac{2i}{\alpha}$$

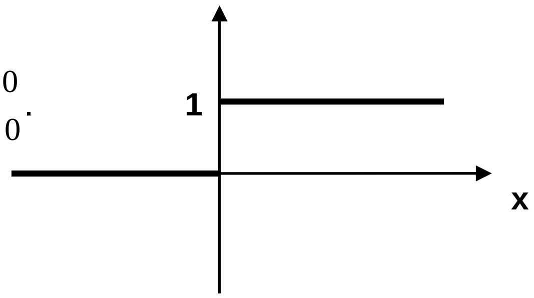
**<u>Observação</u>**: se $\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$, então $\Im\{\operatorname{sgn}(x)\} = -\frac{2i}{\alpha}$.

**<u>Exercício</u>**

Mostre que $\Im\{e^{ax}\, u(-x)\} = \frac{1}{a + i\alpha},\ \operatorname{Re}(a) > 0$, onde $u(-x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$.

### 3.16.3 – A função degrau

Função degrau unitário: $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.




Pode-se reescrever a função degrau unitário como

$$u(x) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(x)].$$

Logo:

$$\Im\{u(x)\} = \Im\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x) \right\} = \frac{1}{2}\Im\{1\} + \frac{1}{2}\Im\{\operatorname{sgn}(x)\}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi\delta(\alpha) + \frac{1}{2}\frac{2i}{\alpha} = \pi\delta(\alpha) + \frac{i}{\alpha}.$$

$$\Im^{-1}\left\{ \pi\delta(\alpha) + \frac{i}{\alpha} \right\} = u(x)$$

$$u(x) \underset{\leftarrow}{\rightarrow} \pi\delta(\alpha)+\frac{i}{\alpha}$$

**Observação**: se $\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$ , então $\Im\{u(x)\} = \pi\delta(\alpha)-\frac{i}{\alpha}=\pi\delta(\alpha)+\frac{1}{i\alpha}$ .

### 3.16.4 – A função exponencial

Se $f(x)=\frac{T}{\pi}\operatorname{sinc}(Tx)=\frac{T}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(Tx)}{Tx}$, então $\lim\limits_{T\to\infty} f(x)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(Tx)}{Tx}=\delta(x)$.

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$$\Im\{e^{ia\,x}\}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\,x}e^{i\alpha\,x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a+\alpha)x}dx$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\{\cos[(a+\alpha)x]+i\operatorname{sen}[(a+\alpha)x]\}dx$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\cos[(a+\alpha)x]dx=\lim_{T\to\infty}\frac{\operatorname{sen}[(a+\alpha)x]}{a+\alpha}\Bigg|_{-T}^{T}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{\operatorname{sen}[(a+\alpha)T]}{a+\alpha}-\frac{\operatorname{sen}[(a+\alpha)(-T)]}{a+\alpha}\right\}=2\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{\operatorname{sen}[(a+\alpha)T]}{a+\alpha}\right\}$$

$$=2\pi\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}[(a+\alpha)T]}{(a+\alpha)T}\right\}=2\pi\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}\operatorname{sinc}[(a+\alpha)T]=2\pi\delta(\alpha+a)$$

$$\Im^{-1}\{2\pi\delta(\alpha+a)\}=e^{ia\,x}$$

$$e^{ia\,x} \underset{\leftarrow}{\rightarrow} 2\pi\delta(\alpha+a)$$

**Observação**: se $\Im\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$ , então $\Im\{e^{ia\,x}\}= 2\pi\delta(\alpha-a)$**.**

**<u>Exercício</u>**

Mostre que $\Im\{e^{-ia\,x}\} = 2\pi\delta(\alpha - a)$.

### 3.16.5 – A função cosseno

$$\Im\{\cos(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ax)e^{i\alpha\,x}dx = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \cos(ax)e^{i\alpha\,x}dx$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \frac{e^{ia\,x} + e^{-ia\,x}}{2} e^{i\alpha\,x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left\{\int_{-T}^{T} e^{i(a+\alpha)x}dx + \int_{-T}^{T} e^{i(-a+\alpha)x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2\pi\delta(\alpha + a) + 2\pi\delta(\alpha - a)\}$$

$$= \pi\delta(\alpha + a) + \pi\delta(\alpha - a) = \pi[\delta(\alpha + a) + \delta(\alpha - a)]$$

$$\Im^{-1}\{\pi[\delta(\alpha + a) + \delta(\alpha - a)]\} = \cos(ax)$$

$$\cos(ax) \rightleftarrows \pi[\delta(\alpha + a) + \delta(\alpha - a)]$$

**<u>Exercícios</u>**

Mostre que:

01. $\Im\{\text{sen}(ax)\} = i\pi[\delta(\alpha - a) - \delta(\alpha + a)]$;

02. $\Im\{\cos(ax)\,u(x)\} = \dfrac{\pi}{2}[\delta(\alpha + a) + \delta(\alpha - a)] + \dfrac{i\alpha}{\alpha^2 - a^2}$ ;

03. $\Im\{\text{sen}(ax)\,u(x)\} = \dfrac{i\pi}{2}[\delta(\alpha - a) - \delta(\alpha + a)] - \dfrac{a}{\alpha^2 - a^2}$ ;

04. $\Im\left\{\int_{-\infty}^{x} f(\kappa)d\kappa\right\} = \pi F(0)\delta(\alpha) + \dfrac{i\,F(\alpha)}{\alpha}$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$ e $u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

<u>Sugestão</u>: use $f(x) * u(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\kappa)d\kappa$ e $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ se $f(x)$ for contínua em $x = 0$.

### *3.17 – Resumo: transformadas de Fourier de algumas funções*

| $f(x)$ | $F(\alpha)$ |
|---|---|
| $f(x)=\begin{cases}1, \lvert x\rvert < a\\ 0, \lvert x\rvert > a\end{cases}$ | $\dfrac{2\operatorname{sen}(a\alpha)}{\alpha}, \alpha \neq 0$ <br> $F(0)=2a$ |
| $e^{-a\lvert x\rvert}, \operatorname{Re}(a)>0$ | $\dfrac{2a}{\alpha^2+a^2}$ |
| $\dfrac{1}{x^2+a^2}, \operatorname{Re}(a)>0$ | $\dfrac{\pi}{a}e^{-a\lvert\alpha\rvert}$ |
| $e^{-x}$ | $F_C(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha^2+1}$ $F_S(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$ |
| $e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ |
| $e^{-\frac{ax^2}{2}}, a>0$ | $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$ |
| $e^{-ax}\,u(x), \operatorname{Re}(a)>0,\ u(x-c)=\begin{cases}1,\ x>c\\ 0,\ x<c\end{cases}$ | $\dfrac{1}{a-i\alpha}$ |
| $x^n e^{-ax}\,u(x), \operatorname{Re}(a)>0,\ u(x-c)=\begin{cases}1,\ x>c\\ 0,\ x<c\end{cases}$ | $\dfrac{n!}{(a-i\alpha)^{n+1}}$ |
| $\delta(x)=\begin{cases}\infty,\ x=0\\ 0,\ x\neq 0\end{cases}$ | $1$ |
| $1=\lim\limits_{a\to\infty} f(x),\ f(x)=\begin{cases}1, \lvert x\rvert \le a\\ 0, \lvert x\rvert > a\end{cases}$ | $2\pi\delta(\alpha)$ |
| $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\end{cases}$ | $\dfrac{2i}{\alpha}$ |
| $u(x)=\begin{cases}1,\ x>0\\ 0,\ x<0\end{cases}$ | $\pi\delta(\alpha)+\dfrac{i}{\alpha}$ |
| $e^{iax}$ | $2\pi\delta(\alpha+a)$ |
| $\cos(ax)$ | $\pi[\delta(\alpha+a)+\delta(\alpha-a)]$ |
| $\operatorname{sen}(ax)$ | $i\pi[\delta(\alpha-a)-\delta(\alpha+a)]$ |
| $\cos(ax)\,u(x)$ | $\dfrac{\pi}{2}[\delta(\alpha+a)+\delta(\alpha-a)]+\dfrac{i\alpha}{\alpha^2-a^2}$ |

| | |
|---|---|
| $\operatorname{sen}(ax)\, u(x)$ | $\frac{i\pi}{2}[\delta(\alpha-a)-\delta(\alpha+a)]-\frac{a}{\alpha^2-a^2}$ |
| $\int_{-\infty}^{x} f(\kappa)d\kappa$ | $\pi F(0)\delta(\alpha)+\frac{i\,F(\alpha)}{\alpha}$ |

**Tabela 3.2**: transformadas de Fourier de algumas funções e distribuições.

### *3.18 – Identidade de Parseval para as integrais de Fourier*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\alpha)|^2 d\alpha,\ \text{onde } F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$$

**Prova**

$f=u+iv,\ u=u(x,y),\ v=v(x,y)$

$\bar{f}=u-iv$

$f\bar{f}=|f|^2$

$\overline{\overline{f(x)}}=f(x)$

$\Im\{f(x)g(x)\}=\frac{1}{2\pi}F(\alpha)*G(\alpha)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{i\alpha x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)G(\alpha-u)du \qquad (3.18.1)$$

Considerando-se $\alpha=0$ em (3.18.1), obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)G(-u)du\ . \qquad (3.18.2)$$

Assumindo-se em (3.18.2) $g(x)=\overline{f(x)}$ e lembrando que $\Im\{\overline{f(x)}\}=\overline{F(-\alpha)}$, prova-se a identidade.

$g(x)=\overline{f(x)}$

$\Im\{g(x)\}=\Im\{\overline{f(x)}\}$

$G(\alpha)=\overline{F(-\alpha)}$

$\alpha\leftarrow-\alpha:$

$G(-\alpha)=\overline{F(\alpha)}$

$G(-u)=\overline{F(u)}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{F(\alpha)}d\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha \qquad (3.18.3)$$

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções pares, pode-se reescrever (3.18.1) como

$$\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_C(\alpha)G_C(\alpha)d\alpha \ . \qquad (3.18.4)$$

Da mesma forma, quando $f(x)$ e $g(x)$ são funções ímpares reescreve-se (3.18.1) como

$$\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_S(\alpha)G_S(\alpha)d\alpha \ . \qquad (3.18.5)$$

Quando $f(x) = g(x)$, (3.18.4) e (3.18.5) tornam-se, respectivamente,

$$\int_{0}^{\infty} [f(x)]^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} [F_C(\alpha)]^2 d\alpha \quad \text{e} \quad \int_{0}^{\infty} [f(x)]^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} [F_S(\alpha)]^2 d\alpha .$$

### *3.19 – Cálculo de integrais impróprias*

Pode-se empregar as transformadas de Fourier ou a Identidade de Parseval para calcular para quanto convergem determinadas integrais impróprias.

**Exemplo**

Seja $f: R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

1. Plote o gráfico de $f(x)$.

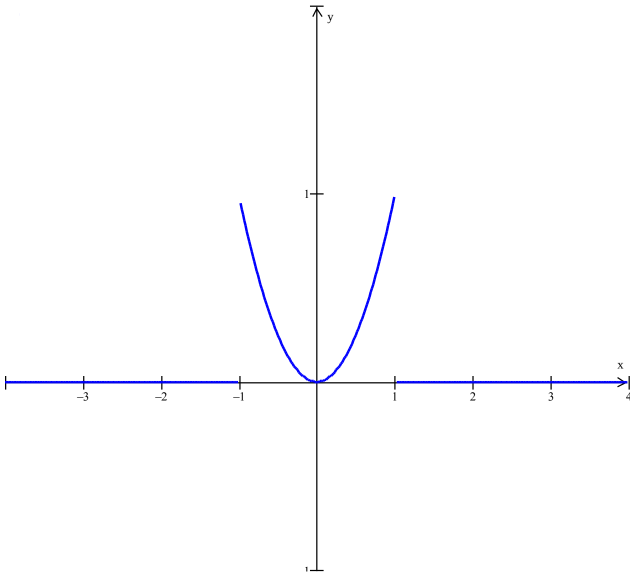



**Figura 3.10**: Gráfico de $f: R \to R / f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

2. Determine $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

$$F(\alpha) = \Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 e^{i\alpha x} dx = \int_{-1}^{1} x^2 [\cos(\alpha x) + i\,\mathrm{sen}(\alpha x)] dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} x^2 \cos(\alpha x) dx$$

Calculando-se a integral indefinida por partes.

$u = x^2,\ du = 2xdx$ | $u = x,\ du = dx$

$dv = \cos(ax)dx,\ v = \dfrac{\mathrm{sen}(ax)}{a}$ | $dv = \mathrm{sen}(ax)dx,\ v = -\dfrac{\cos(ax)}{a}$

$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{x^2 \mathrm{sen}(ax)}{a} - \frac{2}{a}\int x\,\mathrm{sen}(ax) dx$$

$$= \frac{x^2 \mathrm{sen}(ax)}{a} - \frac{2}{a}\left[-\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{1}{a}\int \cos(ax) dx\right]$$

$$= \frac{x^2 \mathrm{sen}(ax)}{a} + \frac{2x\cos(ax)}{a^2} - \frac{2\mathrm{sen}(ax)}{a^3} + C$$

$$F(\alpha) = 2\left[\frac{x^2\text{sen}(\alpha x)}{\alpha} + \frac{2x\cos(\alpha x)}{\alpha^2} - \frac{2\text{sen}(\alpha x)}{\alpha^3}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} + \frac{2\cos(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{2\text{sen}(\alpha)}{\alpha^3}\right]$$

$$= 2\,\frac{\alpha^2\text{sen}(\alpha) + 2\alpha\cos(\alpha) - 2\text{sen}(\alpha)}{\alpha^3}$$

$$= 2\,\frac{(\alpha^2 - 2)\text{sen}(\alpha) + 2\alpha\cos(\alpha)}{\alpha^3},\ \alpha \neq 0$$

$$F(0) = 2\int_0^1 x^2\cos(0.x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$F(\alpha) = 2\,\frac{(\alpha^2 - 2)\text{sen}(\alpha) + 2\alpha\cos(\alpha)}{\alpha^3},\ \alpha \neq 0$$

3. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[(x^2 - 2)\text{sen}(x) + 2x\cos(x)\right]^2}{x^6}dx$ .

Identidade de Parseval: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha$ .

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\,\frac{(\alpha^2 - 2)\text{sen}(\alpha) + 2\alpha\cos(\alpha)}{\alpha^3}\right]^2 d\alpha$$

$$\left.\frac{2x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[(\alpha^2 - 2)\text{sen}(\alpha) + 2\alpha\cos(\alpha)\right]^2}{\alpha^6}d\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[(\alpha^2 - 2)\text{sen}(\alpha) + 2\alpha\cos(\alpha)\right]^2}{\alpha^6}d\alpha = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[(x^2 - 2)\text{sen}(x) + 2x\cos(x)\right]^2}{x^6}dx = \frac{\pi}{5}$$

## <u>Exercícios</u>

01. Seja $f(x) = \begin{cases} 1,\ 0 \leq x < 1 \\ 0,\ x \geq 1 \end{cases}$.

a) Determine a transformada cosseno de Fourier de f(x).

Resposta: $F_C(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

b) Determine a transformada seno de Fourier de f(x).

Resposta: $F_S(\alpha) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

c) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

d) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

02. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha\, x)dx = e^{-\alpha} \Rightarrow f(x) = \Im_C^{-1}\left\{e^{-\alpha}\right\} = \frac{2}{\pi\left(x^2+1\right)}$$

Resposta: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\pi}{4}$.

<u>Decorrência</u>: $\Im_C\left\{e^{-x}\right\} = \dfrac{1}{\alpha^2+1}$.

03. Solucione a equação integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\text{sen}(\alpha\, x)dx = e^{-\alpha}$.

Resposta: $f(x) = \dfrac{2x}{\pi\left(x^2+1\right)}$.

<u>Decorrência</u>: $\Im_S\left\{e^{-x}\right\} = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+1}$.

04. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Resposta: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\pi}{4}$.

05. Sejam $f : R \to R \,/\, f(x) = x\, p(x)$ e $p : R \to R \,/\, p(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

a) Calcule $F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$.

Resposta: $F(\alpha)=2i\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)-\alpha\cos(\alpha)}{\alpha^2}$, $F(0)=0$.

b) Determine para quanto convergem as integrais $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{x^2}e^{ix/2}dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)]^2}{x^4}dx$.

Resposta: $\dfrac{i\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{3}$.

## *3.20 – Solução de equações diferenciais*

### 3.20.1 – Equações diferenciais ordinárias

**Exemplo**

Solucionar a equação diferencial ordinária

$$3y''(x)+5y'(x)+2y(x)=f(x). \tag{3.20.1.1}$$

Seja $\Im\{y(x)\}=Y(\alpha)$. Aplicando-se as transformadas de Fourier, obtém-se a solução de (3.20.1.1) na forma integral.

$$\Im\{3y''(x)+5y'(x)+2y(x)\}=\Im\{f(x)\}$$
$$3\Im\{y''(x)\}+5\Im\{y'(x)\}+2\Im\{y(x)\}=\Im\{f(x)\}$$
$$-3\alpha^2Y(\alpha)-5i\alpha Y(\alpha)+2Y(\alpha)=F(\alpha)$$
$$(-3\alpha^2-5i\alpha+2)Y(\alpha)=F(\alpha)$$
$$Y(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{-3\alpha^2-5i\alpha+2}$$
$$\Im^{-1}\{Y(\alpha)\}=\Im^{-1}\left\{\frac{F(\alpha)}{-3\alpha^2-5i\alpha+2}\right\}$$
$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\alpha)}{-3\alpha^2-5i\alpha+2}e^{-i\alpha x}d\alpha$$

**Questão**

E se em (3.20.1.1) $f(x)$ fosse um polinômio definido em $(-\infty,\infty)$?

**Exemplo**

Solucione a EDO de segunda ordem

$$-D\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+\kappa^2 D\varphi(x)=Q\delta(x), \tag{3.20.1.2}$$

onde $D, \kappa^2, \kappa>0$ e $Q$ são constantes.

$$\Im\{\varphi(x)\}=\Psi(\alpha)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier a (3.20.1.2), obtém-se:

$$-D\Im\left\{\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)\right\}+\kappa^2 D\Im\{\varphi(x)\}=Q\Im\{\delta(x)\};$$

$$D\alpha^2\Psi(\alpha)+\kappa^2 D\Psi(\alpha)=Q;$$

$$\left(D\alpha^2+\kappa^2 D\right)\Psi(\alpha)=Q;$$

$$\Psi(\alpha)=\frac{Q}{D\left(\alpha^2+\kappa^2\right)};$$

$$\Psi(\alpha)=\frac{Q}{D\left(\alpha^2+\kappa^2\right)}\frac{2\kappa}{2\kappa}=\frac{Q}{2\kappa D}\frac{2\kappa}{\alpha^2+\kappa^2}\ . \tag{3.20.1.3}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa a (3.20.1.3), tem-se que

$$\varphi(x)=\Im^{-1}\{\Psi(\alpha)\}=\frac{Q}{2\kappa D}\Im^{-1}\left\{\frac{2\kappa}{\alpha^2+\kappa^2}\right\}. \tag{3.20.1.4}$$

Lembrando que $\Im\left\{e^{-\kappa|x|}\right\}=\frac{2\kappa}{\alpha^2+\kappa^2}, \kappa>0$, pode-se escrever (3.20.1.4) como

$$\varphi(x)=\Im^{-1}\{\Psi(\alpha)\}=\frac{Q}{2\kappa D}e^{-\kappa|x|}.$$

### 3.20.2 – Derivação sob o sinal de integração – Regra de Leibniz

Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716): matemático e filósofo alemão, considerado, juntamente com o físico e matemático britânico Isaac Newton (1642-1727), fundador (*pai*) do cálculo diferencial e integral.

Seja $\phi(\alpha)=\int_{u_1}^{u_2} f(x,\alpha)dx$, $a\le\alpha\le b$, $u_1$ e $u_2$ dependentes de $\alpha$. Então

$$\frac{d}{d\alpha}\phi(\alpha)=\int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)dx+f(u_2,\alpha)\frac{d}{d\alpha}u_2-f(u_1,\alpha)\frac{d}{d\alpha}u_1, \tag{3.20.2.1}$$

se $f(x,\alpha)$ e $\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)$ são contínuas em $x$ e $\alpha$ em alguma região do plano $x\alpha$ incluindo $u_1 \le x \le u_2$ e $a \le \alpha \le b$, e se $u_1$ e $u_2$ forem contínuas com derivadas contínuas para $a \le \alpha \le b$.

Quando $u_1$ e $u_2$ independem de $\alpha$, pode-se reescrever (3.20.2.1) como

$$\frac{d}{d\alpha}\phi(\alpha) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx .$$

### 3.20.3 – Equações diferenciais parciais

$u(x,t)$: função das variáveis $x, t \in R, t \ge 0$.

Fixando-se a variável temporal $t$, $u(x,t)$ torna-se uma função apenas da variável espacial $x$, definida na reta. Assim, pode-se determinar a transformada de Fourier de $u(x,t)$ com relação à variável $x$.

$$\Im\{u(x,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\alpha x} dx = U(\alpha,t) = \hat{u}(\alpha,t)$$

$$\begin{aligned}
\Im\{u_x(x,t)\} &= \Im\left\{\frac{d}{dx}u(x,t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}u(x,t) e^{i\alpha x} dx = -i\alpha U(\alpha,t) \\
\Im\{u_{xx}(x,t)\} &= \Im\left\{\frac{d^2}{dx^2}u(x,t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}u(x,t) e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 U(\alpha,t)
\end{aligned} \tag{3.20.3.1}$$

$$\Im\{u_t(x,t)\} = \Im\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) e^{i\alpha x} dx = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\alpha x} dx = \frac{d}{dt}U(\alpha,t) \tag{3.20.3.2}$$

Em (3.20.3.1), aplica-se as propriedades da transformada de Fourier sobre derivadas; em (3.20.3.2), a derivada temporal é preservada pela transformada de Fourier (deriva-se sob o sinal de integração utilizando a regra de Leibniz). Dessa forma, quando se aplica a transformada de Fourier a uma equação diferencial parcial em duas variáveis (x e t), as derivadas parciais espaciais $(u_x, u_{xx})$ desaparecem e apenas as derivadas temporais

$(u_t, u_{tt})$ permanecem, ou seja, a transformada de Fourier *transforma* a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária em $t$.

A solução de uma equação diferencial parcial pelas transformadas de Fourier pode ser resumida às seguintes etapas:

1ª) obter a transformada de Fourier das condições iniciais e das condições de contorno (se estas existirem);

2ª) aplicar a transformada de Fourier à equação diferencial parcial, transformando-a em uma equação diferencial ordinária;

3ª) solucionar a equação diferencial ordinária, obtendo-se $U(\alpha, t)$;

4ª) determinar as constantes presentes em $U(\alpha, t)$ usando-se as condições iniciais e as condições de contorno;

5ª) aplicar a transformada de Fourier inversa a $U(\alpha, t)$ para obter a solução $u(x, t)$ da equação diferencial parcial.

### 3.20.3.1 – Equação do calor (EDP parabólica)

Solucionar a equação do calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{3.20.3.1.1}$$

onde κ é a constante de difusibilidade térmica e $f(x) = \begin{cases} 1, \text{se} |x| \leq 1 \\ 0, \text{se} |x| > 1 \end{cases}$ (função pulso unitário).

Solucionar (3.20.3.1.1) é resolver o problema de condução de calor em uma barra homogênea, isolada termicamente e infinita (problema de Cauchy). Em (3.20.3.1.1), assume-se que a função $f(x)$ é limitada e absolutamente integrável e que $|u(x,t)| < M$ (a solução é limitada para $t \geq 0$).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857): matemático francês, um dos maiores matemáticos do século XIX.

Solução: $u(x, t)$.

$$\Im\{u(x,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\alpha x} dx = U(\alpha, t)$$

$$\Im\{f(x)\} = \Im\{u(x,0)\} = U(\alpha,0) = \frac{2\text{sen}(\alpha)}{\alpha}, \alpha \neq 0 \qquad (3.20.3.1.2)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier a (3.20.3.1.1), obtém-se:

$$\Im\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} = \Im\left\{\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\};$$

$$\frac{dU(\alpha,t)}{dt} = -\kappa\alpha^2 U(\alpha,t). \qquad (3.20.3.1.3)$$

Separando-se as variáveis em (3.20.3.1.3), chega-se a:

$$\frac{1}{U(\alpha,t)}\frac{dU(\alpha,t)}{dt} = -\kappa\alpha^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left|U(\alpha,t)\right|\right] = -\kappa\alpha^2$$

$$\int\frac{d}{dt}\left[\ln\left|U(\alpha,t)\right|\right]dt = \int -\kappa\alpha^2 dt$$

$$\ln\left|U(\alpha,t)\right| = -\kappa\alpha^2 t + C_1$$

$$U(\alpha,t) = Ce^{-\kappa\alpha^2 t}. \qquad (3.20.3.1.4)$$

Para determinar a constante C em (3.20.3.1.4), usa-se a condição inicial (3.20.3.1.2) $(t = 0)$

$$U(\alpha,0) = C = \frac{2\text{sen}(\alpha)}{\alpha}. \qquad (3.20.3.1.5)$$

Substituindo-se (3.20.3.1.5) em (3.20.3.1.4), tem-se que

$$U(\alpha,t) = \frac{2\text{sen}(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}. \qquad (3.19.2.1.6)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa em (3.20.3.1.6), obtém-se a solução procurada.

$$\Im^{-1}\{U(\alpha,t)\}=\Im^{-1}\left\{\frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}\right\}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}\left[\cos(\alpha x)-i\operatorname{sen}(\alpha x)\right]d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha x)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha x)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}d\alpha$$

**<u>Exercícios</u>**

01. Resolva o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t=\kappa u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}.$$

Resposta: $u(x,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{-\kappa\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}d\alpha$ .

**<u>Observação</u>**: a solução anterior não é conveniente em certas aplicações práticas, pois a mesma depende de $F(\alpha)=\Im\{f(x)\}$. Pode-se expressar essa solução em função de $f(x)$ usando a propriedade da convolução em (3.19.2.1.6).

**SPIEGEL**, Murray R. *Theory and problems of Fourier analysis*, p. 93, problem 5.22.

02. Solucione o problema

$$\begin{cases} u_t=\kappa u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-|x|}, & -\infty<x<\infty \end{cases}.$$

Resposta: $u(x,t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2+1}e^{-\kappa\alpha^2 t}d\alpha$ ou $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2+1}e^{-\kappa\alpha^2 t}d\alpha$ .

### 3.20.3.2 – Equação da onda (EDP hiperbólica)

Solucione a equação da onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_t(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{3.20.3.2.1}$$

onde $c^2$ é a constante relacionada à velocidade de propagação da onda.

Solucionar (3.20.3.2.1) é resolver o problema das vibrações transversais de uma corda infinita, homogênea e de peso desprezível. Em (3.20.3.2.1), assume-se que as funções $f(x)$ e $g(x)$ são limitadas e absolutamente integráveis e que $|u(x,t)| < M$ (a solução é limitada para $t \geq 0$).

Solução: $u(x,t)$.

$$\Im\{u(x,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{i\alpha x} dx = U(\alpha,t)$$

$$\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \Im\{u(x,0)\} = U(\alpha,0) \tag{3.20.3.2.2}$$

$$\Im\{g(x)\} = G(\alpha) = \Im\{u_t(x,0)\} = \frac{dU(\alpha,0)}{dt} \tag{3.20.3.2.3}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier em (3.20.3.2.1), obtém-se:

$$\Im\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right\} = \Im\left\{c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right\};$$

$$\frac{d^2U(\alpha,t)}{dt^2} = -c^2\alpha^2 U(\alpha,t);$$

$$\frac{d^2U(\alpha,t)}{dt^2} + c^2\alpha^2 U(\alpha,t) = 0. \tag{3.20.3.2.4}$$

Família de soluções a dois parâmetros para (3.20.3.2.4):

$$U(\alpha,t) = C_1 \cos(c\alpha\, t) + C_2 \operatorname{sen}(c\alpha\, t). \tag{3.20.3.2.5}$$

**Exercício**

Verifique que (3.20.3.2.5) é solução de (3.20.3.2.4).

$$\frac{d}{dt}U(\alpha,t) = -C_1 c\alpha \,\mathrm{sen}(c\alpha\, t) + C_2 c\alpha \cos(c\alpha\, t) \tag{3.20.3.2.6}$$

Para determinar as constantes $C_1$ e $C_2$ em (3.20.3.2.5), usa-se as condições iniciais (3.20.3.2.2) e (3.20.3.2.3).

Considerando-se $t = 0$ em (3.20.3.2.5) e usando-se (3.20.3.2.2), obtém-se

$$U(\alpha,0) = C_1 = F(\alpha). \tag{3.20.3.2.7}$$

Considerando-se $t = 0$ em (3.20.3.2.6) e usando-se (3.20.3.2.3), obtém-se

$$\frac{d}{dt}U(\alpha,0) = C_2 c\alpha = G(\alpha) \Rightarrow C_2 = \frac{G(\alpha)}{c\alpha}. \tag{3.20.3.2.8}$$

Substituindo-se (3.20.3.2.7) e (3.20.3.2.8) em (3.20.3.2.5), tem-se que

$$U(\alpha,t) = F(\alpha)\cos(c\alpha\, t) + \frac{G(\alpha)}{c\alpha}\mathrm{sen}(c\alpha\, t). \tag{3.20.3.2.9}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa em (3.20.3.2.9), obtém-se a solução procurada.

$$\mathfrak{I}^{-1}\{U(\alpha,t)\} = \mathfrak{I}^{-1}\left\{F(\alpha)\cos(c\alpha\, t) + \frac{G(\alpha)}{c\alpha}\mathrm{sen}(c\alpha\, t)\right\}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(\alpha)\cos(c\alpha\, t) + \frac{G(\alpha)}{c\alpha}\mathrm{sen}(c\alpha\, t)\right]e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{3.20.3.2.10}$$

**Observação**: utilizando-se a integral de Fourier, pode-se mostrar que (3.20.3.2.10) é equivalente a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

quando $g(x) = 0$.

**SPIEGEL**, Murray R. *Theory and problems of Fourier analysis*, p. 93, problem 5.23.

**Exercício**

Resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{x^2+1}, & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases}.$$

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(x+t)^2+1} + \dfrac{1}{(x-t)^2+1}\right]$.

### 3.20.3.3 – Equação de Laplace (EDP elíptica)

A temperatura de estado estacionário em uma chapa semi-infinita é determinada por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < \pi,\ y > 0 \\ u(0,y) = 0,\quad u(\pi,y) = e^{-y},\quad y > 0 & \text{cc de Dirichlet} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = u_y(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi & \text{cc de Neumann} \end{cases} . \qquad (3.20.3.3.1)$$

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859): matemático alemão.

John von Neumann (1903-1957): matemático húngaro.

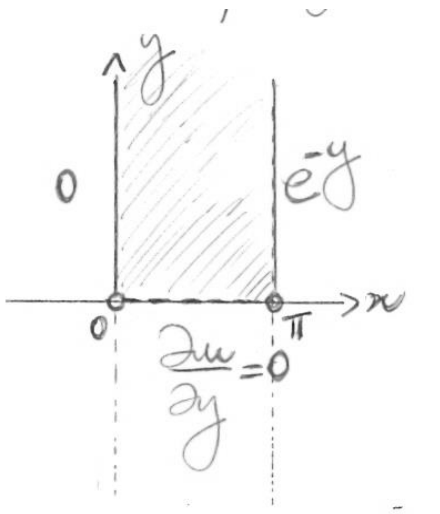



**Figura 3.11**: Condições de contorno para a equação de Laplace (3.20.3.3.1).

O domínio da variável $y$ e a condição estabelecida em $y = 0$ indicam que a transformada cosseno de Fourier é adequada para o problema, uma vez que

$$\Im_C\{f''(x)\} = -\alpha^2 F_C(\alpha) - f'(0).$$

Solução: $u(x,y)$.

Fixando-se a variável $x$, tem-se que:

$$\Im_C\{u(x,y)\} = \int_0^{\infty} u(x,y)\cos(\alpha\, y)dy = U(x,\alpha);$$

$$\Im_C\{u(0,y)\} = \Im_C\{0\} = U(0,\alpha) = 0; \qquad (3.20.3.3.2)$$

$$\Im_C\{u(\pi, y)\} = \Im_c\{e^{-y}\} = U(\pi, \alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + 1}. \qquad (3.20.3.3.3)$$

Aplicando-se a transformada cosseno de Fourier em (3.20.3.3.1), obtém-se:

$$\Im_C\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)\right\} = \Im_C\{0\}$$

$$\Im_C\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y)\right\} + \Im_C\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)\right\} = 0$$

$$\frac{d^2 U(x, \alpha)}{dx^2} - \alpha^2 U(x, \alpha) - \frac{d}{dy} u(x, 0) = 0$$

$$\frac{d^2 U(x, \alpha)}{dx^2} - \alpha^2 U(x, \alpha) = 0. \qquad (3.20.3.3.4)$$

Família de soluções (a dois parâmetros) para (3.20.3.3.4):

$$U(x, \alpha) = C_1 \cosh(\alpha\, x) + C_2 \mathrm{senh}(\alpha\, x) \qquad (3.20.3.3.5)$$

ou

$$U(x, \alpha) = C_1 e^{\alpha\, x} + C_2 e^{-\alpha\, x}.$$

**Exercício**

Verifique que (3.20.3.3.5) é solução de (3.20.3.3.4).

**Observações**:
$$\mathrm{senh}(\alpha x) = \frac{e^{\alpha\, x} - e^{-\alpha\, x}}{2},\ \cosh(\alpha x) = \frac{e^{\alpha\, x} + e^{-\alpha\, x}}{2}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \mathrm{senh}(x),\ \frac{d}{dx}\mathrm{senh}(x) = \cosh(x).$$

Para determinar as constantes $C_1$ e $C_2$ em (3.20.3.3.5), usa-se as condições de contorno (3.20.3.3.2) e (3.20.3.3.3).

Considerando-se $x = 0$ em (3.20.3.3.5) e usando-se (3.20.3.3.2), obtém-se

$$U(0, \alpha) = C_1 = 0. \qquad (3.20.3.3.6)$$

Considerando-se $x = \pi$ em (3.20.3.3.5) e usando-se (3.20.3.3.3) e (3.20.3.3.6), obtém-se

$$U(\pi, \alpha) = C_2 \mathrm{senh}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{(\alpha^2 + 1)\mathrm{senh}(\alpha\pi)}. \qquad (3.20.3.3.7)$$

Substituindo-se (3.20.3.3.6) e (3.20.3.3.7) em (3.20.3.3.5), tem-se que

$$U(x,\alpha)=\frac{\operatorname{senh}(\alpha\, x)}{(\alpha^2+1)\operatorname{senh}(\alpha\pi)}. \qquad (3.20.3.3.8)$$

Aplicando-se a transformada cosseno de Fourier inversa em (3.20.3.3.8), obtém-se a solução procurada.

$$\mathfrak{I}_C^{-1}\{U(x,\alpha)\}=\mathfrak{I}_C^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh}(\alpha\, x)}{(\alpha^2+1)\operatorname{senh}(\alpha\pi)}\right\}$$

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{senh}(\alpha\, x)}{(\alpha^2+1)\operatorname{senh}(\alpha\pi)}\cos(\alpha\, y)d\alpha$$

## Exercícios

01. Solucione o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x>0,\ 0<y<\pi \\ u_x(0,y)=0, & 0<y<\pi \\ u(x,0)=0,\ u_y(x,\pi)=e^{-x}, & x>0 \end{cases}.$$

Resposta: $u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{senh}(\alpha y)}{\alpha(\alpha^2+1)\cosh(\alpha\pi)}\cos(\alpha\, x)d\alpha$ .

02. Usando as transformadas de Fourier, mostre que a solução da equação de Laplace no semiplano superior (problema de Dirichlet)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,\ y>0 \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

é dada por

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\alpha)}{(x-\alpha)^2+y^2}d\alpha .$$ (*fórmula integral de Poisson*)

Siméon-Denis Poisson (1781-1840): matemático francês.

### *3.21 – Solução de equações integrais e de equações íntegro-diferenciais*

Solucionar a equação integral

$$f(x)=f(x-3)+xe^{-3|x|}+\int_{-\infty}^{\infty}g(u)f(x-u)du ,$$

(3.21.1)

onde $g(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 3\\ 0, & |x|,>3\end{cases}$.

**Notação**: $\Im\{f(x)\}=F\{\alpha\}$.

$$\Im\{g(x)\}=\frac{2\operatorname{sen}(3\alpha)}{\alpha}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier a (3.21.1), tem-se que:

$$\Im\{f(x)\}=\Im\{f(x-3)\}+\Im\left\{xe^{-3|x|}\right\}+\Im\{(g*f)(x)\}$$

$$F(\alpha)=e^{3i\alpha}F(\alpha)-i\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{6}{\alpha^2+9}\right]+G(\alpha)F(\alpha)$$

$$F(\alpha)=e^{3i\alpha}F(\alpha)+\frac{12i\,\alpha}{\left(\alpha^2+9\right)^2}+\frac{2\operatorname{sen}(3\alpha)}{\alpha}F(\alpha)$$

$$\left(1-e^{3i\alpha}-\frac{2\operatorname{sen}(3\alpha)}{\alpha}\right)F(\alpha)=\frac{12i\,\alpha}{\left(\alpha^2+9\right)^2}$$

$$F(\alpha)=\frac{12i\,\alpha}{\left(\alpha^2+9\right)^2}\frac{\alpha}{\alpha-\alpha e^{3i\alpha}-2\operatorname{sen}(3\alpha)}$$

$$F(\alpha)=\frac{12i\,\alpha^2}{\left(\alpha^2+9\right)^2\left[\alpha-\alpha e^{3i\alpha}-2\operatorname{sen}(3\alpha)\right]}. \tag{3.21.2}$$

Aplicando-se a transformada de Fourier inversa a (3.21.2), obtém-se a solução procurada.

$$f(x)=\Im^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{12i\,\alpha^2}{\left(\alpha^2+9\right)^2\left[\alpha-\alpha e^{3i\alpha}-2\operatorname{sen}(3\alpha)\right]}e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$f(x)=\Im^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{6i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2e^{-i\alpha x}}{\left(\alpha^2+9\right)^2\left[\alpha-\alpha e^{3i\alpha}-2\operatorname{sen}(3\alpha)\right]}d\alpha$$

**Exercícios**

01. Considere um sistema estável invariante no tempo, caracterizado pela equação diferencial

$$y'(x)+2y(x)=f(x), \tag{1}$$

onde $f(x) = 3e^{-x}\,u(x)$. Solucione a equação diferencial (1) empregando a transformada de Fourier e suas propriedades.

Resposta: $y(x) = 3\left(e^{-x} - e^{-2x}\right)u(x)$.

02. Utilizando a transformada de Fourier e suas propriedades, solucione o problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = t^2 u_{xx}(x,t) & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & -\infty < x < \infty \end{cases},$$

onde $g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$.

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(\alpha x)}{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2 t^3}{3}}\, d\alpha$.

03. Use as transformadas de Fourier para resolver a equação integral

$$f(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2}\left(1 - a^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-u|} f(u)\,du,\ \operatorname{Re}(a) > 0.$$

Resposta: $\dfrac{1}{a} e^{-a|x|}$.

04. Utilizando a transformada de Fourier e suas propriedades, solucione a equação integral

$$3xe^{-4x}h(x) + f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4u}h(u)f(x-u)\,du, \quad h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Resposta: $f(x) = 3\left(e^{-4x} - e^{-3x}\right)h(x)$.

### *3.22 – Exercícios resolvidos*

01. Seja $f: R \to R / f(x) = x^3 e^{-|x|}$.

a) Calcule $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

$\Im\{x^n f(x)\} = (-i)^n F^{(n)}(\alpha)$, $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$ e $\Im\{e^{-a|x|}\} = \dfrac{2a}{\alpha^2 + a^2}$, $a > 0$.

$$\Im\{x^3 e^{-|x|}\} = (-i)^3 \frac{d^3}{d\alpha^3}\left[\frac{2}{\alpha^2+1}\right] = 2i \frac{d^3}{d\alpha^3}\left[\frac{1}{\alpha^2+1}\right]$$

$$= 2i \frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{-2\alpha}{(\alpha^2+1)^2}\right] = -4i \frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\alpha}{(\alpha^2+1)^2}\right]$$

$$= -4i \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{(\alpha^2+1)^2 - 2\alpha(\alpha^2+1)2\alpha}{(\alpha^2+1)^4}\right] = -4i \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\alpha^2+1-4\alpha^2}{(\alpha^2+1)^3}\right]$$

$$= -4i \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1-3\alpha^2}{(\alpha^2+1)^3}\right] = -4i\left[\frac{-6\alpha(\alpha^2+1)^3 - (1-3\alpha^2)3(\alpha^2+1)^2 2\alpha}{(\alpha^2+1)^6}\right]$$

$$= -4i\left[\frac{-6\alpha(\alpha^2+1) - 6\alpha(1-3\alpha^2)}{(\alpha^2+1)^4}\right] = -4i \frac{-6\alpha^3 - 6\alpha - 6\alpha + 18\alpha^3}{(\alpha^2+1)^4}$$

$$= -4i \frac{12\alpha^3 - 12\alpha}{(\alpha^2+1)^4} = -48i \frac{\alpha^3 - \alpha}{(\alpha^2+1)^4}$$

$$\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = -48i \frac{\alpha^3 - \alpha}{(\alpha^2+1)^4}$$

b) Determine para quanto converge a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 - x}{(x^2+1)^4} e^{2ix} dx$.

Propriedade da simetria (dualidade): $\Im\{F(x)\} = 2\pi f(-\alpha)$, $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} -48i \frac{x^3 - x}{(x^2+1)^4} e^{i\alpha x} dx = 2\pi(-\alpha)^3 e^{-|-\alpha|}$$

$$-48i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 - x}{(x^2+1)^4} e^{i\alpha x} dx = -2\pi\alpha^3 e^{-|\alpha|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 - x}{(x^2+1)^4} e^{i\alpha x} dx = \frac{\pi}{24i}\alpha^3 e^{-|\alpha|} = -\frac{i\pi}{24}\alpha^3 e^{-|\alpha|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 - x}{(x^2+1)^4} e^{2ix} dx = \Im\left\{\frac{x^3 - x}{(x^2+1)^4}\right\}\Bigg|_{\alpha=2} = -\frac{i\pi}{24} 2^3 e^{-|2|} = -\frac{i\pi}{3} e^{-2} = -\frac{i\pi}{3e^2}$$

c) Calcule para quanto converge a integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8x^3-2x}{\left(4x^2+1\right)^4}e^{i\pi x}dx$ .

Propriedade da similaridade: $\Im\{f(ax)\}=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\alpha}{a}\right),\ \Im\{f(x)\}=F(\alpha)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8x^3-2x}{\left(4x^2+1\right)^4}e^{i\pi x}dx=\Im\left\{\frac{(2x)^3-(2x)}{\left[(2x)^2+1\right]^4}\right\}\Bigg|_{\alpha=\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8x^3-2x}{\left(4x^2+1\right)^4}e^{i\pi x}dx=-\frac{1}{2}\frac{i\pi}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3e^{-\left|\frac{\pi}{2}\right|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{8x^3-2x}{\left(4x^2+1\right)^4}e^{i\pi x}dx=-\frac{i\pi^4}{384}e^{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{i\pi^4}{384e^{\pi/2}}$$

02. Utilizando a transformada de Fourier e suas propriedades, solucione a equação diferencial a seguir.

$$y''(x)-5y(x)=e^{-3|x|}$$

**Notação**: $\Im\{y(x)\}=Y(\alpha)$.

$$\Im\{y''(x)-5y(x)\}=\Im\{e^{-3|x|}\}\Rightarrow\Im\{y''(x)\}-5\Im\{y(x)\}=\Im\{e^{-3|x|}\}$$

$$(-i\alpha)^2Y(\alpha)-5Y(\alpha)=\frac{6}{\alpha^2+9}\Rightarrow-\alpha^2Y(\alpha)-5Y(\alpha)=\frac{6}{\alpha^2+9}\Rightarrow-\left(\alpha^2+5\right)Y(\alpha)=\frac{6}{\alpha^2+9}$$

$$Y(\alpha)=-\frac{6}{\left(\alpha^2+9\right)\left(\alpha^2+5\right)}=\frac{A\alpha+B}{\alpha^2+9}+\frac{C\alpha+D}{\alpha^2+5}$$

$$-6=(A\alpha+B)\left(\alpha^2+5\right)+(C\alpha+D)\left(\alpha^2+9\right)$$

$$-6=A\alpha^3+5A\alpha+B\alpha^2+5B+C\alpha^3+9C\alpha+D\alpha^2+9D$$

$$-6=(A+C)\alpha^3+(B+D)\alpha^2+(5A+9C)\alpha+(5B+9D)$$

$$\begin{cases}A+C=0\\5A+9C=0\end{cases}\Rightarrow A=C=0 \qquad \begin{cases}B+D=0\\5B+9D=-6\end{cases}\Rightarrow B=\frac{3}{2}\ \text{e}\ D=-\frac{3}{2}$$

$$Y(\alpha)=\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha^2+9}-\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha^2+5}$$

$$Y(\alpha)=\frac{3}{2}\frac{1}{6}\frac{6}{\alpha^2+9}-\frac{3}{2}\frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{5}}{\alpha^2+5}$$

Como $\Im\{e^{-a|x|}\}=\frac{2a}{\alpha^2+a^2}$ , $a>0$, tem-se que:

$$y(x)=\Im^{-1}\{Y(\alpha)\}=\frac{1}{4}e^{-3|x|}-\frac{3\sqrt{5}}{20}e^{-\sqrt{5}|x|}$$

### *3.23 – Exercícios complementares*

01. Determine as seguintes integrais impróprias:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|} e^{ix} dx$; Resposta: $\frac{3}{5}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{2ix} dx$. Resposta: $\frac{\sqrt{2\pi}}{e^2}$

02. Calcule:

a) $\Im\left\{ xe^{-\frac{x^2}{2}} \right\}$; Resposta: $\sqrt{2\pi}\, i\alpha\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$

b) $\Im\left\{ 3e^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{-2|x|} \right\}$. Resposta: $3\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}} + \frac{8}{\alpha^2 + 4}$

03. Sabendo que $\Im\left\{e^{-a|x|}\right\} = \frac{2a}{\alpha^2 + a^2}$, $\text{Re}(a) > 0$, calcule:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\varepsilon x}}{x^2 + 9} dx$; Resposta: $\frac{\pi}{3} e^{-3|\varepsilon|}$

b) $\Im\left\{ e^{-4|x|}\left(2x - x^2\right) \right\}$. Resposta: $\frac{32i\alpha}{\left(\alpha^2 + 16\right)^2} + \frac{48\alpha^2 - 256}{\left(\alpha^2 + 16\right)^3}$

04. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int_{0}^{\infty} e^{-3x^2} \cos(6x) dx$; Resposta: $\frac{\sqrt{3\pi}}{6e^3}$

b) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 9} dx$; Resposta: $\frac{\pi}{6e^6}$

c) $\int_{0}^{\infty} x^{10} e^{(2i-3)x} dx$. Resposta: $\frac{10!}{13^{11}} (3 + 2i)^{11}$

05. Calcule:

a) $\Im\left\{ e^{-3|x|} x^2 \right\}$; Resposta: $\frac{108 - 36\alpha^2}{\left(\alpha^2 + 9\right)^3}$

b) $\Im\left\{\dfrac{3-x^2}{\left(x^2+9\right)^3}\right\}$. Resposta: $\dfrac{\pi}{18}\alpha^2 e^{-3|\alpha|}$

06. Seja $f: R \to R / f(x) = 2e^{-3|x|} + x^2 e^{-3x}\, u(x)$, sendo $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ a função degrau unitário.

a) Calcule $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$.

Resposta: $\dfrac{12}{\alpha^2+9} + \dfrac{2}{(3-i\alpha)^3}$.

b) Determine $F_R(\alpha)$.

Resposta: $\dfrac{6\left(2\alpha^4+33\alpha^2+171\right)}{\left(\alpha^2+9\right)^3}$.

c) Determine $F_I(\alpha)$.

Resposta: $\dfrac{2\alpha\left(27-\alpha^2\right)}{\left(\alpha^2+9\right)^3}$.

d) Calcule $\Im\left\{\dfrac{54+54ix-18x^2-2ix^3}{\left(x^2+9\right)^3}\right\}$.

Resposta: $2\pi\alpha^2 e^{3\alpha}\, u(-\alpha) = \begin{cases} 0, \alpha > 0 \\ 2\pi\alpha^2 e^{3\alpha}, \alpha < 0 \end{cases}$.

07. Determine as seguintes transformadas:

a) $\Im\{\delta(x-4)\}$; Resposta: $e^{4i\alpha}$

b) $\Im\left\{e^{-(x-1)^2}\right\}$; Resposta: $\sqrt{\pi}e^{\left(i-\frac{\alpha}{4}\right)\alpha}$

c) $\Im\{5\, u(x) - u(x-5)\}$; Resposta: $\left(5-e^{5i\alpha}\right)\left[\pi\delta(\alpha)+\dfrac{i}{\alpha}\right]$

d) $\Im\left\{x^2 e^{2ix-3|x|}\right\}$; Resposta: $36\dfrac{3-(\alpha+2)^2}{\left[(\alpha+2)^2+9\right]^3}$

e) $\Im\left\{\dfrac{3-(x+2)^2}{\left[(x+2)^2+9\right]^3}\right\}$. Resposta: $\dfrac{\pi}{18}\alpha^2 e^{-2i\alpha-3|\alpha|}$

08. Sabendo que $\Im_S\{e^{-x}\} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$, determine $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\text{sen}(ax)}{x^2+1}\,dx$.

Resposta: $\dfrac{\pi}{2}e^{-a}$.

09. Seja $f(x) = \begin{cases} \cos(x), \text{ se } |x| < \pi \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$. Determine $\Im\{f(x)\}$.

Resposta: $\Im\{f(x)\} = \dfrac{2\alpha\,\text{sen}(\pi\alpha)}{1-\alpha^2}$.

10. Seja $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), \text{ se } |x| < \dfrac{\pi}{3} \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$. Determine $\Im\{f(x)\}$.

Resposta: $\Im\{f(x)\} = \dfrac{i}{1-\alpha^2}\left[\sqrt{3}\alpha\cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\dfrac{\alpha\pi}{3}\right)\right]$.

11. Resolva a equação integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases}$.

Resposta: $\dfrac{2\,\text{sen}(x)}{\pi x}$.

12. Solucione a equação integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,\text{sen}(\alpha x)\,dx = \begin{cases} 1, & 0 \le \alpha < 1 \\ 2, & 1 \le \alpha < 2 \\ 0, & \alpha \ge 2 \end{cases}$.

Resposta: $\dfrac{2}{\pi x}[1+\cos(x) - 2\cos(2x)]$.

13. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$.

a) Determine a transformada de Fourier de f(x).

Resposta: $F(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha\varepsilon)}{\alpha\varepsilon}$, $F(0) = 1$.

b) Calcule o limite dessa transformada quando $\varepsilon \to 0^+$.

Resposta: 1.

14. Duas funções muito usadas no estudo de sinais são as funções $\operatorname{rect}(x)=\begin{cases}0, & |x|>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & |x|=\frac{1}{2}\\ 1, & |x|<\frac{1}{2}\end{cases}$

(função retangular) e $\operatorname{sinc}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Mostre que $\Im\{\operatorname{rect}(x)\}=\operatorname{sinc}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

15. Seja $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$.

a) Esboce o gráfico de $f(x)$.

b) Calcule $\Im\{f(x)\}$.

Resposta: $\Im\{f(x)\}=\dfrac{2i}{\alpha^2}\left[\operatorname{sen}(\alpha)-\alpha\cos(\alpha)\right]$.

c) Use (b) para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\right]^2}{x^4}\,dx$.

Resposta: $\dfrac{\pi}{3}$.

16. Seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, & |x|\le 4\pi\\ 0, & |x|>4\pi\end{cases}$.

a) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$.

Resposta: $4\pi^2$.

b) A função $f(x)$ pode ser representada na forma integral? Justifique.

c) Em caso afirmativo, para quanto converge a integral de Fourier de $f(x)$?

d) Calcule $\Im\{f(x)\}$.

Resposta: $\Im\{f(x)\}=\dfrac{i}{2\alpha^2}\left[\operatorname{sen}(4\pi\alpha)-4\pi\alpha\cos(4\pi\alpha)\right]$.

17. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a}, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \ a > 0$.

a) Esboce o gráfico de $f(x)$.

b) A função $f(x)$ é absolutamente integrável? Justifique.

c) Calcule $\Im\{f(x)\}$.

Resposta: $\Im\{f(x)\} = \dfrac{2}{a\alpha^2}[1 - \cos(a\alpha)]$.

d) Use (c) para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1-\cos(2x)]^2}{x^4} dx$.

Resposta: $\dfrac{8\pi}{3}$.

18. Seja $f(x) = e^{-x}\cos(x)$, $x > 0$. Calcule $\Im_C\{f(x)\}$.

Resposta: $\Im_C\{f(x)\} = \dfrac{\alpha^2 + 2}{\alpha^4 + 4}$.

19. Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(x^2+2)\cos(ax)}{x^4+4} dx$, $a \in R^+$, $R^+ = \{w \in R; w > 0\}$.

Resposta: $\dfrac{\pi}{2} e^{-a}\cos(a), a > 0$.

20. Considere um sistema estável invariante no tempo, caracterizado pela equação diferencial

$$3y''(x) + 24y'(x) + 45y(x) = f(x), \tag{1}$$

onde $f(x) = 4e^{-4x}\,u(x)$. Solucione a equação diferencial (1) empregando as transformadas de Fourier e suas propriedades.

R.: $\dfrac{2}{3}\left(e^{-5x} - 2e^{-4x} + e^{-3x}\right)u(x)$

21. Usando as transformadas de Fourier, solucione a equação diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, \ x > 0, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = e^{-x} \end{cases},$$

com $u(x,t)$ limitada.

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha^2 + 1} e^{-2\alpha^2 t} d\alpha$.

22. Utilizando as transformadas de Fourier, solucione a equação diferencial parcial $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty < x < \infty, \ t > 0$, sujeita às condições iniciais $u_t(x,0) = 0$ e $u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$.

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(3\alpha t)}{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(3\alpha t)\cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$.

23. Empregando as transformadas de Fourier e suas propriedades, solucione o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 2u_x, & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-2|x|}, & -\infty < x < \infty \end{cases}.$$

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(-4\alpha^2 - 2i\alpha)t}}{\alpha^2 + 4} e^{-i\alpha x} d\alpha$

24. Empregando as transformadas de Fourier, solucione o problema de vibração na viga infinita.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xxxx}(x,t) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Resposta: $U(\alpha,t) = F(\alpha)\cosh(c\alpha^2 t) + \dfrac{G(\alpha)}{c\alpha^2}\operatorname{senh}(c\alpha^2 t)$; $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha,t) e^{-i\alpha x} d\alpha$.

25. Empregando a transformada de Fourier e suas propriedades, solucione o problema de valor inicial abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = 2\dfrac{\partial^6}{\partial x^6} u(x,t) & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \cos\left(\sqrt{2}\alpha^3 t\right)\cos(\alpha x)\, d\alpha$ .

# 4. TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827): matemático, físico e astrônomo francês. Embora Laplace tenha usado a transformada integral que recebeu seu nome, é mais provável que essa integral tenha sido estudada inicialmente por Euler (função gama: $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ ).

Define-se neste capítulo as transformadas de Laplace (direta e inversa) e emprega-se estas transformadas na solução de equações íntegro-diferenciais e equações diferenciais ordinárias e parciais.

## *4.1 – Definição da transformada de Laplace*

### 4.1.1 – Motivação

Solução de equações íntegro-diferenciais, como

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t), \qquad (4.1.1)$$

e de equações diferenciais ordinárias, tais como

$$L\frac{d^2}{dt^2}q(t) + R\frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t). \qquad (4.1.2)$$

Nas equações (4.1.1) e (4.1.2) tem-se que $i(t)$ é a corrente, $q(t)$ é a carga instantânea no capacitor e $E(t)$ é a força eletromotriz (f.e.m) em um circuito elétrico em série L-R-C, como o representado na Figura 4.1.

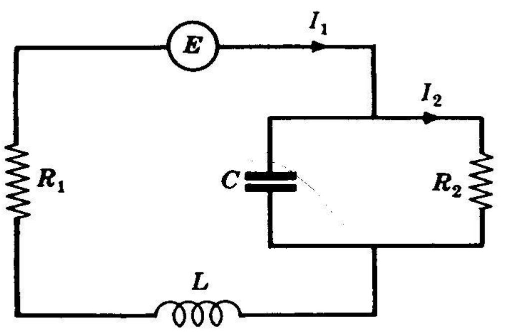



**Figura 4.1**: Circuito em série L-R-C – **[13]**.

A força eletromotriz é muitas vezes seccionalmente contínua, como ilustra a Figura 4.2.

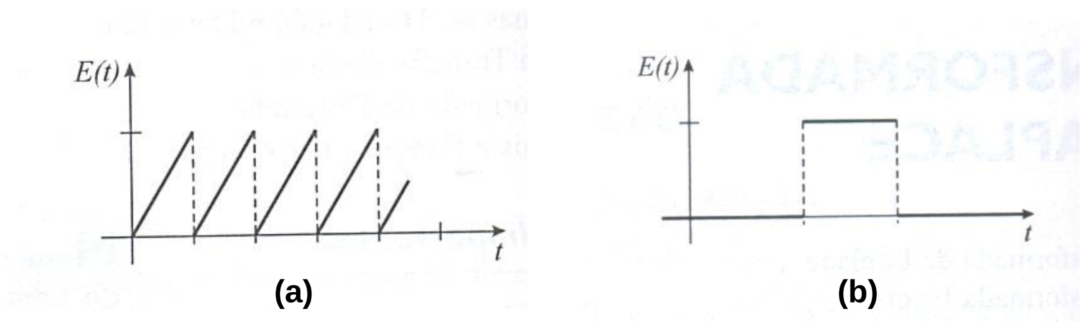



**Figura 4.2**: **(a)** Função dente de serra; **(b)** função onda quadrada. – **[18]**

### 4.1.2 – Função de Heaviside

No estudo da transformada de Laplace, define-se $u(t-a)$ para $t \geq 0$ como

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leq t < a \\ 1, \text{se } t \geq a \end{cases}, \quad (4.1.2.1)$$

onde $a$ é uma constante positiva.

Quando multiplicada por outra função definida para $t \geq 0$, a função degrau unitário (4.1.2.1) cancela uma porção do gráfico da função.

**Exemplo**

$f(t) = \text{sen}(t)u\ (t-2\pi) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 2\pi \\ \text{sen}(t), & \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$, uma vez que u $(t-2\pi) = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leq t < 2\pi \\ 1, \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$.

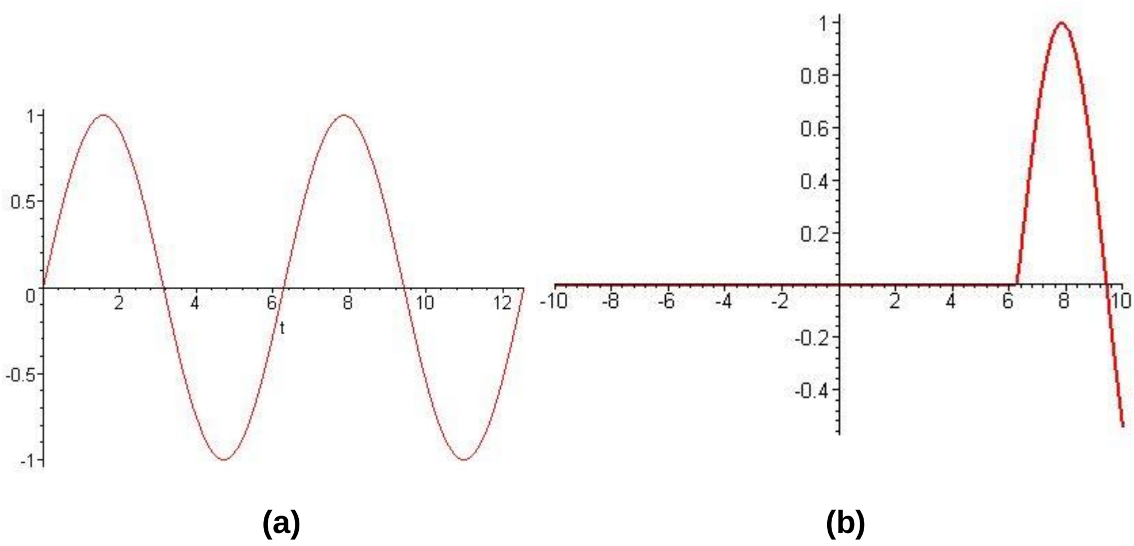



**Figura 4.3**: **(a)** Gráfico de $f(t) = \text{sen}(t)$; **(b)** gráfico de $f(t) = \text{sen}(t)\, u(t-2\pi)$.

A função degrau unitário (4.1.2.1) pode ser usada para escrever funções definidas por várias sentenças em uma forma compacta.

**Exemplo**

A voltagem em um circuito é dada por

$$E(t)=\begin{cases}20t, \text{ se } 0 \le t < 5 \\ 0, \quad \text{se } t \ge 5\end{cases}. \qquad (4.1.2.2)$$

Lembrando que $u(t-5)=\begin{cases}0, \text{ se } 0 \le t < 5 \\ 1, \text{ se } t \ge 5\end{cases}$, pode-se expressar (4.1.2.2) como

$E(t)=20t-20t\,u(t-5)$.

**Exercício**

Seja $f(t)=\begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 1-2t, & t \ge 2\end{cases}$. Escreva $f(t)$ de forma compacta usando a função degrau unitário.

Resposta: $f(t)=t+(1-3t)u(t-2)$.

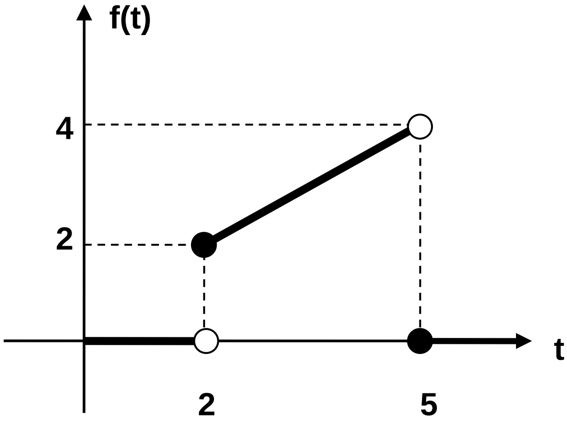
### 4.1.2.1 - Generalização

**1.** Se $f(t)=\begin{cases}g(t), \text{ se } 0 \le t < a \\ h(t), \text{ se } t \ge a\end{cases}$, então $f(t)=g(t)-g(t)\,u(t-a)+h(t)\,u(t-a)$.

**2.** Se $f(t)=\begin{cases}0, & \text{se } 0 \le t < a \\ g(t), & \text{se } a \le t < b \\ 0, & \text{se } t \ge b\end{cases}$, então $f(t)=g(t)[u(t-a)-u(t-b)]$.

**Exercício**

Seja $f(t)$ a função representada graficamente abaixo.




Expresse $f(t)$ de forma compacta usando a função degrau unitário.

Resposta: $f(t) = \left(\dfrac{2}{3}t + \dfrac{2}{3}\right)[u(t-2) - u(t-5)]$.

### 4.1.3 – Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(t)e^{xt}e^{iyt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(t)e^{-st}dt, \text{ onde } s = -(x+iy) \qquad (4.1.3.1)$$

$f(t)$: *função original*

$F(s)$: *função transformada*

$e^{-st}$: *núcleo da transformação*

$f : R \to C$

$F : C \to C$

Como $H(t)$ é a função de Heaviside, pode-se escrever (4.1.3.1) como

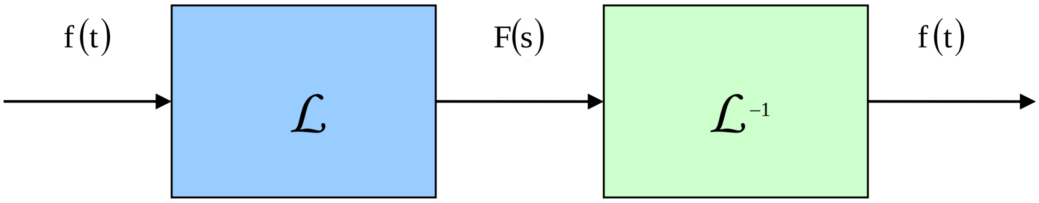
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt\,. \qquad (4.1.3.2)$$

A expressão (4.1.3.2) é chamada *transformada de Laplace unilateral*[1] de $f(t)$. A transformada existe se a integral imprópria em (4.1.3.2) converge para algum valor de s.

**<u>Notação</u>**

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \qquad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) \qquad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, então $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C F(s)e^{st}ds$ é a transformada de Laplace unilateral inversa.




**<u>Figura 4.4</u>**: Transformadas de Laplace.

Pode-se estabelecer uma relação entre as transformadas de Fourier e de Laplace. Se na transformada de Laplace de $f(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(t)e^{xt}e^{iyt}dt$, considera-se $g(t) = H(t)f(t)e^{xt}$, tem-se $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{iyt}dt$, que nada mais é do que a transformada de Fourier de $g(t)$.

A transformada de Laplace unilateral de uma função $f : R \to C$ é uma função $F : C \to C$ que associa a $f(t)$ uma função complexa $F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$, onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios com coeficientes reais. Os valores de $s$ tais que $N(s) = 0$ são os *zeros* da transformada $F(s)$; os valores de $s$ tais que $D(s) = 0$ são os *polos* da transformada $F(s)$.

[1] A transformada de Laplace bilateral é definida como $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$.

**Exemplo**

A transformada de Laplace da função $f(t) = 1 + 3e^{2t}$, $t \geq 0$, é a função complexa $F(s) = \dfrac{2(2s-1)}{s(s-2)}$, $\mathrm{Re}(s) > 2$.

Zeros de $F(s)$: $s = \dfrac{1}{2}$

Polos de $F(s)$: $s = 0$, $s = 2$

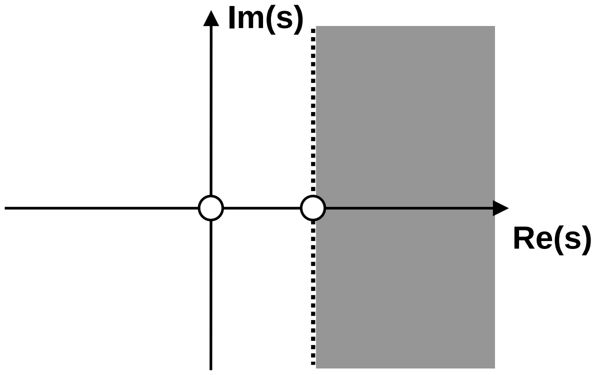



**Figura 4.5**: Polos e região de convergência de $F(s) = \dfrac{2(2s-1)}{s(s-2)}$.

**Observações**

1ª) No exemplo anterior, cada polo de $F(s)$ está associado à uma exponencial da função $f(t)$ (os polos são os coeficientes nos expoentes).

2ª) Se $D(s) = (s-a)^k$, com $k$ inteiro e positivo, $s = a$ é um polo de ordem $k$ de $F(s)$. No exemplo, $s = 0$ e $s = 2$ são polos de ordem um (ou polos simples).

**Exemplo**

Calcular $\mathcal{L}\{1\}$.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s}, \mathrm{Re}(s) > 0$$

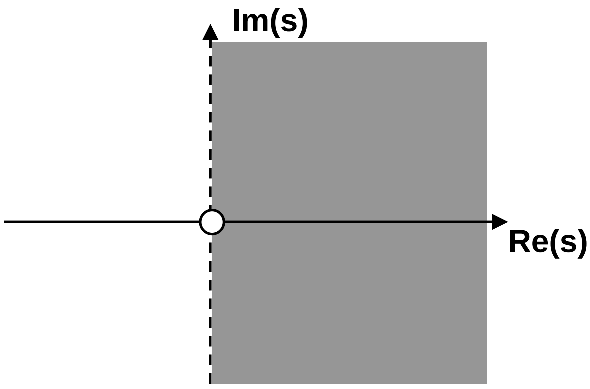



**Figura 4.6**: Polos e região de convergência de $F(s) = \frac{1}{s}$.

**Exemplo**

As transformadas $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\}$ e $\mathcal{L}\left\{e^{t^2}\right\}$ não existem, ou seja, as integrais impróprias $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t} dt$ e $\int_0^\infty e^{t^2 - st} dt$ são divergentes.

**Exemplo**

$$\mathcal{L}\left\{M e^{ct}\right\} = \int_0^\infty M e^{ct} e^{-st} dt = M \int_0^\infty e^{(c-s)t} dt = M \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(c-s)t} dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(c-s)t}}{c-s}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(c-s)b}}{c-s} - \frac{1}{c-s}\right] = \frac{M}{s-c},\ \operatorname{Re}(s) > c$$

### *4.2 – Funções de ordem exponencial*

Uma função $f(t)$ é de *ordem exponencial c* quando $t \to \infty$ se existem constantes reais c, $M > 0$ e $N > 0$ tais que

$$\left|e^{-ct} f(t)\right| < M, \forall t > N$$

ou

$$\left|f(t)\right| < M e^{ct}, \forall t > N\,.$$

## Exemplos

1º) A função $f(t)=t$ é de ordem exponencial para $t>0$.

$$|t|<e^{t},\ t>0$$
$$c=1, M=1,\ N=0$$

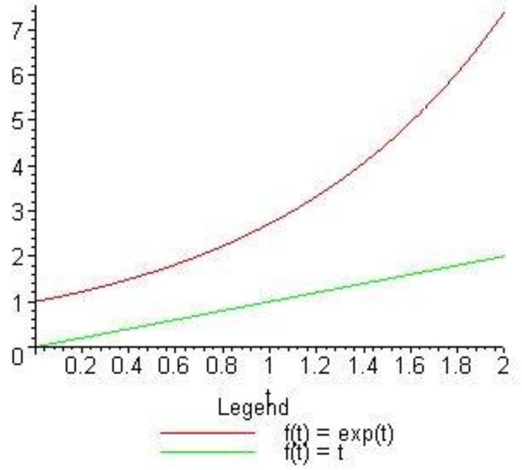



**Figura 4.7**: Gráfico de $f(t)=e^{t}$ e de $f(t)=t$.

2º) A função $f(t)=e^{-t}$ é de ordem exponencial para $t>0$.

$$|e^{-t}|<e^{t},\ t>0$$
$$c=1, M=1, N=0$$

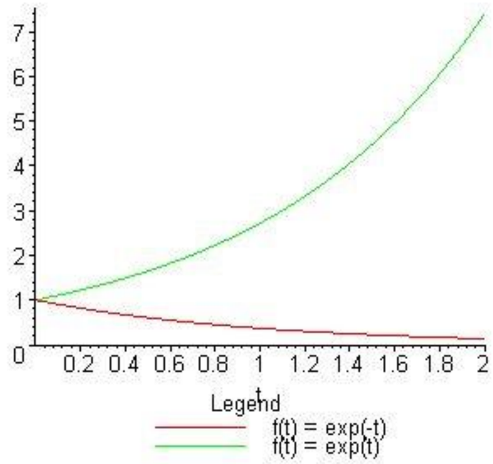



**Figura 4.8**: Gráfico de $f(t)=e^{t}$ e de $f(t)=e^{-t}$.

3º) A função $f(t) = 2\cos(t)$ é de ordem exponencial para $t > 0$.

$$|2\cos(t)| < 2e^{t}, \; t > 0$$
$$c = 1, M = 2, N = 0$$

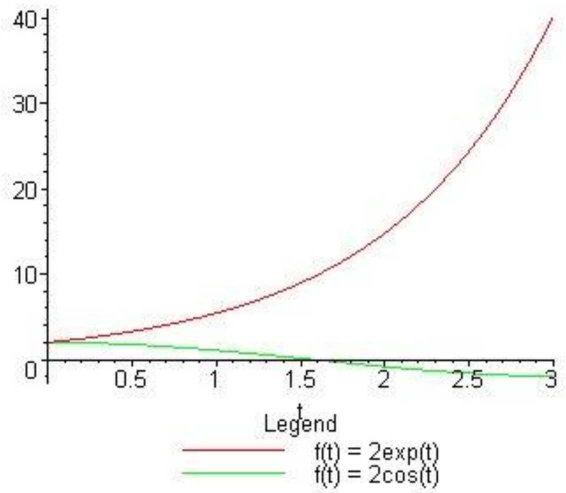



**Figura 4.9**: Gráfico de $f(t) = 2e^{t}$ e de $f(t) = 2\cos(t)$.

4º) A função $f(t) = e^{t^2}$ não é de ordem exponencial.

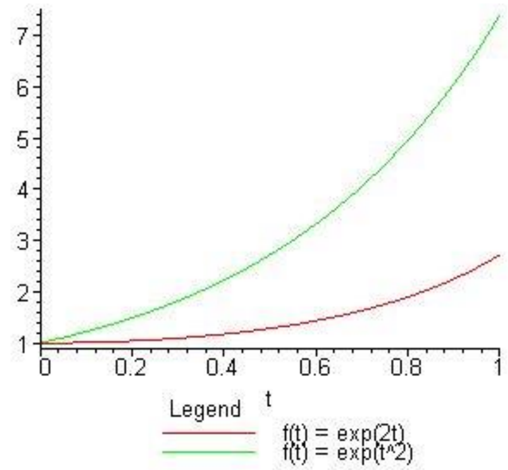



**Figura 4.10**: Gráfico de $f(t) = e^{t^2}$ e de $f(t) = e^{2t}$.

5º ) Todo polinômio é uma função de ordem exponencial.

### *4.3 – Convergência da transformada de Laplace unilateral*

### 4.3.1 – Convergência absoluta e condicional

A integral $\int_a^\infty f(t)dt$ é dita *absolutamente convergente* se $\int_a^\infty |f(t)|dt$ converge. Se $\int_a^\infty f(t)dt$ converge mas $\int_a^\infty |f(t)|dt$ diverge, então $\int_a^\infty f(t)dt$ é dita *condicionalmente convergente*.

**Teorema**

Se $\int_a^\infty |f(t)|dt$ converge, então $\int_a^\infty f(t)dt$ converge.

### 4.3.2 – Condições suficientes para a convergência

Seja $f(t)$ uma função seccionalmente contínua em todo intervalo finito $0 \le t \le N$ e de ordem exponencial c para $t > N$. Então, a transformada de Laplace unilateral $F(s)$ de $f(t)$ existe para todo $\mathrm{Re}(s) > c$.

**Prova**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= \underbrace{\int_0^N f(t)e^{-st}dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_N^\infty f(t)e^{-st}dt}_{\mathrm{II}}$$

I : integral própria (ou uma soma de integrais próprias)

II: integral imprópria

$$\left|\int_N^\infty f(t)e^{-st}dt\right| \le \int_N^\infty \left|f(t)e^{-st}\right|dt \le \int_N^\infty |f(t)|\left|e^{-st}\right|dt \le \int_N^\infty \underbrace{Me^{ct}}_{(1)}\underbrace{e^{-xt}}_{(2)}dt$$

$$= M\int_N^\infty e^{ct}e^{-xt}dt = M\int_N^\infty e^{-(x-c)t}dt = M\lim_{b\to\infty}\int_N^b e^{-(x-c)t}dt = M\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-(x-c)t}}{x-c}\right]_N^b$$

$$= M\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-(x-c)b}}{x-c} + \frac{e^{-(x-c)N}}{x-c}\right] = M\frac{e^{-(x-c)N}}{x-c},\ \text{se}\ x = \text{Re}(s) > c$$

(1): $f(t)$ é de ordem exponencial $c$

(2): $s = x + iy$

$$\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-(x+iy)t}\right| = \left|e^{-xt}e^{-iyt}\right| = \left|e^{-xt}[\cos(yt) - i\,\text{sen}(yt)]\right| = \left|e^{-xt}\cos(yt) - ie^{-xt}\text{sen}(yt)\right|$$

$$= \sqrt{\left[e^{-xt}\cos(yt)\right]^2 + \left[e^{-xt}\text{sen}(yt)\right]^2} = \sqrt{e^{-2xt}\cos^2(yt) + e^{-2xt}\text{sen}^2(yt)}$$

$$= \sqrt{e^{-2xt}\left[\cos^2(yt) + \text{sen}^2(yt)\right]} = \sqrt{e^{-2xt}} = \sqrt{\left(e^{-xt}\right)^2} = e^{-xt}$$

Como II converge, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ converge (se $\text{Re}(s) > c$).

### *4.4 – Transformada de Laplace unilateral das funções elementares*

#### 4.4.1 – f(t) = $t^n$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^n e^{-st}dt$$

Integrando $\int t^n e^{-st}dt$ por partes, tem-se que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{t^n e^{-st}}{s}\Big|_0^b + \frac{n}{s}\int_0^b t^{n-1}e^{-st}dt\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b^n \underbrace{e^{-sb}}_{*}}{s} + \frac{n}{s}\int_0^b t^{n-1}e^{-st}dt\right]$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\},\ \text{Re}(s) > 0\,.$$

*: função de decrescimento rápido para $\text{Re}(s) > 0$.

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k}{s}\mathcal{L}\{t^{k-1}\}$$

$$k=1 \Rightarrow \mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2},\ \operatorname{Re}(s)>0$$

$$k=2 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^2\}=\frac{2}{s}\mathcal{L}\{t\}=\frac{2}{s}\frac{1}{s^2}=\frac{2!}{s^3},\ \operatorname{Re}(s)>0$$

$$k=3 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^3\}=\frac{3}{s}\mathcal{L}\{t^2\}=\frac{3}{s}\frac{2!}{s^3}=\frac{3!}{s^4},\ \operatorname{Re}(s)>0$$

$$k=4 \Rightarrow \mathcal{L}\{t^4\}=\frac{4}{s}\mathcal{L}\{t^3\}=\frac{4}{s}\frac{3!}{s^4}=\frac{4!}{s^5},\ \operatorname{Re}(s)>0$$

$$\vdots$$

$$k=n \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}=\frac{n}{s}\frac{(n-1)!}{s^n}=\frac{n!}{s^{n+1}},\ \operatorname{Re}(s)>0$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}},\ \operatorname{Re}(s)>0$$

**A função gama**

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(n)=\mathcal{L}\{t^{n-1}\}\Big|_{s=1}$$

$$\Gamma(2)=\mathcal{L}\{t\}\Big|_{s=1}=\frac{1}{1^2}=1$$

$$\Gamma(4)=\mathcal{L}\{t^3\}\Big|_{s=1}=\frac{3!}{1^4}=6$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)},\ 0<p<1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

**Referências**: **SPIEGEL**, M.R.; **WREDE**, R.C. *Cálculo avançado*. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

**Exercícios**

Calcule as integrais:

01. $\int_0^{\infty} t^{100} e^{-t} dt$ ; Resposta: $100!$

02. $\int_0^{\infty} t^3 e^{-2t} dt$ ; Resposta: $\frac{3}{8}$

### 4.4.2 – f(t) = e^{at}

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}, \ \operatorname{Re}(s) > a, a \in R$$

### 4.4.3 – Resumo: transformada de algumas funções elementares

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}(s) > a$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}(s) > 0$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$ |
| $\operatorname{sen}(at)$ | $\frac{a}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$ |

**Tabela 4.1**: Transformada de Laplace unilateral de algumas funções elementares.

**Exercícios**

01. Calcule as integrais:

a) $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(10t) e^{-3t} dt$ ; Resposta: $\frac{10}{109}$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(t)e^{-2t}dt$;      Resposta: $\dfrac{2}{5}$

02. Seja $f(t)=\begin{cases}2t, \text{ se } 0 \le t \le 5\\ 1, \text{ se } t > 5\end{cases}$. Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Resposta: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s^2}\left(1-e^{-5s}\right) - \dfrac{9}{s}e^{-5s}$.

03. Empregando a definição de transformada de Laplace unilateral, mostre que:

a) $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $a \in R$, $\text{Re}(s) > 0$;

b) $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $a \in R$, $\text{Re}(s) > 0$.

## *4.5 – Propriedades da transformada de Laplace unilateral*

### 4.5.1 – Comportamento da transformada de Laplace F(s) quando s→∞

Se $f(t)$ é uma função seccionalmente contínua para $t \in [0, N]$ e de ordem exponencial para $t > N$, então

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

### 4.5.2 – Linearidade

A transformada de Laplace é um operador linear. Assim, se *a* e *b* são constantes quaisquer, então

$$\mathcal{L}\{a\,f(t)+b\,g(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s)+bG(s).$$

**<u>Prova</u>**

Segue da definição de transformada de Laplace e da propriedade de linearidade da integral.

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^{\infty}[af(t)+bg(t)]e^{-st}dt$$

$$=a\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt+b\int_0^{\infty}g(t)e^{-st}dt=aF(s)+bG(s)$$

**<u>Exemplos</u>**

1º) $\mathcal{L}\{4t^2-3\cos(t)+5e^{-t}\}=4\mathcal{L}\{t^2\}-3\mathcal{L}\{\cos(t)\}+5\mathcal{L}\{e^{-t}\}$

$$=4\underbrace{\frac{2!}{s^3}}_{\mathrm{Re}(s)>0}-3\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\mathrm{Re}(s)>0}+5\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathrm{Re}(s)>-1}$$

$$=\frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+1}+\frac{5}{s+1},\ \mathrm{Re}(s)>0$$

2º) $\mathcal{L}\{\mathrm{sen}^2(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos(2t)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s}}_{\mathrm{Re}(s)>0}-\frac{1}{2}\underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{\mathrm{Re}(s)>0}$$

$$=\frac{1}{2s}-\frac{s}{2(s^2+4)}=\frac{s^2+4-s^2}{2s(s^2+4)}=\frac{2}{s(s^2+4)},\ \mathrm{Re}(s)>0$$

3º) $\mathcal{L}\{\mathrm{senh}(at)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s-a}}_{\mathrm{Re}(s)>a}-\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s+a}}_{\mathrm{Re}(s)>-a}$$

$$=\frac{s+a-(s-a)}{2(s^2-a^2)}=\frac{2a}{2(s^2-a^2)}=\frac{a}{s^2-a^2},\ \mathrm{Re}(s)>|a|$$

4º) $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s-a}}_{\mathrm{Re}(s)>a}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{s+a}}_{\mathrm{Re}(s)>-a}$$

$$=\frac{s+a+(s-a)}{2(s^2-a^2)}=\frac{2s}{2(s^2-a^2)}=\frac{s}{s^2-a^2},\ \mathrm{Re}(s)>|a|$$

5º) $\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \mathcal{L}\{\cos(at) + i\,\text{sen}(at)\} = \mathcal{L}\{\cos(at)\} + i\,\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}$

$$= \underbrace{\frac{s}{s^2+a^2}}_{\text{Re}(s)>0} + i\underbrace{\frac{a}{s^2+a^2}}_{\text{Re}(s)>0}$$

$$= \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s+ia}{(s+ia)(s-ia)} = \frac{1}{s-ia},\ \ \text{Re}(s) > 0$$

Com os últimos exemplos, amplia-se a Tabela 4.1.

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}, \text{Re}(s) > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}, \text{Re}(s) > a$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \text{Re}(s) > 0$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}, \text{Re}(s) > 0$ |
| $\text{sen}(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}, \text{Re}(s) > 0$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}, \text{Re}(s) > \lvert a \rvert$ |
| $\text{senh}(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}, \text{Re}(s) > \lvert a \rvert$ |
| $e^{iat}$ | $\frac{1}{s-ia}, \text{Re}(s) > 0$ |

**Tabela 4.2**: Transformada de Laplace unilateral das funções elementares.

## Exercícios

Calcule as integrais:

01. $\int_0^\infty \text{sen}^2(t)e^{-2t}dt$ ; Resposta: $\frac{1}{8}$

02. $\displaystyle\int_0^{\infty} \cosh(2t)e^{-3t}dt$; Resposta: $\frac{3}{5}$

03. $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{senh}(4t)e^{-5t}dt$; Resposta: $\frac{4}{9}$

04. $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos^2(t)e^{-10t}dt$; Resposta: $\frac{51}{520}$, $\mathcal{L}\{\cos^2(t)\} = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}, \operatorname{Re}(s) > 0$

### 4.5.3 – Primeira propriedade de translação ou deslocamento

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.

**Prova**

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$$

**Exemplo**

$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos(2t)\}$

$f(t) = \cos(2t)$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \dfrac{s}{s^2+4}, \operatorname{Re}(s) > 0$

$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos(2t)\} = F(s+1) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4} = \dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$

### 4.5.4 – Segunda propriedade de translação ou deslocamento

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases} = f(t-a)\,u(t-a)$, sendo $u(t-a)$ a função degrau unitário dada por $u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$, então $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$.

**Prova**

$$t-a=u \Rightarrow t=u+a,\ dt=du,\ t\to a \Rightarrow u\to 0,\ t\to\infty \Rightarrow u\to\infty$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt=\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du=\int_0^\infty f(u)e^{-su}e^{-sa}du=e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du=e^{-as}F(s)$$

**Exemplo**

$$g(t)=\begin{cases}(t-2)^3, & t\ge 2\\ 0, & 0\le t<2\end{cases}=(t-2)^3\,u(t-2),\quad u(t-2)=\begin{cases}0, & 0\le t<2\\ 1, & t\ge 2\end{cases}$$

$$f(t)=t^3,\ a=2$$

$$\mathcal{L}\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4},\ \mathrm{Re}(s)>0$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=e^{-2s}\frac{6}{s^4}=\frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

**Exercício**

Mostre que $\mathcal{L}\{u(t-a)\}=\dfrac{e^{-as}}{s},\ \mathrm{Re}(s)>0$, onde $u(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$.

### 4.5.5 – Similaridade (ou mudança de escala)

Se $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, então $\mathcal{L}\{f(at)\}=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ a>0$.

**Prova**

$$at=u \Rightarrow t=\frac{u}{a},\ dt=\frac{du}{a},\ t\to 0\Rightarrow u\to 0,\ t\to\infty\Rightarrow u\to\infty$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty f(u)e^{-s\frac{u}{a}}\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}du=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

**Exemplo**

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(3t)\}$$

$$f(t) = \operatorname{sen}(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s^2+1}, \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(3t)\} = \frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\frac{9}{s^2+9} = \frac{3}{s^2+9}$$

**Exercícios**

Determine a transformada de Laplace das funções a seguir, especificando para quais valores de s a transformada existe.

01. $\mathcal{L}\{2e^{4t}\}$ Resposta: $F(s) = \frac{2}{s-4}$, $\operatorname{Re}(s) > 4$.

02. $\mathcal{L}\{(t^2+1)^2\}$ Resposta: $F(s) = \frac{s^4+4s^2+24}{s^5}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

03. $\mathcal{L}\{[\operatorname{sen}(t)-\cos(t)]^2\}$ Resposta: $F(s) = \frac{s^2-2s+4}{s(s^2+4)}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

04. $\mathcal{L}\{e^{2t}[3\operatorname{senh}(2t)-5\cosh(2t)]\}$ Resposta: $F(s) = \frac{16-5s}{s(s-4)}$, $\operatorname{Re}(s) > 4$.

### 4.5.6 – Transformada de Laplace unilateral de derivadas

**Teorema 1**: Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),\ \operatorname{Re}(s) > 0,$$

se $f(t)$ é contínua para $0 \le t \le N$ e de ordem exponencial para $t > N$, enquanto $f'(t)$ é seccionalmente contínua para $0 \le t \le N$.

**Prova**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(t)e^{-st}dt \qquad (4.5.6.1)$$

Empregando-se integração por partes em (4.5.6.1), prova-se a propriedade.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b\to\infty}\left[ e^{-st}f(t)\Big|_0^b + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[ \underbrace{e^{-sb}f(b)}_{\to 0\,\text{se}\,\mathrm{Re}(s)>0} - f(0) + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt \right]$$

$$= sF(s) - f(0)$$

**Teorema 2**: Se no Teorema 1 $f(t)$ deixa de ser contínua em $t=0$ mas $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0_+)$ existe (mas não é igual a $f(0)$, que pode ou não existir), então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+).$$

**Teorema 3**: Se no Teorema 1 $f(t)$ é descontínua em $t=a$, então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) - e^{-as}[f(a_+) - f(a_-)],$$

onde $f(a_+) - f(a_-)$ é chamado *salto* na descontinuidade $t=a$. Para mais de uma descontinuidade, pode-se fazer modificações apropriadas.

**Teorema 4**: Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Então

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

se $f(t)$ e $f'(t)$ são contínuas para $0 \le t \le N$ e de ordem exponencial para $t > N$, enquanto $f''(t)$ é seccionalmente contínua para $0 \le t \le N$.

**Prova**

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$
$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

**Exercício**

Mostre, por recursividade, que

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

**Teorema 5** (generalização): Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Então

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \cdots - s\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

se $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ são contínuas para $0 \le t \le N$ e de ordem exponencial para $t > N$, enquanto $f^{(n)}(t)$ é seccionalmente contínua para $0 \le t \le N$.

**Exemplo**

Mostrar que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

$$f(t) = \operatorname{sen}(at)$$
$$f'(t) = a\cos(at)$$
$$f''(t) = -a^2 \operatorname{sen}(at)$$

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-a^2 \operatorname{sen}(at)\right\}$$

$$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) = \mathcal{L}\left\{-a^2 \operatorname{sen}(at)\right\}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$s^2 \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} - s(0) - a = \mathcal{L}\left\{-a^2 \operatorname{sen}(at)\right\}$$

$$s^2 \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} - a = -a^2 \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}$$

$$\left(s^2 + a^2\right) \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = a$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

**Exercício**

Empregando a transformada da derivada, mostre que $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

### 4.5.7 – Transformada de Laplace unilateral de integrais

Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

**Prova**

$$g(t)=\int_0^t f(u)du \Rightarrow g'(t)=f(t)$$

$$g(0)=0$$

$$\mathcal{L}\{g'(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$s\,\mathcal{L}\{g(t)\}-g(0)=F(s),\ \ \mathrm{Re}(s)>0$$

$$s\,\mathcal{L}\{g(t)\}=F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\frac{F(s)}{s} \Rightarrow \ \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

**Exemplo**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \mathrm{sen}(2u)du\right\}=\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(2u)\}\div s=\frac{2/(s^2+4)}{s}=\frac{2}{s(s^2+4)}=\mathcal{L}\{\mathrm{sen}^2(t)\}$$

### 4.5.8 – Derivadas de transformadas de Laplace unilaterais (multiplicação por $t^n$)

Se $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)=(-1)^n F^{(n)}(s).$$

**Prova**

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Derivando-se sob o sinal de integração (regra de Leibniz), obtém-se:

$$\frac{d}{ds}F(s)=F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[f(t)e^{-st}\right]dt$$

$$=\int_0^\infty -t\,f(t)e^{-st}dt=-\int_0^\infty [t\,f(t)]e^{-st}dt=-\mathcal{L}\{t\,f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{t\,f(t)\}=-\frac{d}{ds}F(s)=-F'(s).$$

Demonstrou-se até aqui o teorema para $n = 1$. Para prová-lo integralmente, utiliza-se *indução matemática*.

Suponha-se que o teorema é verdadeiro para $n = k$, isto é,

$$\int_0^{\infty} \left[t^k f(t)\right] e^{-st} dt = (-1)^k F^{(k)}(s).$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} \left[t^k f(t)\right] e^{-st} dt = \frac{d}{ds}\left[(-1)^k F^{(k)}(s)\right]$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} \left[t^k f(t)\right] e^{-st} dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left[t^k f(t) e^{-st}\right] dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s)$$

$$-\int_0^{\infty} \left[t^{k+1} f(t)\right] e^{-st} dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s)$$

$$\int_0^{\infty} \left[t^{k+1} f(t)\right] e^{-st} dt = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s)$$

Assim, demonstrou-se que o teorema também é válido para $n = k + 1$.

Como o teorema é válido para $n = 1$, também o é para $n = 2$, $n = 3$ e para qualquer valor inteiro positivo de n.

**<u>Exemplo</u>**

$$\mathcal{L}\left\{t^2 e^{2t}\right\}$$

$$f(t) = e^{2t}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s-2}, \mathrm{Re}(s) > 2$$

$$\mathcal{L}\left\{t e^{2t}\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-2}\right] = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2 e^{2t}\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s-2}\right] = \frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{(s-2)^2}\right] = \frac{2}{(s-2)^3}$$

### 4.5.9 – Integrais de transformadas de Laplace unilaterais (divisão por t)

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du \text{ desde que } \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ exista.}$$

**Prova**

Seja $g(t) = \frac{f(t)}{t} \Rightarrow f(t) = t\,g(t)$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\,g(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds}G(s)$$

$$F(s) = -\frac{d}{ds}G(s)$$

$$\frac{d}{ds}G(s) = -F(s)$$

Integrando-se a igualdade anterior, obtém-se:

$$\int_s^{\infty} \frac{d}{du}G(u)du = -\int_s^{\infty} F(u)du$$

$$\lim_{b\to\infty} G(u)\Big|_s^b = -\int_s^{\infty} F(u)du$$

$$\lim_{b\to\infty}[G(b) - G(s)] = -\int_s^{\infty} F(u)du\,.$$

Como $\lim_{b\to\infty} G(b) = 0$:

$$-G(s) = -\int_s^{\infty} F(u)du$$

$$G(s) = \int_s^{\infty} F(u)du$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du\,.$$

## Exemplos

1º) $\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}(t)}{t}\right\}$

Como $\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$, $\text{Re}(s) > 0$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$ e $\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{z}{a}\right)$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen}(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2+1}du = \lim_{b\to\infty}\int_s^b \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\text{arctg}(u)\right]_s^b = \lim_{b\to\infty}\left[\text{arctg}(b) - \text{arctg}(s)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(s) = \text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$$

2º) Provar que $\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(s) = \text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$.

$$\text{arctg}(s) + \text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como $\text{arctg}(s) = \alpha \Rightarrow \text{tg}(\alpha) = s$ e $\text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right) = \beta \Rightarrow \text{tg}(\beta) = \frac{1}{s}$, tem-se que:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) = 0$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$$

$$\frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}$$

$$\frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \text{tg}(\beta) \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

### 4.5.10 – Convolução

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções seccionalmente contínuas em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial. Então

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

**Prova**

Aqui define-se a convolução como

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

Sejam $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(\beta)e^{-s\beta}d\beta$.

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)\left(\int_0^\infty g(\beta)e^{-s\beta}d\beta\right)$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}f(\tau)g(\beta)d\tau\,d\beta$$

Fixando-se $\tau$ e considerando-se $t = \tau+\beta \Rightarrow \beta = t-\tau$ e $dt = d\beta$, tem-se que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt\right\}d\tau.$$

Como $f(t)$ e $g(t)$ são funções seccionalmente contínuas em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial, pode-se inverter a ordem de integração. Dessa forma

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}(f*g)dt$$

$$= L\{f*g\}.$$

**Exemplo**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^u \mathrm{sen}(t-u)du\right\} = \mathcal{L}\{e^t * \mathrm{sen}(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\}\,\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(t)\} = \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

### 4.5.11 – Valor inicial

Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

**Prova**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0) \qquad (4.5.11.1)$$

Sabemos que, se $f'(t)$ é seccionalmente contínua e de ordem exponencial, então $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f'(t)\} = 0$.

Tomando-se o limite quando $s\to\infty$ em (4.5.11.1) e supondo-se que $f(t)$ é contínua em $t=0$, encontra-se

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0)]$$

$$0 = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

**Exemplo**

$$f(t) = 5e^{-2t} \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2}$$

$$\lim_{t\to 0} 5e^{-2t} = \lim_{s\to\infty} \frac{5s}{s+2} = 5$$

### 4.5.12 – Valor final

Se os limites indicados existem, então

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

**Prova**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0) \qquad (4.5.12.1)$$

O limite do lado esquerdo de (4.5.12.1) quando $s\to 0$ é:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} f'(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} f'(t)dt=\lim_{b\to\infty}\left[f(t)\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[f(b)-f(0)\right]$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[f(t)-f(0)\right]$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[f(t)\right]-f(0)$$

O limite do lado direito de (4.5.12.1) quando $s\to 0$ é

$\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0)\right]=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right]-f(0).$

Logo:

$$\lim_{t\to\infty}\left[f(t)\right]-f(0)=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right]-f(0)$$
$$\lim_{t\to\infty}\left[f(t)\right]=\lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right]$$

**Exemplo**

$$f(t)=5e^{-2t}\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{5}{s+2}$$

$$\lim_{t\to\infty}5e^{-2t}=\lim_{s\to 0}\frac{5s}{s+2}=0$$

### *4.6 – Transformada de Laplace unilateral de funções periódicas*

Suponha que $f(t)$ tem um período $T>0$ de modo que $f(t+T)=f(t)$ ($f(t)$ é periódica de período fundamental T). Então,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt=\frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}.$$

**Prova**

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{T} f(t)e^{-st}dt+\int_T^{2T} f(t)e^{-st}dt+\int_{2T}^{3T} f(t)e^{-st}dt+\ldots$$

Substituições

$t=u$ 1ª integral

$t=u+T$ 2ª integral $\Rightarrow u=t-T$

$t=u+2T$ 3ª integral $\Rightarrow u=t-2T$

$\vdots$

Em todas as substituições tem-se que $du = dt$ .

Logo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T f(u)e^{-su}du + \int_0^T f(u+T)e^{-s(u+T)}du + \int_0^T f(u+2T)e^{-s(u+2T)}du + \dots$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T f(u)e^{-su}du + e^{-sT}\int_0^T f(u)e^{-su}du + e^{-2sT}\int_0^T f(u)e^{-su}du + \dots$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \cdots\right)\int_0^T f(u)e^{-su}du$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left[1 + e^{-sT} + \left(e^{-sT}\right)^2 + \left(e^{-sT}\right)^3 + \cdots\right]\int_0^T f(u)e^{-su}du \, .$$

Como $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-r}$, se $|r| < 1$, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(u)e^{-su}du \, .$$

**Exemplo**

Seja $f(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}(t), & 0 \le t < \pi \\ 0, & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$ uma função 2π-periódica. Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ .

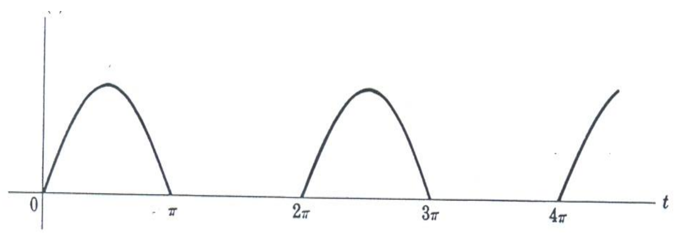



**Figura 4.11**: Curva senoidal com meia onda retificada – **[13]**.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-s2\pi}}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(t)e^{-st}dt \qquad (4.6.1)$$

Integrando-se (4.6.1) por partes duas vezes, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{1}{s^2+1}\left[-e^{-st}\cos(t) - se^{-st}\mathrm{sen}(t)\right]\right\}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{1}{s^2+1}\left(e^{-s\pi}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1+e^{-\pi s}}{\left(1-e^{-2\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}$$

$$= \frac{1+e^{-\pi s}}{\left(1+e^{-\pi s}\right)\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}$$

### *4.7 – Cálculo de integrais impróprias*

**Exemplos**

1º) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(4x)e^{-3x}dx = \frac{3}{3^2+4^2} = \frac{3}{25}$

2º) $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{-3t}\operatorname{sen}(t)dt$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\int_0^{\infty} t\operatorname{sen}(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{t\operatorname{sen}(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$\int_0^{\infty} t\operatorname{sen}(t)e^{-3t}dt = \frac{2(3)}{\left(3^2+1\right)^2} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

3º) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}-e^{-3t}\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} \overset{\overbrace{}^{L'H}}{=} \lim_{t\to 0^+}\left[-e^{-t}+3e^{-3t}\right] = 2$$

$$\int \frac{dz}{z+a} = \ln|z+a| + C$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} e^{-st}dt = \int_s^{\infty} \left[\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right]du = \lim_{b\to\infty} \int_s^{b} \left[\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right]du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\Big[\ln|u+1| - \ln|u+3|\Big]_s^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{u+1}{u+3}\right|\right]_s^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{b+1}{b+3}\right| - \ln\left|\frac{s+1}{s+3}\right|\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{1+\frac{1}{b}}{1+\frac{3}{b}}\right| - \ln\left|\frac{s+1}{s+3}\right|\right]$$

$$= -\ln\left|\frac{s+1}{s+3}\right|$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} e^{-st}dt \to \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} dt \quad \text{quando} \quad s \to 0^+$$

$$\text{Assim,} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t} dt = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(1) + \ln(3) = \ln(3)$$

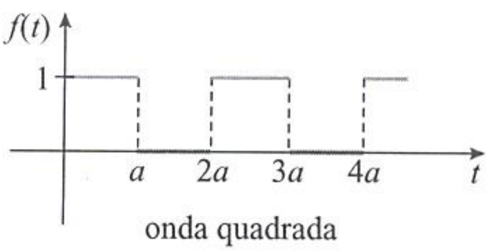
## <u>Exercícios</u>

Nos exercícios a seguir, calcule a transformada de Laplace.

01. $\mathcal{L}\{t[3\text{sen}(2t) - 2\cos(2t)]\}$ Resposta: $\dfrac{8+12s-2s^2}{(s^2+4)^2}$.

02. $\mathcal{L}\{t^3\cos(t)\}$ Resposta: $\dfrac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$.

03. $\mathcal{L}\{f(t)\}$, sendo $f(t)$ a função periódica representada graficamente abaixo.




**<u>Figura 4.12</u>**: Onda quadrada – **[18]**.

Resposta: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s\left(1+e^{-as}\right)}$ .

04. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$

Resposta: $\dfrac{\pi}{4}$ .

### *4.8 – Métodos para determinar a transformada de Laplace unilateral*

### 4.8.1 – Uso da definição

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

### 4.8.2 – Expansão em série de potências

Se $f(t)$ tem expansão em série de potências dada por

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n ,$$

então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2 2!}{s^3} + \frac{a_3 3!}{s^4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}} . \qquad (4.8.2.1)$$

A série (4.8.2.1) deve ser convergente para $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

**<u>Exemplo 1</u>**

Mostre que $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1.3}{2.4}x^2 - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \ldots,\ |x| < 1$.

$$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1.3}{2.2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1.3.5}{2.2.2}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{1.3.5.7}{2.2.2.2}(1+x)^{-\frac{9}{2}}$$

$$\vdots$$

Série de Taylor de $f(x)$: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ . (4.8.2.2)

**Observação**: a série (4.8.2.2) é extensível para uma função de variável complexa.

$$f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{f(0)}{0!}+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots$$

$$f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2!.2.2}x^2-\frac{1.3.5}{3!.2.2.2}x^3+\frac{1.3.5.7}{4!.2.2.2.2}x^4-\ldots$$

$$f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4-\ldots \qquad (4.8.2.3)$$

Região de convergência da série (4.8.2.3):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\right|\left|\frac{(n+1)!}{f^{(n+1)}(c)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(c)}{f^{(n+1)}(c)}\right||n+1|$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}.-\frac{5}{2}\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-\frac{1}{2}-n\right)}{-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}.-\frac{5}{2}\ldots\left(-\frac{1}{2}-n\right)\left(-\frac{1}{2}-n-1\right)}\right||n+1|$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{-\frac{3}{2}-n}\right||n+1|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{-\frac{3}{2}-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{-\frac{3}{2n}-1}\right|=1$$

$$|x-c|<R\Rightarrow |x|<1\Rightarrow -1<x<1.$$

**Exemplo 2**

Sabendo que a *função erro* (probabilidade) é definida por

$$\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du:$$

a) calcule $\mathcal{L}\{\operatorname{erf}(\sqrt{t})\}$;

$$\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(\sqrt{t})\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\}$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(\sqrt{t})\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\left(1-\frac{u^2}{1!}+\frac{u^4}{2!}-\frac{u^6}{3!}+\frac{u^8}{4!}-\ldots\right)du\right\}$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(\sqrt{t})\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t^{\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5.2!}-\frac{t^{\frac{7}{2}}}{7.3!}+\frac{t^{\frac{9}{2}}}{9.4!}-\ldots\right)\right\}$$

Como $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{3.s^{\frac{5}{2}}}+\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{5.2!.s^{\frac{7}{2}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{7.3!.s^{\frac{9}{2}}}+\frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{9.4!.s^{\frac{11}{2}}}-\ldots\right),\ \text{se}\ \mathrm{Re}(s) > 0. \qquad (4.8.2.4)$$

Lembrando que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ e $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, pode-se calcular (4.8.2.4).

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2^2}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3.5\sqrt{\pi}}{2^3}$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3.5.7\sqrt{\pi}}{2^4}$$

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{3.5.7.9\sqrt{\pi}}{2^5}$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2.s^{\frac{3}{2}}}-\frac{3.\sqrt{\pi}}{3.2^2.s^{\frac{5}{2}}}+\frac{3.5\sqrt{\pi}}{5.2^3.2!.s^{\frac{7}{2}}}-\frac{3.5.7\sqrt{\pi}}{7.2^4.3!.s^{\frac{9}{2}}}+\frac{3.5.7.9\sqrt{\pi}}{9.2^5.4!.s^{\frac{11}{2}}}-\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{3.2.s^{\frac{5}{2}}}+\frac{3.5}{5.2^2.2!.s^{\frac{7}{2}}}-\frac{3.5.7}{7.2^3.3!.s^{\frac{9}{2}}}+\frac{3.5.7.9}{9.2^4.4!.s^{\frac{11}{2}}}-\ldots$$

$$= \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2.s^{\frac{5}{2}}}+\frac{1.3}{2.4.s^{\frac{7}{2}}}-\frac{1.3.5}{2.4.6.s^{\frac{9}{2}}}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.s^{\frac{11}{2}}}-\ldots$$

$$= \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{s^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{s^3} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{s^4} - \ldots\right)$$

(4.8.2.5)

$$F(s) = \left(1 + s^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{s^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{s^3} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{s^4} - \ldots, \left|\frac{1}{s}\right| < 1 \Rightarrow |s| > 1. \qquad (4.8.2.6)$$

Utilizando-se (4.8.2.6) em (4.8.2.5), tem-se que:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{s}{s+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}};$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}, \text{ se } s \in \left(\mathrm{Re}(s) > 0 \cap |s| > 1\right).$$

b) mostre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\} = e^t \mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)$.

Se $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right\} = e^t \mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)$, então $\mathcal{L}\left\{e^t \mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$.

Como $\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$ e $\mathcal{L}\left\{\mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$, tem-se que

$$\mathcal{L}\left\{e^t \mathrm{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{1}{(s-1)\sqrt{s-1+1}} = \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}.$$

### 4.8.3 – Uso de equações diferenciais

Uso de uma equação diferencial ordinária satisfeita por $f(t)$ e da transformada de Laplace de derivadas.

### 4.8.4 – Outros métodos

Uso das propriedades da transformada de Laplace unilateral.

### *4.9 – Transformada de Laplace unilateral de algumas funções*

### 4.9.1 – Função nula

Se $\int_0^t N(u)du = 0$ para $t > 0$, então $N(t)$ é chamada *função nula*.

**<u>Exemplo</u>**

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = \frac{1}{2} \\ -1, & t = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$ é uma função nula.

Transformada de Laplace da função nula: $\mathcal{L}\{N(t)\} = 0$

### 4.9.2 – Função degrau unitário

$$\mathcal{u}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$$

Transformada de Laplace da função degrau unitário: $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$.

**<u>Prova</u>**

Sabe-se que $\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{u}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$. (4.9.2.1)

Se em (4.9.2.1) considera-se $f(t) = 1 \Rightarrow f(t-a) = 1$, então tem-se que

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ e $\mathcal{L}\{\mathcal{u}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$.

### 4.9.3 – Função impulso unitário

Usada para representar forças externas de grande amplitude que agem por um curto período de tempo.

$$\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a\ , \quad t_0>0, a>0\\ 0, & t\ge t_0+a\end{cases}$$

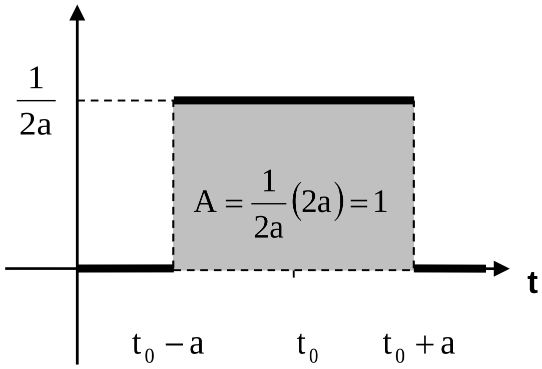



**Figura 4.13**: Função impulso unitário.

$$\delta_a(t-t_0)=\frac{1}{2a}\{u[t-(t_0-a)]-u[t-(t_0+a)]\}$$

Considerando-se $\delta(t-t_0)=\lim\limits_{a\to 0}\delta_a(t-t_0)$, tem-se o *delta de Dirac*:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\ne t_0\end{cases}.$$

Propriedade do delta de Dirac: $\displaystyle\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$.

Transformada de Laplace do delta de Dirac:

$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$ ou $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}=e^{-as}$.

**Prova**

$$\delta_a(t-t_0)=\frac{1}{2a}\{u[t-(t_0-a)]-u[t-(t_0+a)]\}$$

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\}=\frac{1}{2a}\mathcal{L}\{u[t-(t_0-a)]\}-\frac{1}{2a}\mathcal{L}\{u[t-(t_0+a)]\}$$

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-(t_0-a)s}}{s} - \frac{e^{-(t_0+a)s}}{s}\right] = e^{-st_0}\left(\frac{e^{as}-e^{-as}}{2as}\right) = \frac{e^{-st_0}}{as}\operatorname{senh}(as) \qquad (4.9.3.1)$$

Tomando-se o limite de (4.9.3.1) quando $a \to 0$, obtém-se

$$\lim_{a\to 0}\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{as}-e^{-as}}{2as}\right) \overset{LH}{=} e^{-st_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{se^{as}+se^{-as}}{2s}\right) = e^{-st_0}\,.$$

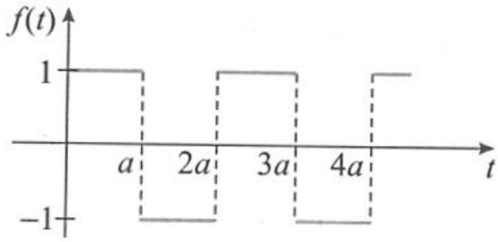
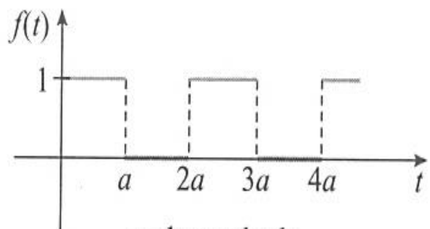
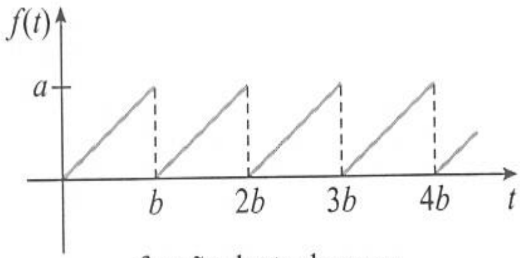
(4.9.3.2)

Quando em (4.9.3.2) $t_0 = 0$, tem-se que

$$\mathcal{L}\{\delta\{t\}\} = 1\,. \qquad (4.9.3.3)$$

É importante ressaltar que (4.9.3.3) não satisfaz $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

### 4.9.4 – Algumas funções periódicas

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| <br>função meandro | $\dfrac{1-e^{-as}}{s\left(1+e^{-as}\right)}$ |
| <br>onda quadrada | $\dfrac{1}{s\left(1+e^{-as}\right)}$ |
| <br>função dente de serra | $\dfrac{a}{s}\left(\dfrac{1}{bs} - \dfrac{1}{e^{sb}-1}\right)$ |

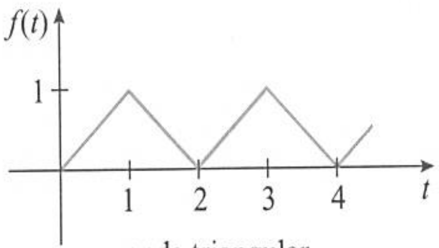
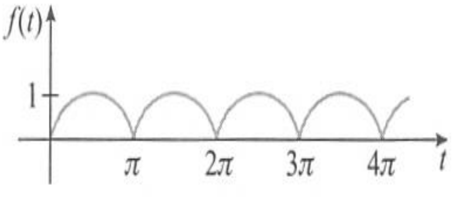
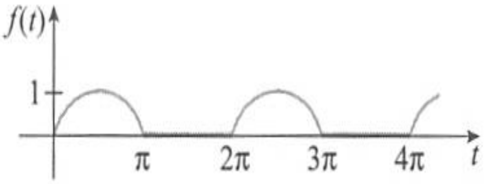
| | |
|---|---|
|  onda triangular | $\dfrac{1-e^{-s}}{s^2\left(1+e^{-s}\right)}$ |
|  onda senoidal retificada | $\dfrac{1+e^{-\pi s}}{\left(s^2+1\right)\left(1-e^{-\pi s}\right)}=\dfrac{\cot gh\left(\dfrac{\pi s}{2}\right)}{s^2+1}$ |
|  onda senoidal semi-retificada | $\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)\left(1-e^{-\pi s}\right)}$ |

**Tabela 4.3**: Transformada de Laplace unilateral de algumas funções periódicas – **[18]**.

**Exercício**

Prove as transformadas de Laplace unilaterais das funções periódicas presentes na Tabela 4.3.

## *4.10 – Métodos para determinar a transformada de Laplace unilateral inversa*

### 4.10.1 – Completando quadrados

**Exemplo**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^2+6s+13}\right\} \tag{4.10.1.1}$$

Polos de ordem um: $s=-3-2i$, $s=-3+2i$.

Calcula-se (4.10.1.1) completando quadrados.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^2+6s+13}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3+2}{(s+3)^2+4}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+4}\right\}$$

$$= e^{-3t}\cos(2t) + e^{-3t}\operatorname{sen}(2t)$$
$$= e^{-3t}\left[\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)\right]$$

No exemplo (4.10.1.1), empregam-se a propriedade de linearidade e a propriedade de translação da transformada de Laplace unilateral inversa $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$.

### 4.10.2 – Decomposição em frações parciais

Qualquer função racional $\frac{P(s)}{Q(s)}$, onde P(s) e Q(s) são polinômios, com o grau de P(s) menor do que o grau de Q(s), pode ser escrita como uma soma de funções racionais (chamadas *frações parciais*), tendo a forma

$$\frac{A}{(as+b)^r},\ \frac{As+B}{(as^2+bs+c)^r},\ r = 1,2,3,\ldots .$$

As constantes A, B, C, ..., podem ser determinadas de várias maneiras. Decompondo-se o quociente $\frac{P(s)}{Q(s)}$ em uma soma de frações parciais, determina-se a transformada de Laplace unilateral inversa de cada uma dessas frações obtendo-se assim $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}$.

1. $\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$

2. $\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}$

**Exemplo 1**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$$

Polos de ordem um: $s=-1$, $s=3$.

**Primeiro método** (completando-se quadrados)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2-4}\right\}+5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$=3e^t\cosh(2t)+5e^t\operatorname{senh}(2t)$$

$$=3e^t\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\right)+5e^t\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}e^{3t}-\frac{5}{2}e^{-t}$$

$$=4e^{3t}-e^{-t}$$

**Segundo método** (decompondo-se em frações parciais e solucionando-se o sistema)

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}$$

$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A(s+1)+B(s-3)}{(s-3)(s+1)}$$

$$3s+7=A(s+1)+B(s-3)$$

$$3s+7=(A+B)s+(A-3B)$$

$$\begin{cases}A+\ \ B=3\\ A-3B=7\quad\times(-1)\end{cases}$$

$$4B=-4\Rightarrow B=-1\Rightarrow A=4$$

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

**Terceiro método** (decompondo-se em frações parciais e calculando-se os limites; pode-se usar a estratégia sempre que o denominador tem fatores lineares distintos)

$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

$$\lim_{s\to 3} \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}(s-3) = \lim_{s\to 3} \frac{A}{s-3}(s-3) + \lim_{s\to 3} \frac{B}{s+1}(s-3)$$

$$\frac{16}{4} = A + 0 \Rightarrow A = 4$$

$$\lim_{s\to -1} \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}(s+1) = \lim_{s\to -1} \frac{A}{s-3}(s+1) + \lim_{s\to -1} \frac{B}{s+1}(s+1)$$

$$\frac{4}{-4} = 0 + B \Rightarrow B = -1$$

<u>**Exemplo 2**</u>

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^3 - s^2 + s - 1}\right\}$$

Fatorando o denominador:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | 1 | -1 |
| **1** | 1 | 0 | 1 | 0 |

$$s^3 - s^2 + s - 1 = (s-1)(s^2+1)$$

Polos de ordem um: $s = 1$, $s = i$, $s = -i$.

$$\frac{3s+1}{s^3 - s^2 + s - 1} = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs}{s^2+1} + \frac{C}{s^2+1}$$

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A(s^2+1) + Bs(s-1) + C(s-1)}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$3s+1 = A(s^2+1) + Bs(s-1) + C(s-1)$$

$$3s+1 = A(s^2+1) + B(s^2-s) + C(s-1)$$

$$3s+1 = (A+B)s^2 + (-B+C)s + (A-C)$$

$$\begin{cases} A+B \qquad = 0 \\ \quad -B+C = 3 \\ A \qquad -C = 1 \end{cases}$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow \begin{cases} -B+C=3 \\ -B-C=1 \end{cases} \Rightarrow -2B=4 \Rightarrow B=-2 \Rightarrow C=1 \text{ e } A=2$$

$$\frac{3s+1}{s^3-s^2+s-1} = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^3-s^2+s-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2e^t - 2\cos(t) + \text{sen}(t)$$

## Exemplo 3

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{s^4-5s^3+6s^2+4s-8}\right\}$$

Fatorando o denominador:

| | 1 | -5 | 6 | 4 | -8 |
|---|---|---|---|---|---|
| **-1** | 1 | -6 | 12 | -8 | 0 |
| **2** | 1 | -4 | 4 | 0 | |
| **2** | 1 | -2 | 0 | | |
| **2** | 1 | 0 | | | |

$$s^4-5s^3+6s^2+4s-8 = (s+1)(s-2)^3$$

Polos de ordem um: $s=-1$.

Polos de ordem três: $s=2$.

$$\frac{5s^2-15s-11}{s^4-5s^3+6s^2+4s-8} = \frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{s-2}$$

$$\lim_{s\to-1} \frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}(s+1) = \lim_{s\to-1} \frac{A}{s+1}(s+1) + \lim_{s\to-1} \frac{B}{(s-2)^3}(s+1) + \lim_{s\to-1} \frac{C}{(s-2)^2}(s+1) +$$

$$+ \lim_{s\to-1} \frac{D}{s-2}(s+1)$$

$$\frac{9}{-27} = A+0+0+0 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{s\to 2}\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}(s-2)^3=\lim_{s\to 2}\frac{A}{s+1}(s-2)^3+\lim_{s\to 2}\frac{B}{(s-2)^3}(s-2)^3+\lim_{s\to 2}\frac{C}{(s-2)^2}(s-2)^3+$$

$$+\lim_{s\to 2}\frac{D}{s-2}(s-2)^3$$

$$\frac{20-30-11}{3}=0+B+0+0\Rightarrow B=-\frac{21}{3}=-7$$

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-1/3}{s+1}-\frac{7}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2}$$

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-1/3(s-2)^3-7(s+1)+C(s+1)(s-2)+D(s+1)(s-2)^2}{(s+1)(s-2)^3}$$

$$5s^2-15s-11=-\frac{1}{3}\left(s^3-6s^2+12s-8\right)-7(s+1)+C\left(s^2-s-2\right)+D(s+1)\left(s^2-4s+4\right)$$

$$5s^2-15s-11=-\frac{1}{3}\left(s^3-6s^2+12s-8\right)-7(s+1)+C\left(s^2-s-2\right)+D\left(s^3-3s^2+4\right)$$

$$5s^2-15s-11=\left(D-\frac{1}{3}\right)s^3+\left(C-3D+2\right)s^2+\left(-C-4-7\right)s+\left(-2C+4D+\frac{8}{3}-7\right)$$

$$D-\frac{1}{3}=0\Rightarrow D=\frac{1}{3}$$

$$C-3D+2=5\Rightarrow C-3\left(\frac{1}{3}\right)+2=5\Rightarrow C=4$$

$$-C-4-7=-15\Rightarrow C=4$$

$$-2C+4D+\frac{8}{3}-7=-11\Rightarrow -2(4)+4\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{8}{3}-7=-11\Rightarrow -11=-11$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{s^4-5s^3+6s^2+4s-8}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{7}{(s-2)^3}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}\right\}$$

Como $\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-2}\right]=-\frac{1}{(s-2)^2}$ e $\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s-2}\right]=\frac{2}{(s-2)^3}$, tem-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{s^4-5s^3+6s^2+4s-8}\right\}=-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}+4te^{2t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

### 4.10.3 – Expansão em série de potências

Se $F(s)$ tem um desenvolvimento em série de potências negativas de s dado por

$$F(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+\frac{a_3}{s^4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{s^{n+1}},$$

então pode-se inverter a transformada termo a termo, obtendo-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)=a_0+a_1t+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nt^n}{n!}.$$

**Exemplo**

A *função de Bessel* de ordem zero é definida pela série

$$J_0(at)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(at)^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

Mostrar que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}\right\}=J_0\left(2\sqrt{t}\right)$.

Se $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}\right\}=J_0\left(2\sqrt{t}\right)$, então $\mathcal{L}\left\{J_0\left(2\sqrt{t}\right)\right\}=\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}$.

$$J_0(at)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(at)^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}t^{2n}$$

$$=1-\left(\frac{a}{2}\right)^2t^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^4t^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^6t^6+\frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^8t^8-\frac{1}{(5!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{10}t^{10}+\ldots$$

$$J_0\left(2\sqrt{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{2}{2}\right)^{2n}\sqrt{t}^{\,2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}t^n$$

$$=1-t+\frac{1}{(2!)^2}t^2-\frac{1}{(3!)^2}t^3+\frac{1}{(4!)^2}t^4-\frac{1}{(5!)^2}t^5+\ldots$$

Como $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$, $\operatorname{Re}(s)>0$, tem-se que:

$$\mathcal{L}\left\{J_0\left(2\sqrt{t}\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{1-t+\frac{1}{(2!)^2}t^2-\frac{1}{(3!)^2}t^3+\frac{1}{(4!)^2}t^4-\frac{1}{(5!)^2}t^5+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(2!)^2}\frac{2!}{s^3}-\frac{1}{(3!)^2}\frac{3!}{s^4}+\frac{1}{(4!)^2}\frac{4!}{s^5}-\frac{1}{(5!)^2}\frac{5!}{s^6}+\ldots$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{s^3}-\frac{1}{3!}\frac{1}{s^4}+\frac{1}{4!}\frac{1}{s^5}-\frac{1}{5!}\frac{1}{s^6}+\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 .$$

Expandindo-se $e^{-\frac{1}{s}} = e^{-s^{-1}}$ em série de potências:

$$e^{-s^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-s^{-1}\right)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{s^4} - \frac{1}{5!}\frac{1}{s^5} + \dots \quad .$$

(4.10.3.1)

Raio de convergência da série (4.10.3.1):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty .$$

Assim:

$$\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{s^4} - \frac{1}{5!}\frac{1}{s^5} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{s^5} - \frac{1}{5!}\frac{1}{s^6} + \dots$$ $s = 0$: singularidade essencial

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!s^{n+1}} . \qquad (4.10.3.2)$$

Comparando-se (4.10.3.1) e (4.10.3.2), conclui-se que $\mathcal{L}\left\{J_0\left(2\sqrt{t}\right)\right\} = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}$.

### 4.10.4 – A fórmula de Heaviside

Sejam P(s) e Q(s) polinômios distintos, sendo que P(s) tem grau menor do que Q(s). Suponha-se que Q(s) tem n zeros distintos $\alpha_k, k = 1,2,\dots,n$. Então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{\frac{d}{ds}Q(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} .$$

<u>**Exemplo**</u>

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$$

$$P(s) = 3s+7$$
$$Q(s) = s^2-2s-3 = (s-3)(s+1) \Rightarrow \alpha_1 = 3 \text{ e } \alpha_2 = -1$$
$$\frac{d}{ds}Q(s) = 2s-2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = \sum_{k=1}^{2}\frac{3(\alpha_k)+7}{2(\alpha_k)-2}e^{\alpha_k t}$$
$$= \frac{3(3)+7}{2(3)-2}e^{3t} + \frac{3(-1)+7}{2(-1)-2}e^{-t}$$
$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

### 4.10.5 – A fórmula geral (ou complexa) de inversão

Também conhecia como *fórmula de Bromwich* ou *fórmula integral de Bromwich*.

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds\,,\ t>0 \text{ e } f(t)=0 \text{ para } t<0 \qquad (4.10.6.1)$$

ou

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C F(s)e^{st}ds\,.$$

Deve-se integrar em (4.10.6.1) ao longo de uma reta $s=\gamma$ no plano complexo, onde $s = x+iy$. O número real $\gamma$ é escolhido de tal forma que $s=\gamma$ esteja à direita de todas as singularidades de $F(s)$.

**<u>Referência</u>**

**SPIEGEL**, M.R. *Schaum's Outline of Laplace Transforms*. McGraw-Hill, 1965. Capítulo 7.

**<u>Exercícios</u>**

01. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2-3}{s^4+s^3-3s^2-17s-30}\right\}$.

Resposta: $f(t)=\dfrac{3}{50}e^{3t}-\dfrac{1}{25}e^{-2t}+\dfrac{9}{25}e^{-t}\text{sen}(2t)-\dfrac{1}{50}e^{-t}\cos(2t)$.

02. Determine $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s^3-3s^2-40s+36}{s^4-8s^2+16}\right\}$.

Resposta: $f(t)=(3+5t)e^{-2t}-2te^{2t}$.

### *4.11 – Solução de equações diferenciais*

### 4.11.1 – Equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes

**<u>Exemplo 1</u>**

$$\begin{cases} y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4e^{2t} \\ y(0)=-3 \\ y'(0)=5 \end{cases} \qquad (4.11.1.1)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação diferencial ordinária de segunda ordem (4.11.1.1):

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}-3\,\mathcal{L}\{y'(t)\}+2\,\mathcal{L}\{y(t)\}=4\,\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3sY(s)+3y(0)+2Y(s)=\frac{4}{s-2}$$

$$(s^2-3s+2)Y(s)+3s-5-9=\frac{4}{s-2}$$

$$(s^2-3s+2)Y(s)=\frac{4}{s-2}-3s+14$$

$$(s-1)(s-2)Y(s)=\frac{4}{s-2}-3s+14$$

$$(s-1)(s-2)Y(s)=\frac{4-3s^2+6s+14s-28}{s-2}=\frac{-3s^2+20s-24}{s-2}$$

$$Y(s)=\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2} \qquad (4.11.1.2)$$

Polos de ordem um: $s=1$.

Polos de ordem dois: $s=2$.

Decompondo-se (4.11.1.2) em frações parciais:

$$\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s-2} \qquad (4.11.1.3)$$

$$-3s^2+20s-24=A(s-2)^2+B(s-1)+C(s-1)(s-2)$$

$$-3s^2+20s-24=A\left(s^2-4s+4\right)+B(s-1)+C\left(s^2-3s+2\right)$$

$$-3s^2+20s-24=(A+C)s^2+(-4A+B-3C)s+(4A-B+2C)$$

$$\begin{cases} A+ \qquad C=-3 \\ -4A+B-3C=20 \\ 4A-B+2C=-24 \end{cases} \qquad (4.11.1.4)$$

Calculando-se limites em (4.11.1.3):

$$\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{s-2}$$

$$\lim_{s\to1}\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}(s-1)=\lim_{s\to1}\frac{A}{s-1}(s-1)+\lim_{s\to1}\frac{B}{(s-2)^2}(s-1)+\lim_{s\to1}\frac{C}{s-2}(s-1)$$

$$-7=A+0+0\Rightarrow A=-7$$

$$\lim_{s\to2}\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}(s-2)^2=\lim_{s\to2}\frac{A}{s-1}(s-2)^2+\lim_{s\to2}\frac{B}{(s-2)^2}(s-2)^2+\lim_{s\to2}\frac{C}{s-2}(s-2)^2$$

$$4=0+B+0\Rightarrow B=4$$

Substituindo-se os valores de A e B na primeira equação de (4.11.1.4):

$A+C=-3\Rightarrow -7+C=-3\Rightarrow C=4$.

Assim:

$$Y(s)=\frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}=-\frac{7}{s-1}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{4}{s-2}\,. \qquad (4.11.1.5)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.11.1.5):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=-7\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}+4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=-7\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

Como $\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-2}\right]=-\frac{1}{(s-2)^2}$ ou $\mathcal{L}\left\{e^{2t}t\right\}=\frac{1}{(s-2)^2}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n f(t)$, tem-se como solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$y(t) = -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t}. \tag{4.11.1.6}$$

**Exercício**

Verifique que (4.11.1.6) é solução de (4.11.1.1).

**Exemplo 2**

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{4.11.1.7}$$

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases} \tag{4.11.1.8}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Escrevendo-se (4.11.1.8) de forma compacta:

$$f(t) = t - t\,u(t-1), \quad u(t-1) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\,t - t\,u(t-1)\,\}$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{t\,u(t-1)\}$$

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, e $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$.

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} - (-1)\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right]$$

$$sY(s) - y(0) + 2Y(2) = \frac{1}{s^2} - (-1)\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right]$$

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{(s+1)e^{-s}}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} - \frac{s+1}{s^2(s+2)}e^{-s} \tag{4.11.1.9}$$

Polos de ordem um: $s = -2$.

Polos de ordem dois: $s = 0$.

Decompondo-se (4.11.1.9) em frações parciais:

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}$$

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{4}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{4}\frac{s}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} - \left[\frac{1}{4}\frac{s}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}\right]e^{-s}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}e^{-s} \qquad (4.11.1.10)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.11.1.10):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} +$$

$$-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}e^{-s}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}e^{-s}\right\} \qquad (4.11.1.11)$$

Lembrando que $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$, obtém-se de (4.11.1.11) a solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem.

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}u(t-1) - \frac{1}{2}(t-1)\,u(t-1) + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}u(t-1) \qquad (4.11.1.12)$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}u(t-1)\left[\frac{1}{2} + t - 1 - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}u(t-1)\left[-\frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]$$

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t}, & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t+2}, & t \ge 1 \end{cases}$$

**Exercício**

Verifique que (4.11.1.12) é solução de (4.11.1.7).

**Exemplo 3**

A equação diferencial para a carga $q(t)$ em um capacitor em um circuito em série R-C é

$$R\frac{d}{dt}q(t)+\frac{1}{C}q(t)=E(t),$$

onde R é a resistência, C é a capacitância e $E(t)$ é a força eletromotriz (f.e.m).

Determinar, usando as transformadas de Laplace, a carga no capacitor em um circuito em série R-C se $q(0)=0, R=2{,}5\,\text{ohms}, C=0{,}08\,\text{farad}$ e $E(t)$ é dada pelo gráfico da Figura 4.14.

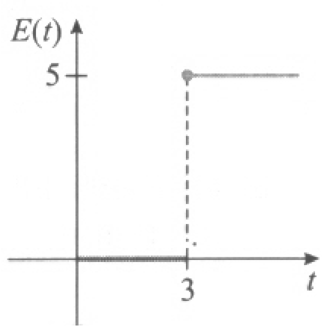



**Figura 4.14**: Força eletromotriz **– [18]**.

$$\mathcal{L}\{q(t)\}=Q(s)$$

Escrevendo $E(t)$ de uma maneira compacta:

$$E(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ 5, & t\ge 3\end{cases}$$

$$u(t-3)=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ 1, & t\ge 3\end{cases}$$

$$E(t)=5\,u(t-3).$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$0\,2{,}5\frac{d}{dt}q(t)+\frac{25}{2}q(t)=5\,u(t-3) \tag{4.11.1.13}$$

$$\mathcal{L}\left\{2{,}5\frac{d}{dt}q(t)+12{,}5q(t)\right\}=\mathcal{L}\{5\,u(t-3)\}$$

$$2{,}5\,\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}q(t)\right\}+12{,}5\,\mathcal{L}\{q(t)\}=5\,\mathcal{L}\{u(t-3)\}$$

$$2{,}5sQ(s)-2{,}5q(0)+12{,}5Q(s)=5\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$(2{,}5s + 12{,}5)Q(s) = 5\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$Q(s) = \frac{5e^{-3s}}{s(2{,}5s + 12{,}5)} = \frac{5e^{-3s}}{2{,}5s(s+5)} = \frac{2e^{-3s}}{s(s+5)} \,. \tag{4.11.1.14}$$

Polos de ordem um: $s = -5$, $s = 0$.

Decompondo-se (4.11.1.14) em frações parciais:

$$\frac{1}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} \Rightarrow A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5}$$

$$Q(s) = 2\left[\frac{1}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{1}{s+5}\right]e^{-3s} \,. \tag{4.11.1.15}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.11.1.15):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{2\left[\frac{1}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{1}{s+5}\right]e^{-3s}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-3s}\right\} - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}e^{-3s}\right\}. \tag{4.11.1.16}$$

Usando-se em (4.11.1.16) a propriedade $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$, obtém-se a solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem.

$$q(t) = \frac{2}{5}\,u(t-3) - \frac{2}{5}\,u(t-3)e^{-5(t-3)} \tag{4.11.1.17}$$

$$q(t) = \frac{2}{5}\,u(t-3)\left[1 - e^{-5(t-3)}\right]$$

$$q(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ \frac{2}{5}\left[1 - e^{-5(t-3)}\right], & t \ge 3 \end{cases}$$

**Exercício**

Verifique que (4.11.1.17) é solução de (4.11.1.13).

### 4.11.2 – Equações diferenciais ordinárias com coeficientes variáveis

**Exemplo**

$$\begin{cases} ty''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases} \tag{4.11.2.1}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação diferencial ordinária de segunda ordem, obtém-se

$$\mathcal{L}\{ty''(t)\}+\mathcal{L}\{y'(t)\}-2\,\mathcal{L}\{ty'(t)\}-2\,\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{0\}. \tag{4.11.2.2}$$

Deve-se lembrar que:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s-2$$

$$\mathcal{L}\{ty''(t)\}=-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s)-s-2\right]=-\left[2sY(s)+s^2\frac{d}{ds}Y(s)-1\right]=-2sY(s)-s^2\frac{d}{ds}Y(s)+1$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}=sY(s)-y(0)=sY(s)-1$$

$$\mathcal{L}\{ty'(t)\}=-\frac{d}{ds}\left[sY(s)-1\right]=-\left[Y(s)+s\frac{d}{ds}Y(s)\right]=-Y(s)-s\frac{d}{ds}Y(s).$$

Voltando-se a (4.11.2.2):

$$-2sY(s)-s^2\frac{d}{ds}Y(s)+1+sY(s)-1+2Y(s)+2s\frac{d}{ds}Y(s)-2Y(s)=0$$

$$\left(-s^2+2s\right)\frac{d}{ds}Y(s)-sY(s)=0$$

$$-s(s-2)\frac{d}{ds}Y(s)-sY(s)=0$$

$$s(s-2)\frac{d}{ds}Y(s)+sY(s)=0\,. \tag{4.11.2.3}$$ *EDO linear de primeira ordem homogênea*

Separando-se variáveis em (4.11.2.3), chega-se a:

$$\frac{dY(s)}{ds}=-\frac{sY(s)}{s(s-2)}\Rightarrow\frac{1}{Y(s)}\frac{dY(s)}{ds}=-\frac{1}{s-2}$$

$$\frac{d}{ds}\left[\ln|Y(s)|\right]=-\frac{1}{s-2}\,. \tag{4.11.2.4}$$

Integrando-se (4.11.2.4), tem-se que:

$$\ln|Y(s)|=-\ln(s-2)+C_1$$

$$Y(s)=e^{-\ln(s-2)+C_1}$$

$$Y(s) = e^{C_1} e^{\ln(s-2)^{-1}} = C(s-2)^{-1} = \frac{C}{s-2}. \tag{4.11.2.5}$$

Polos de ordem um: $s = 2$.

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.11.2.5):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s-2}\right\}$$

$$y(t) = C\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = Ce^{2t}. \tag{4.11.2.6}$$

Para determinar a constante C em (4.11.2.6) usa-se a condição inicial $y(0) = 1$:

$$y(0) = Ce^{2(0)} = 1 \Rightarrow C = 1. \tag{4.11.2.7}$$

Substituindo-se (4.11.2.7) em (4.11.2.6), obtém-se a solução da equação diferencial ordinária.

$$y(t) = e^{2t} \tag{4.11.2.8}$$

**<u>Exercício</u>**

Verifique que (4.11.2.8) é solução de (4.11.2.1).

### 4.11.3 – Equações diferenciais ordinárias simultâneas

**<u>Exemplo</u>**

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) = t \\ x''(t) - y(t) = e^{-t} \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = -2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{4.11.3.1}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à primeira equação diferencial ordinária:

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}+\mathcal{L}\{y'(t)\}=\mathcal{L}\{t\}$$

$$sX(s)-x(0)+sY(s)-y(0)=\frac{1}{s^2}$$

$$sX(s)-3+sY(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$sX(s)+sY(s)=\frac{1}{s^2}+3. \tag{4.11.3.2}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à segunda equação diferencial ordinária:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\}-\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$s^2X(s)-3s+2-Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$s^2X(s)-Y(s)=\frac{1}{s+1}+3s-2. \tag{4.11.3.3}$$

Solucionando-se o sistema composto pelas equações (4.11.3.2) e (4.11.3.3):

$$\begin{cases} sX(s)+sY(s)=\dfrac{1}{s^2}+3 \\ s^2X(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s+1}+3s-2 \end{cases}.$$

Multiplicando-se (4.11.3.2) por (-s) e somando-se o produto a (4.11.3.3):

$$-\left(s^2+1\right)Y(s)=\frac{1}{s+1}+3s-2-\frac{1}{s}-3s$$

$$Y(s)=\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}-\frac{1}{(s+1)\left(s^2+1\right)}+\frac{2}{s^2+1}. \tag{4.11.3.4}$$

Polos de ordem um: $s=-1$, $s=0$, $s=i$, $s=-i$.

Decompondo-se (4.11.3.4) em frações parciais:

$$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\Rightarrow A=1, B=-1, C=0$$

$$-\frac{1}{(s+1)\left(s^2+1\right)}=\frac{D}{s+1}+\frac{Es+F}{s^2+1}\Rightarrow D=-\frac{1}{2}, E=\frac{1}{2}, F=-\frac{1}{2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}. \tag{4.11.3.5}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.11.3.5):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t).$$

Usando-se as equações (4.11.3.2) e (4.11.3.5) para determinar $X(s)$:

$$sX(s) = -sY(s) + \frac{1}{s^2} + 3$$

$$X(s) = -Y(s) + \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s}$$

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s}$$

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}. \qquad (4.11.3.6)$$

Polos de ordem um: $s = -1$, $s = i$, $s = -i$.

Polos de ordem três: $s = 0$.

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.11.3.6):

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}\mathrm{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t)$$

Assim, a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias é dada por:

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}\mathrm{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t); \qquad (4.11.3.7)$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\mathrm{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t). \qquad (4.11.3.8)$$

**<u>Exercício</u>**

Verifique que (4.11.3.7) e (4.11.3.8) satisfazem (4.11.3.1).

### 4.11.4 – Equações diferenciais parciais

Dada $u(x,t)$, fixa-se a variável $x$ e deixamos a variável $t$ livre. Dessa forma:

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^{\infty} u(x,t)e^{-st}dt = U(x,s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}u(x,t)\right\} = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}u(x,t)\right\} = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right\} = \frac{d}{dx}U(x,s) \qquad (4.11.4.1)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\} = \frac{d^2}{dx^2}U(x,s). \qquad (4.11.4.2)$$

Obtém-se (4.11.4.1) e (4.11.4.2) derivando-se sob o sinal de integração (regra de Leibniz).

**Exemplo 1**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = 3\mathrm{sen}(2\pi\,x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(1,t) = 0 & t > 0 \end{cases} \qquad (4.11.4.3)$$

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$$

$$\mathcal{L}\{u(0,t)\} = U(0,s) = 0$$

$$\mathcal{L}\{u(1,t)\} = U(1,s) = 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação diferencial parcial (equação do calor):

$$\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} = \mathcal{L}\{u_{xx}(x,t)\}$$

$$sU(x,s) - u(x,0) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$$

$$sU(x,s) - 3sen(2\pi x) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - sU(x,s) = -3sen(2\pi x)$$ *EDO linear de segunda ordem não homogênea* (4.11.4.4)

Família de soluções a dois parâmetros para a EDO (4.11.4.4):

$$U(x,s) = \underbrace{C_1e^{\sqrt{s}x} + C_2e^{-\sqrt{s}x}}_{\text{homogênea}} + \underbrace{C_3sen(2\pi x)}_{\text{particular}} \quad (4.11.4.5)$$

$$\frac{d}{dx}U(x,s) = C_1\sqrt{s}e^{\sqrt{s}x} - C_2\sqrt{s}e^{-\sqrt{s}x} + 2\pi C_3\cos(2\pi x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) = C_1se^{\sqrt{s}x} + C_2se^{-\sqrt{s}x} - 4\pi^2C_3sen(2\pi x). \quad (4.11.4.6)$$

Substituindo-se (4.11.4.5) e (4.11.4.6) em (4.11.4.4), obtém-se:

$$-4\pi^2C_3sen(2\pi x) - sC_3sen(2\pi x) = -3sen(2\pi x)$$
$$\left(-4\pi^2 - s\right)C_3 = -3$$
$$C_3 = \frac{3}{s+4\pi^2}$$

Logo:

$$U(x,s) = C_1e^{\sqrt{s}x} + C_2e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2}sen(2\pi x). \quad (4.11.4.7)$$

Determina-se as constantes $C_1$ e $C_2$ por intermédio das condições de contorno:

$$x = 0 \text{ em } (5) \Rightarrow U(0,s) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2; \quad (4.11.4.8)$$

$$x = 1 \text{ em } (5) \Rightarrow U(1,s) = C_1e^{\sqrt{s}} + C_2e^{-\sqrt{s}} = 0. \quad (4.11.4.9)$$

Substituindo-se (4.11.4.8) em (4.11.4.9), obtém-se:

$$-C_2e^{\sqrt{s}} + C_2e^{-\sqrt{s}} = 0$$

$$\left(-e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}\right)C_2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1-e^{2\sqrt{s}}}{e^{\sqrt{s}}}\right)C_2 = 0$$

$$\underbrace{C_2 = 0}_{s\neq 0} \Rightarrow C_1 = 0$$

Assim:

$$U(x,s) = \frac{3}{s+4\pi^2}sen(2\pi x). \quad (4.11.4.10)$$

Polos de ordem um: $s = -4\pi^2$.

Aplicando a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.11.4.10):

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\} = \operatorname{sen}(2\pi\, x)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+4\pi^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\} = 3\operatorname{sen}(2\pi\, x)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-4\pi^2)}\right\}$$

$$u(x,t) = 3\operatorname{sen}(2\pi\, x)e^{-4\pi^2 t}. \qquad (4.11.4.11)$$

**Exercício**

Verifique que (4.11.4.11) é solução de (4.11.4.3).

**Exemplo 2**

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t) & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 8\operatorname{sen}(4\pi x) - 12\operatorname{sen}(6\pi x) & 0 < x < 2 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$\mathcal{L}\{u(0,t)\} = U(0,s) = \mathcal{L}\{0\} = 0; \qquad (4.11.4.12)$$

$$\mathcal{L}\{u(2,t)\} = U(2,s) = \mathcal{L}\{0\} = 0. \qquad (4.11.4.13)$$

Equação diferencial parcial:

$$\mathcal{L}\{u_{tt}(x,t)\} = \mathcal{L}\{4u_{xx}(x,t)\}$$

$$s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) = 4\frac{d}{dx^2}U(x,s)$$

$$4\frac{d}{dx^2}U(x,s) - s^2U(x,s) = -s[8\operatorname{sen}(4\pi x) - 12\operatorname{sen}(6\pi x)]$$

$$\frac{d}{dx^2}U(x,s) - \frac{s^2}{4}U(x,s) = -2s\operatorname{sen}(4\pi x) + 3s\operatorname{sen}(6\pi x). \qquad (4.11.4.14)$$

Família de soluções da equação diferencial ordinária (4.11.4.14):

$$U(x,s) = \underbrace{C_1e^{\frac{s}{2}x} + C_2e^{-\frac{s}{2}x}}_{\text{soluçãohomogênea}} + \underbrace{C_3\operatorname{sen}(4\pi x) + C_4\operatorname{sen}(6\pi x)}_{\text{soluçãoparticular}} \qquad (4.11.4.15)$$

$$\frac{d}{dx}U(x,s) = \frac{s}{2}C_1e^{\frac{s}{2}x} - \frac{s}{2}C_2e^{-\frac{s}{2}x} + 4\pi C_3\cos(4\pi x) + 6\pi C_4\cos(6\pi x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)=\frac{s^2}{4}C_1e^{\frac{s}{2}x}+\frac{s^2}{4}C_2e^{-\frac{s}{2}x}-16\pi^2C_3\text{sen}(4\pi x)-36\pi^2C_4\text{sen}(6\pi x).$$

(4.11.4.16)

Substituindo-se (4.11.4.15) e (4.11.4.16) em (4.11.4.14), tem-se que:

$$-16\pi^2C_3\text{sen}(4\pi x)-36\pi^2C_4\text{sen}(6\pi x)-C_3\frac{s^2}{4}\text{sen}(4\pi x)+$$

$$-C_4\frac{s^2}{4}\text{sen}(6\pi x)=-2s\,\text{sen}(4\pi x)+3s\,\text{sen}(6\pi x)$$

$$\left(-16\pi^2-\frac{s^2}{4}\right)C_3\text{sen}(4\pi x)+\left(-36\pi^2-\frac{s^2}{4}\right)C_4\text{sen}(6\pi x)=-2s\,\text{sen}(4\pi x)+3s\,\text{sen}(6\pi x)$$

(4.11.4.17)

Comparando-se os “lados” de (4.11.4.17), conclui-se que:

$$\left(-16\pi^2-\frac{s^2}{4}\right)C_3=-2s\Rightarrow\ C_3=\frac{8s}{s^2+64\pi^2};\qquad(4.11.4.18)$$

$$\left(-36\pi^2-\frac{s^2}{4}\right)C_4=3s\Rightarrow\ C_4=-\frac{12s}{s^2+144\pi^2}.\qquad(4.11.4.19)$$

Substituindo-se (4.11.4.18) e (4.11.4.19) em (4.11.4.15):

$$U(x,s)=C_1e^{\frac{s}{2}x}+C_2e^{-\frac{s}{2}x}+\frac{8s}{s^2+64\pi^2}\text{sen}(4\pi x)-\frac{12s}{s^2+144\pi^2}\text{sen}(6\pi x).\qquad(4.11.4.20)$$

Calculando as constantes $C_1$ e $C_2$

1. Considerando-se $x=0$ em (4.11.4.20) e utilizando-se (4.11.4.12):

$$U(0,s)=C_1+C_2=0\Rightarrow C_1=-C_2.\qquad(4.11.4.21)$$

2. Considerando $x=2$ em (4.11.4.20) e utilizando (4.11.4.13):

$$U(2,s)=C_1e^s+C_2e^{-s}=0.\qquad(4.11.4.22)$$

Substituindo-se (4.11.4.21) em (4.11.4.22):

$$-C_2e^s+C_2e^{-s}=0\Rightarrow C_2\left(\frac{1}{e^s}-e^s\right)=0\Rightarrow C_2\left(1-e^{2s}\right)=0\Rightarrow C_2=0\,(s\neq0);$$

$$C_2=0\Rightarrow C_1=0.\qquad(4.11.4.23)$$

Substituindo-se (4.11.4.23) em (4.11.4.20), tem-se a solução da EDO.

$$U(x,s)=\frac{8s}{s^2+64\pi^2}\text{sen}(4\pi x)-\frac{12s}{s^2+144\pi^2}\text{sen}(6\pi x)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\}=u(x,t)$$

$$u(x,t)=8\operatorname{sen}(4\pi x)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+64\pi^2}\right\}-12\operatorname{sen}(6\pi x)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+144\pi^2}\right\}$$

$$u(x,t)=8\operatorname{sen}(4\pi x)\cos(8\pi t)-12\operatorname{sen}(6\pi x)\cos(12\pi t) \qquad (4.11.4.24)$$

Verifica-se que a solução (4.11.4.24) satisfaz de fato o problema de valor inicial e de contorno.

**Equação diferencial parcial**

$$u_t(x,t)=-64\pi\operatorname{sen}(4\pi x)\operatorname{sen}(8\pi t)+144\pi\operatorname{sen}(6\pi x)\operatorname{sen}(12\pi t) \qquad (4.11.4.25)$$

$$u_{tt}(x,t)=-512\pi^2\operatorname{sen}(4\pi x)\cos(8\pi t)+1728\pi^2\operatorname{sen}(6\pi x)\cos(12\pi t)$$

$$u_x(x,t)=32\pi\cos(4\pi x)\cos(8\pi t)-72\pi\cos(6\pi x)\cos(12\pi t)$$

$$u_{xx}(x,t)=-128\pi^2\operatorname{sen}(4\pi x)\cos(8\pi t)+432\pi^2\operatorname{sen}(6\pi x)\cos(12\pi t)$$

$$4u_{xx}(x,t)=-512\pi^2\operatorname{sen}(4\pi x)\cos(8\pi t)+1728\pi^2\operatorname{sen}(6\pi x)\cos(12\pi t)$$

Logo, $u_{tt}(x,t)=4u_{xx}(x,t)$

**Condições de contorno**

Considerando-se $x=0$ e $x=2$ em (4.11.4.24):

$u(0,t)=u(2,t)=0$.

**Condições iniciais**

Considerando-se $t=0$ em (4.11.4.24) e (4.11.4.25):

$u(x,0)=8\operatorname{sen}(4\pi x)-12\operatorname{sen}(6\pi x)$

$u_t(x,0)=0$.

Gráfico da superfície que define a solução (4.11.4.24):

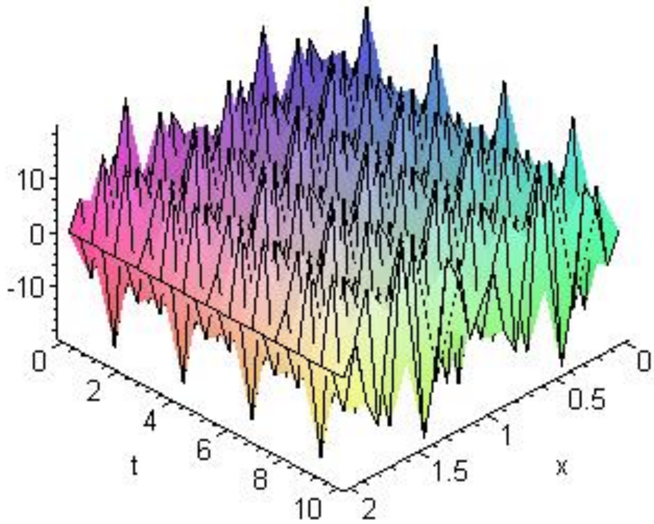



**Figura 4.15**: Gráfico de $f(x)=8\text{sen}(4\pi x)\cos(8\pi t)-12\text{sen}(6\pi x)\cos(12\pi t)$, $0<x<2$, $0<t<10$.

### *4.12 – Solução de equações íntegro-diferenciais*

**Exemplo**

$$\begin{cases} 4\displaystyle\int_0^t y(u)\,du + y'(t) = \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du \\ y(0)=1 \end{cases} \tag{4.12.1}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$4\int_0^t y(u)\,du + y'(t) = y(t) * \cos(t) \tag{4.12.2}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação íntegro-diferencial (4.12.2):

$$\mathcal{L}\left\{4\int_0^t y(u)\,du + y'(t)\right\} = \mathcal{L}\{y(t)*\cos(t)\}$$

$$4\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(u)\,du\right\} + \mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{y(t)*\cos(t)\}$$

$$4\frac{Y(s)}{s} + sY(s) - y(0) = Y(s)\frac{s}{s^2+1}$$

$$\left(\frac{4}{s}+s-\frac{s}{s^2+1}\right)Y(s)=1$$

$$\frac{4s^2+4+s^4+s^2-s^2}{s\left(s^2+1\right)}Y(s)=1$$

$$\frac{\left(s^2+2\right)^2}{s\left(s^2+1\right)}Y(s)=1$$

$$Y(s)=\frac{s\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+2\right)^2}. \tag{4.12.3}$$

Polos de ordem dois: $s=-\sqrt{2}\,i$, $s=\sqrt{2}\,i$.

Decompondo-se (4.12.3) em frações parciais:

$$\frac{Y(s)}{s}=\frac{s^2+1}{\left(s^2+2\right)^2}=\frac{As+B}{\left(s^2+2\right)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2} \tag{4.12.4}$$

$$s^2+1=As+B+C\left(s^3+2s\right)+D\left(s^2+2\right)$$

$$s^2+1=Cs^3+Ds^2+(A+2C)s+(B+2D)$$

$$C=0 \quad D=1 \quad A+2C=0 \Rightarrow A=0 \quad B+2D=1 \Rightarrow B=-1 \ .$$

Voltando-se a (4.12.4):

$$\frac{Y(s)}{s}=-\frac{1}{\left(s^2+2\right)^2}+\frac{1}{s^2+2}$$

$$Y(s)=-\frac{s}{\left(s^2+2\right)^2}+\frac{s}{s^2+2}. \tag{4.12.5}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral inversa a (4.12.5):

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s}{\left(s^2+2\right)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}$$

Como $\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+2}\right]=-\frac{2s}{\left(s^2+2\right)^2}$, $\mathcal{L}\left\{\cos\left(\sqrt{2}t\right)\right\}=\frac{s}{s^2+2}$, $\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\right\}=\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n f(t)$, tem-se como solução da equação íntegro-diferencial

$$y(t)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,t\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right)+\cos\left(\sqrt{2}t\right)$$

$$y(t)=\cos\left(\sqrt{2}t\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\,t\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2}t\right). \tag{4.12.6}$$

**<u>Exercícios</u>**

01. Verifique que (4.12.6) é solução de (4.12.1).

02. Empregando as transformadas de Laplace, solucione o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + 12e^{-t} \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = -1 \end{cases}.$$

Resposta: $y(t) = 3e^{t} - 2e^{2t} + 2t + 3 + 2e^{-t}$.

03. Usando as transformadas de Laplace, solucione o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) - 2x + 2y = \operatorname{sen}(t) \\ x''(t) + 2y'(t) + x = 0 \end{cases}$$

sujeitas às condições iniciais $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$.

Resposta: $x(t) = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{4}{45}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{-t} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{5}\cos(t)$ e $y(t) = \frac{1}{3}te^{-t} + \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t}$.

04. A carga instantânea $q(t)$ no capacitor em um circuito em série L-C-R (indutor-capacitor-resistor) é dada pela equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t),$$

onde $E(t)$ é força eletromotriz.

Use as transformadas de Laplace para determinar a carga $q(t)$ e a corrente $i(t)$ em um circuito em série no qual $L = 1\text{henry}$, $R = 20\text{ohms}$, $C = 0{,}01\text{farad}$, $E(t) = 120\operatorname{sen}(10t)$, $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$. Qual é a corrente estacionária?

Resposta: $q(t) = \frac{3}{5}e^{-10t} + 6te^{-10t} - \frac{3}{5}\cos(10t)$;

$i(t) = -60te^{-10t} + 6\operatorname{sen}(10t)$;

corrente estacionária: $6\operatorname{sen}(10t)$.

*4.13 – Exercícios resolvidos*

01. Um determinado sistema é regido pela equação diferencial

$$y''(t)-3y'(t)+4y(t)=g(t),$$

sujeita às condições iniciais $y(0)=1$ e $y'(0)=5$. Empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades, determine a resposta $y(t)$ desse sistema quando $g(t)=t$, $t>0$.

**Notação**: $\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$.

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, não homogênea:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3sY(s)+3y(0)+4Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\left(s^2-3s+4\right)Y(s)=\frac{1}{s^2}+s+5-3=\frac{1+s^3+2s^2}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{s^3+2s^2+1}{s^2\left(s^2-3s+4\right)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2-3s+4} \qquad (4.13.1)$$

$$\lim_{s\to 0}(1.1)\left(s^2\right)\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$\frac{s^3+2s^2+1}{s^2\left(s^2-3s+4\right)}=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2-3s+4}=\frac{\frac{1}{4}\left(s^2-3s+4\right)+Bs\left(s^2-3s+4\right)+(Cs+D)s^2}{s^2\left(s^2-3s+4\right)}$$

$$s^3+2s^2+1=\frac{1}{4}\left(s^2-3s+4\right)+B\left(s^3-3s^2+4s\right)+\left(Cs^3+Ds^2\right)$$

$$s^3+2s^2+1=(B+C)s^3+\left(\frac{1}{4}-3B+D\right)s^2+\left(-\frac{3}{4}+4B\right)s+1$$

$$-\frac{3}{4}+4B=0\Rightarrow 4B=\frac{3}{4}\Rightarrow B=\frac{3}{16}$$

$$\frac{1}{4}-3B+D=2\Rightarrow D=2-\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\Rightarrow D=\frac{32-4+9}{16}\Rightarrow D=\frac{37}{16}$$

$$B+C=1\Rightarrow C=1-\frac{3}{16}\Rightarrow C=\frac{13}{16}.$$

Retornando-se a (4.13.1):

$$Y(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}+\frac{3}{16}\frac{1}{s}+\frac{13}{16}\frac{s}{s^2-3s+4}+\frac{37}{16}\frac{1}{s^2-3s+4}. \qquad (4.13.2)$$

Completando-se quadrados na equação (4.13.2), tem-se que:

$$Y(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}+\frac{3}{16}\frac{1}{s}+\frac{13}{16}\frac{s-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{37}{16}\frac{1}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$Y(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}+\frac{3}{16}\frac{1}{s}+\frac{13}{16}\frac{s-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{37}{16}\frac{1}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{39}{32}\frac{1}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$Y(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}+\frac{3}{16}\frac{1}{s}+\frac{13}{16}\frac{s-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{113}{32}\frac{2}{\sqrt{7}}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,.$$

Como $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ e $\mathcal{L}\{e^{at}y(t)\}=e^{-as}Y(s)$, tem-se que:

$$y(t)=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}t+\frac{13}{16}e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+\frac{113\sqrt{7}}{112}e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right).$$

02. Solucione a equação integral de Volterra abaixo empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades.

$$y(t)=1-\operatorname{senh}(t)+\int_0^t(\theta+1)y(t-\theta)d\theta$$

**<u>Notação</u>**: $\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$.

$$y(t)=1-\operatorname{senh}(t)+(t+1)*y(t)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação integral:

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2-1}+\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)Y(s)$$

$$\left(1-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right)Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2-1}$$

$$\frac{s^2-1-s}{s^2}Y(s)=\frac{s^2-1-s}{s(s^2-1)}$$

$$Y(s)=\frac{s^2-1-s}{s(s^2-1)}\frac{s^2}{s^2-1-s}=\frac{s}{s^2-1}\,.$$

Como $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, tem-se que:

$$y(t)=\cosh(t).$$

03. Solucione a equação integral abaixo empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades.

$$y(t)=\cos(2t)+t+1+\int_0^t y(\theta)(t-\theta)d\theta$$

**Notação**: $\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$.

$$y(t)=\cos(2t)+t+1+y(t)*t$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação integral:

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+Y(s)\frac{1}{s^2}$$

$$\left(1-\frac{1}{s^2}\right)Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}$$

$$\frac{s^2-1}{s^2}Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{s^3}{(s^2-1)(s^2+4)}+\frac{1}{s^2-1}+\frac{s}{s^2-1}. \tag{4.13.3}$$

Decompondo-se em frações parciais:

$$\frac{s^3}{(s^2-1)(s^2+4)}=\frac{As+B}{s^2-1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$s^3=(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2-1)$$

$$s^3=As^3+4As+Bs^2+4B+Cs^3-Cs+Ds^2-D$$

$$s^3=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A-C)s+(4B-D)$$

$$\begin{cases}A+C=1\\4A-C=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{5}\Rightarrow C=\frac{4}{5}$$

$$\begin{cases}B+D=0\\4B-D=0\end{cases}\Rightarrow B=0\Rightarrow D=0.$$

Retornando-se à equação (4.13.3):

$$Y(s)=\frac{1}{5}\frac{s}{s^2-1}+\frac{4}{5}\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2-1}+\frac{s}{s^2-1}$$

$$Y(s)=\frac{6}{5}\frac{s}{s^2-1}+\frac{4}{5}\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2-1}.$$

Como $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, tem-se que

$$y(t)=\frac{6}{5}\cosh(t)+\frac{4}{5}\cos(2t)+\operatorname{senh}(t).$$

04. Uma partícula se move ao longo de uma linha de modo que seu afastamento $x$ de um ponto fixo $O$ em um tempo qualquer $t$ seja dado por

$$x''(t)+3x'(t)+3x(t)=30\text{sen}(2t).$$

a) Se em $t=0$ a partícula está em repouso em $x=0$, determine seu afastamento $x(t)$ em um tempo qualquer $t>0$ empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades.

$$\begin{cases} x''(t)+3x'(t)+3x(t)=30\text{sen}(2t) \\ x(0)=0 \\ x'(0)=0 \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace unilateral à equação diferencial ordinária, tem-se que:

$$\mathcal{L}\{x''(t)+3x'(t)+3x(t)\}=\mathcal{L}\{30\text{sen}(2t)\}.$$

**Notação**: $\mathcal{L}\{x(t)\}=X(s)$.

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+3sX(s)-3x(0)+3X(s)=30\frac{2}{s^2+4}$$

$$\left(s^2+3s+3\right)X(s)=\frac{60}{s^2+4}$$

$$X(s)=\frac{60}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+3s+3\right)}=\frac{As+B}{s^2+4}+\frac{Cs+D}{s^2+3s+3} \tag{4.13.4}$$

$$60=(As+B)\left(s^2+3s+3\right)+(Cs+D)\left(s^2+4\right)$$

$$60=As^3+3As^2+3As+Bs^2+3Bs+3B+Cs^3+4Cs+Ds^2+4D$$

$$60=(A+C)s^3+(3A+B+D)s^2+(3A+3B+4C)s+(3B+4D)$$

$$\begin{cases} A \quad\quad\quad + C \quad\quad = 0 \\ 3A + B \quad\quad + D = 0 \\ 3A + 3B + 4C \quad\quad = 0 \\ \quad\quad 3B \quad\quad + 4D = 60 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 60 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 60 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 60 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & | & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & | & 60 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{10} & | & 60 \end{bmatrix}$$

$$\frac{37}{10}D = 60 \Rightarrow D = \frac{600}{37}$$

$$C - \frac{3}{10}D = 0 \Rightarrow C - \frac{3}{10}\frac{600}{37} = 0 \Rightarrow C = \frac{180}{37}$$

$$B - 3C + D = 0 \Rightarrow B - 3\frac{180}{37} + \frac{600}{37} = 0 \Rightarrow B = -\frac{60}{37}$$

$$A + C = 0 \Rightarrow A + \frac{180}{37} = 0 \Rightarrow A = -\frac{180}{37}$$

Voltando-se a (4.13.4):

$$X(s) = -\frac{180}{37}\frac{s}{s^2+4} - \frac{60}{37}\frac{1}{s^2+4} + \frac{180}{37}\frac{s}{s^2+3s+3} + \frac{600}{37}\frac{1}{s^2+3s+3}.$$

Completando quadrados: $s^2 + 3s + 3 = \left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

$$X(s) = -\frac{180}{37}\frac{s}{s^2+4} - \frac{30}{37}\frac{2}{s^2+4} + \frac{180}{37}\frac{s}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{600}{37}\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$X(s) = -\frac{180}{37}\frac{s}{s^2+4} - \frac{30}{37}\frac{2}{s^2+4} + \frac{180}{37}\frac{s+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{600}{37}\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$X(s) = -\frac{180}{37}\frac{s}{s^2+4} - \frac{30}{37}\frac{2}{s^2+4} + \frac{180}{37}\frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{270}{37}\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} +$$
$$+ \frac{600}{37}\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$X(s) = -\frac{180}{37}\frac{s}{s^2+4} - \frac{30}{37}\frac{2}{s^2+4} + \frac{180}{37}\frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{330}{37}\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$X(s)=-\frac{180}{37}\frac{s}{s^2+4}-\frac{30}{37}\frac{2}{s^2+4}+\frac{180}{37}\frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{330}{37}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$X(s)=-\frac{180}{37}\frac{s}{s^2+4}-\frac{30}{37}\frac{2}{s^2+4}+\frac{180}{37}\frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{220\sqrt{3}}{37}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Lembrando que $\mathcal{L}\{e^{at}x(t)\}=X(s-a)$, tem-se que:

$$L^{-1}\{X(s)\}=-\frac{180}{37}\cos(2t)-\frac{30}{37}\operatorname{sen}(2t)+\frac{180}{37}e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{220\sqrt{3}}{37}e^{-\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$x(t)=-\frac{30}{37}[6\cos(2t)+\operatorname{sen}(2t)]+\frac{20}{37}e^{-\frac{3}{2}t}\left[9\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+11\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right].$$

b) Plote o gráfico da função $x(t)$, identificando o termo transitório e o termo de regime permanente. Faça comentários pertinentes.

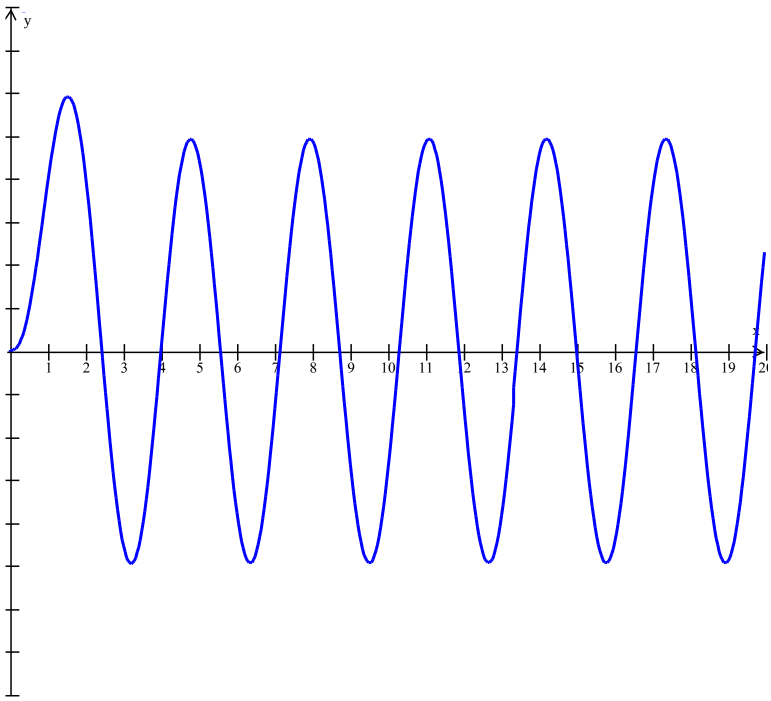



**Figura 4.16**: Gráfico de

$$x(t)=-\frac{30}{37}[6\cos(2t)+\operatorname{sen}(2t)]+\frac{20}{37}e^{-\frac{3}{2}t}\left[9\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+11\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right],\ t\in[0,20].$$

**Termo transiente**: $\frac{20}{37}e^{-\frac{3}{2}t}\left[9\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+11\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.

**Termo de regime permanente**: $-\frac{30}{37}[6\cos(2t)+\operatorname{sen}(2t)]$.

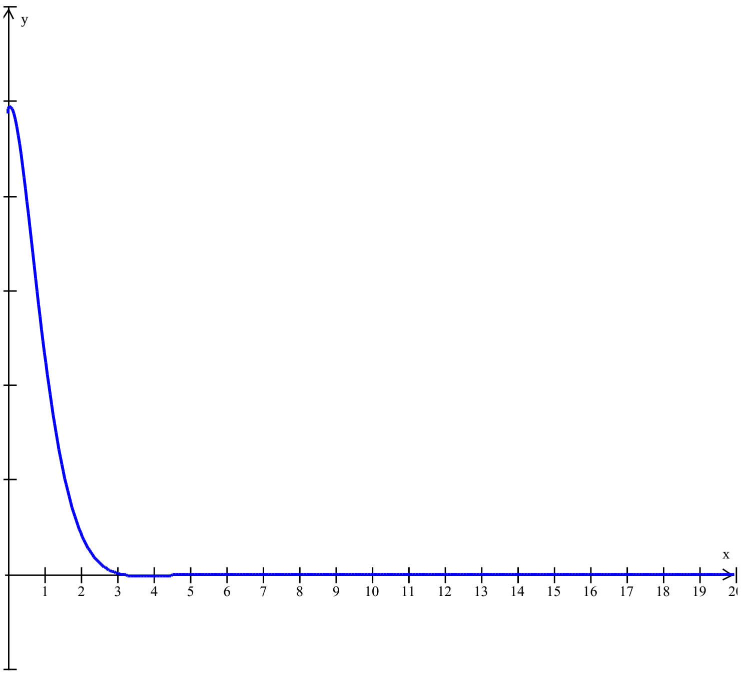



**Figura 4.17**: Gráfico do termo transiente $\frac{20}{37}e^{-\frac{3}{2}t}\left[9\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+11\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$, $t\in[0,20]$.

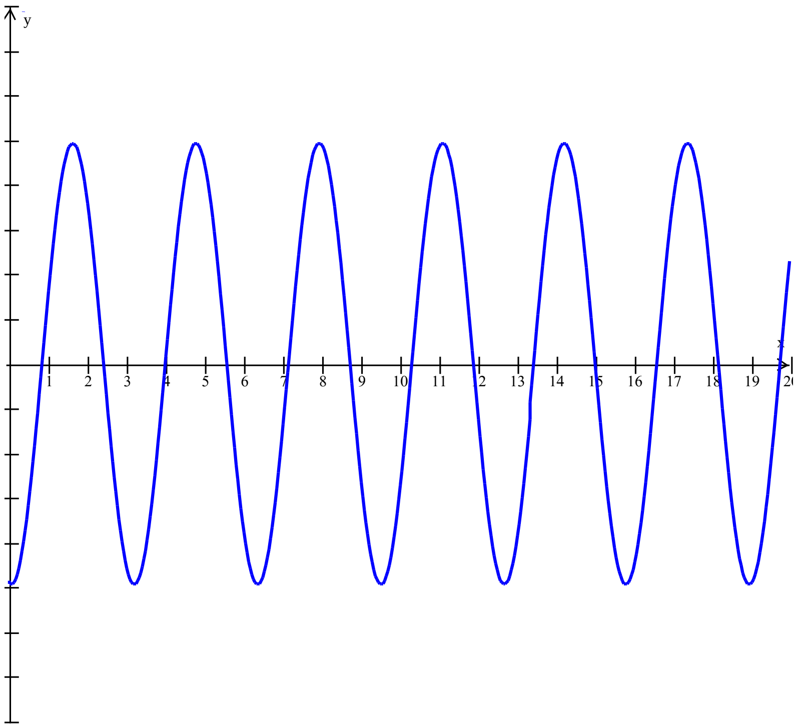



**Figura 4.18**: Gráfico do termo de regime permanente $-\frac{30}{37}[6\cos(2t)+\operatorname{sen}(2t)]$, $t\in[0,20]$.

**Comentários**: Percebe-se, pela Figura 4.17, que o termo transiente "contribui" para a solução até $t \approx 3$. Após, a solução é dada pelo termo de regime permanente, como ilustram as Figuras 4.16 e 4.18.

### *4.14 – Exercícios complementares*

01. Determine o valor das seguintes integrais impróprias:

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-2x}\,dx$ ; b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{7}{2}x}\,\mathrm{senh}(3x)\,dx$ ; c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t}-e^{-10t}}{t}\,dt$ .

Resposta: $\dfrac{3}{4}$ Resposta: $\dfrac{12}{13}$ Resposta: $\ln(5)$

02. Calcule as seguintes integrais impróprias:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\,dt$ ; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(6t)-\cos(4t)}{t}\,dt$ .

Resposta: $\ln(2)$ Resposta: $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

03. Empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades, calcule a integral abaixo.

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^3(t)}{5t}e^{-\sqrt{3}\,t}\,dt$ Resposta: $\dfrac{\pi}{120}$

04. Empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades, mostre que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{2}\,t}\,\mathrm{senh}(t)\,\mathrm{sen}(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{8}.$$

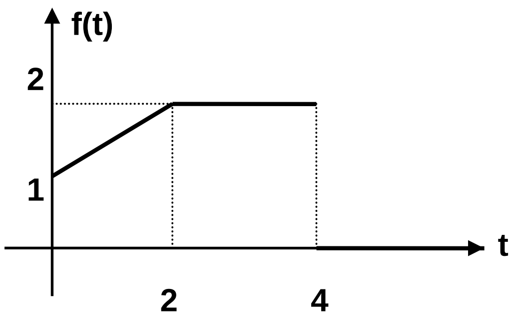
05. Calcular:

a) $\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\cosh(2t)\right\}$ ; Resposta: $F(s)=\dfrac{s+4}{s^2+8s+12}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-5}{s^2+9}\right\}$ ; Resposta: $f(t)=2\cos(3t)-\dfrac{5}{3}\mathrm{sen}(3t)$

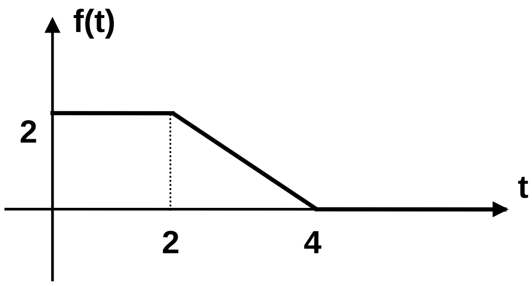
c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$ . Resposta: $f(t)=\left\{2e^{-2(t-2)}-e^{-(t-2)}\right\}u(t-2)$

06. Calcule a transformada de Laplace da função representada graficamente abaixo.




Resposta: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2s}\left(2 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - 4e^{-4s}\right)$.

07. Calcule a transformada de Laplace da função representada graficamente abaixo.




Resposta: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}\left(e^{-4s} - e^{-2s} + 2s\right)$.

08. Determine a transformada de Laplace da função representada graficamente na Figura 4.19.

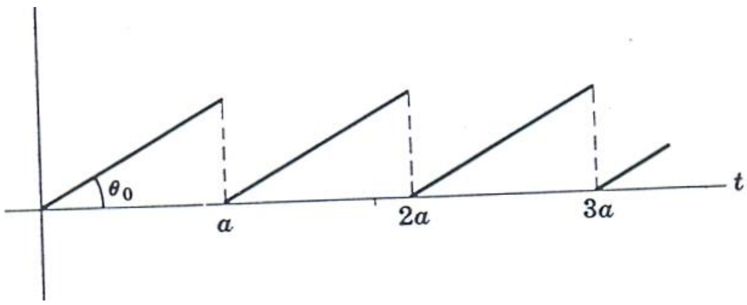
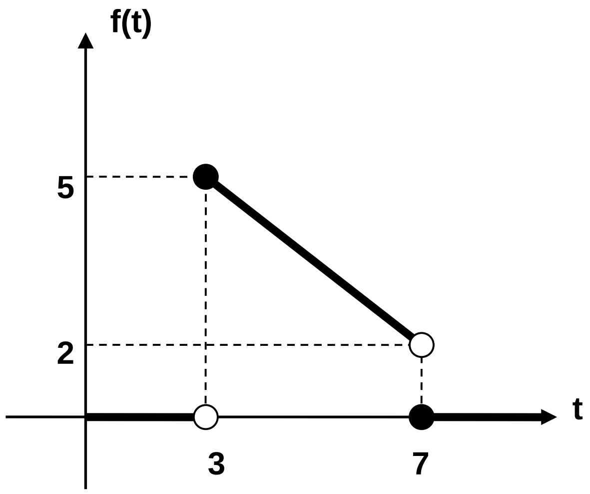



**Figura 4.19**: Função periódica – **[13]**.

Resposta: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - e^{-as} - ase^{-as}}{s^2\left(1 - e^{-as}\right)} \operatorname{tg}(\theta_0)$.

09. Seja $f(t)$ a função representada graficamente abaixo.




a) Expresse $f(t)$ de forma compacta usando a função degrau unitário.

Resposta: $f(t) = \left(-\dfrac{3}{4}t + \dfrac{29}{4}\right)\left[u(t-3) - u(t-7)\right]$.

b) Usando o item anterior, calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Resposta: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s}\left(5 - \dfrac{3}{4s}\right)e^{-3s} - \dfrac{1}{s}\left(2 - \dfrac{3}{4s}\right)e^{-7s}$.

10. Seja $f(t) = e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t)\cos(t), t > 0$.

a) Determine $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e identifique as singularidades de $F(s)$.

Resposta: $F(s) = \dfrac{1}{4}\dfrac{s+2}{(s+2)^2+1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{s+2}{(S+2)^2+9}$.

Singularidades: $-2 \pm i,\ -2 \pm 3i$.

b) Represente geometricamente a região de convergência de $F(s) = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^2(t)\cos(t)\right\}$.

11. Sabendo que $\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ e $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, determine $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\right\}$ e sua respectiva região de convergência.

Resposta: $\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

12. Sabendo que $\operatorname{sen}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ e $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, determine

$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}\left(\sqrt{t}\right)\right\}$ e sua respectiva região de convergência.

Resposta: $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-\frac{1}{4s}}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

13. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^3 - 47s^2 + 56s + 4}{s^4 - 4s^3 + 16s - 16}\right\}$.

Resposta: $f(t) = e^{2t}\left(2t^2 - t + 5\right) + 6e^{-2t}$.

14. Determine $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3 + s^2 + 13s + 9}{s^4 + 4s^3 + 10s^2 - 12s - 39}\right\}$.

Resposta: $f(t) = \cosh\left(\sqrt{3}t\right) - e^{-2t}\operatorname{sen}(3t)$.

15. Use as transformadas de Laplace para solucionar as seguintes equações:

a) $\begin{cases} y''(t) + y(t) = 8\cos(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$; Resposta: $y(t) = \cos(t) - \operatorname{sen}(t) + 4t\operatorname{sen}(t)$

b) $\begin{cases} y'(t) = 1 - \operatorname{sen}(t) - \int_0^t y(u)du \\ y(0) = 0 \end{cases}$; Resposta: $y(t) = \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)$

c) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 5,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(5,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 10\operatorname{sen}(4\pi x) & 0 < x < 5 \end{cases}$.

Resposta: $U(x,s)=C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}\,x}+C_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}\,x}+\dfrac{10}{s+32\pi^2}\,\text{sen}(4\pi\, x)$

$u(x,t)=10\,\text{sen}(4\pi x)e^{-32\pi^2 t}$

16. Usando as transformadas de Laplace e suas propriedades, determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t)-y'(t)-2y(t)=t\,e^{t} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}.$$

Resposta: $y(t)=\dfrac{4}{3}e^{2t}-\dfrac{1}{12}e^{-t}-\dfrac{1}{2}te^{t}-\dfrac{1}{4}e^{t}$.

17. Empregando as transformadas de Laplace, determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t)+6y'(t)-y(t)=\cosh(4t)e^{-3t} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=3 \end{cases}.$$

Resposta: $y(t)=e^{-3t}\left[\dfrac{1}{6}\cosh(4t)-\dfrac{1}{6}\cosh\left(\sqrt{10}t\right)+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\,\text{senh}\left(\sqrt{10}t\right)\right]$.

18. Usando as transformadas de Laplace e suas propriedades, resolva o seguinte problema de valor inicial (PVI):

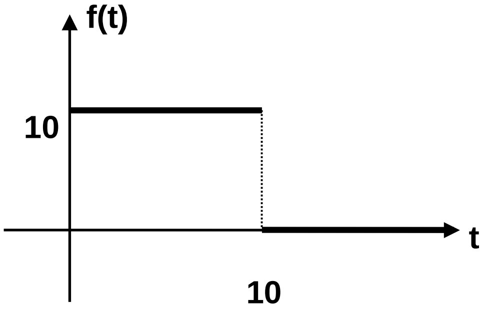
$$\begin{cases} y''(t)+4y'(t)+13y(t)=2t+3e^{-2t}\cos(3t) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \end{cases}.$$

Resposta: $y(t)=-\dfrac{8}{169}+\dfrac{2}{13}t+\dfrac{8}{169}e^{-2t}\cos(3t)-\dfrac{179}{507}e^{-2t}\text{sen}(3t)+\dfrac{1}{2}te^{-2t}\text{sen}(3t)$.

19. Empregando as transformadas de Laplace e suas propriedades, solucione a equação íntegro-diferencial

$$\frac{1}{10}y'(t)+4y(t)+40\int_0^t y(u)\,du=f(t),$$

sendo $f(t)$ a função representada graficamente abaixo e $y(0)=0$.

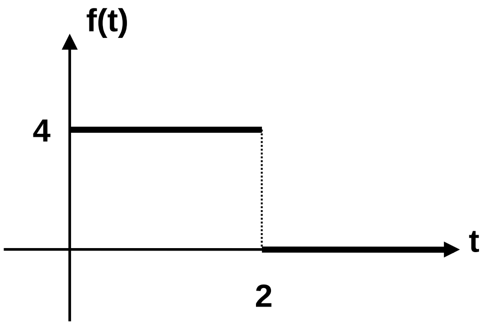



Resposta: $y(t)=100te^{-20t}+100(t-10)e^{-20(t-10)}\,u(t-10)$.

20. Usando as transformadas de Laplace e suas propriedades, determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(t)+y'(t)-2y(t)=f(t) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases},$$

sendo $f(t)$ a função representada graficamente abaixo.




Resposta: $y(t)=-2+\frac{8}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{-2t}+2\,u(t-2)-\frac{4}{3}e^{t-2}\,u(t-2)-\frac{2}{3}e^{-2(t-2)}\,u(t-2)$.

21. Empregando as transformadas de Laplace e suas propriedades, determine a solução geral da equação diferencial ordinária com coeficientes variáveis

$$t\,y''(t)-(t+2)\,y'(t)+3y(t)=t-1,$$

sujeita à condição inicial $y(0)=0$.

Resposta: $y(t)=Ct^{3}+\frac{1}{2}t$.

22. Empregando as transformadas de Laplace e suas propriedades, solucione a equação íntegro-diferencial

$$y''(t)+\int_0^t y(u)e^{2(t-u)}du = e^t \cosh(t),$$

sujeita às condições iniciais $y(0)=3$ e $y'(0)=-3$.

Resposta: $y(t)=-1+4e^{\frac{t}{2}}\cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)-2\sqrt{5}e^{\frac{t}{2}}\operatorname{senh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)$.

23. Usando as transformadas de Laplace e suas propriedades, solucione e equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-4u(x,t) & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0)=6\operatorname{sen}(x)-4\operatorname{sen}(2x) & 0<x<\pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0 \end{cases}.$$

Resposta: $u(x,t)=6e^{-5t}\operatorname{sen}(x)-4e^{-8t}\operatorname{sen}(2x)$.

24. Empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades, solucione a equação diferencial parcial a seguir.

$$u_x(x,t)-u_t(x,t)=1-e^{-t} \qquad 0<x<1,\ t>0$$

$$u(x,0)=x \qquad 0<x<1$$

Resposta: $u(x,t)=x+1-e^{-t}$.

25. Um indutor de 3 henrys está em série com um resistor de 30 ohms e com uma f.e.m. dada por $150\operatorname{sen}(20t)$. Supondo que em $t=0$ a corrente é nula, use as transformadas de Laplace para determinar a corrente em um tempo $t>0$ qualquer.

Resposta: $i(t)=\operatorname{sen}(20t)-2\cos(20t)+2e^{-10t}$.

26. Um determinado sistema é regido pela equação diferencial

$$y''(t)+8y'(t)+14y(t)=g(t),$$

onde as condições iniciais são $y(0)=1$ e $y'(0)=-4$.

Empregando as transformadas de Laplace, determine a resposta $y(t)$ desse sistema quando o mesmo é excitado por um degrau de amplitude sete, ou seja, $g(t)=7\,u(t)$.

Resposta: $y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-4t}\left[\cosh\left(\sqrt{2}t\right)-2\sqrt{2}\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}t\right)\right]$.

27. Uma partícula se move ao longo de uma linha de modo que seu afastamento $x$ de um ponto fixo $O$ em um tempo qualquer $t$ seja dado por

$$x''(t)+4x'(t)+5x(t)=80\operatorname{sen}(5t).$$

a) Se em $t=0$ a partícula está em repouso em $x=0$, determine seu afastamento em um tempo qualquer $t>0$ usando as transformadas de Laplace e suas propriedades.

Resposta: $x(t)=2e^{-2t}[\cos(t)+7\operatorname{sen}(t)]-2[\cos(5t)+\operatorname{sen}(5t)]$.

b) Determine a amplitude, o período e a freqüência do movimento após um longo tempo.

Resposta: Período: $P=\frac{2\pi}{5}$, Freqüência: $\frac{1}{P}=\frac{5}{2\pi}$, Amplitude: $2\sqrt{2}$ (quando $t=\frac{\pi}{20}$).

c) No resultado obtido no item (a), qual é o termo de regime transitório e qual é o termo de regime permanente?

Resposta: Regime transitório: $2e^{-2t}[\cos(t)+7\operatorname{sen}(t)]$;

Regime permanente: $-2[\cos(5t)+\operatorname{sen}(5t)]$.

28. Em engenharia, um problema importante é determinar a *deflexão estática* de uma viga elástica causada por seu peso ou por uma carga externa. Essa deformação (deflexão) $y(x)$ é descrita pela equação diferencial ordinária de quarta ordem

$$EI\frac{d^4}{dx^4}y(x)=W(x), \qquad (1)$$

onde E é o módulo de elasticidade de Young relacionado com o material da viga, I é o momento de inércia de uma secção transversal da viga (em relação a um eixo conhecido como eixo neutro ou linha neutra), o produto EI é a rigidez defletora da viga e $W(x)$ é a carga por unidade de comprimento.

Uma viga engastada (fixa) em uma extremidade e solta na outra é chamada de *cantiléver* ou *viga em balanço* ou *viga cantoneira*. Um trampolim, um braço estendido, a asa de um avião e um arranha-céu são exemplos de tais vigas.

Para uma viga de comprimento $\ell$ em balanço engastada à esquerda, além de satisfazer (1), a deflexão $y(x)$ deve satisfazer as seguintes condições nas extremidades da viga (condições de contorno):

- $y(0)=0$, pois não há deflexão no extremo esquerdo engastado;

- $y'(0)=0$, pois a curva de deflexão é tangente ao eixo x na extremidade esquerda;
- $y''(\ell)=0$, pois o momento defletor (fletor) é nulo no extremo livre;
- $y'''(\ell)=0$, pois a força de espoliação (cisalhamento) é zero na extremidade livre. A força de espoliação é dada pela função $F(x)=EI\dfrac{d^3}{dx^3}y(x)$.

Assim, mostre que a deflexão em uma viga cantoneira, engastada em $x=0$ e livre em $x=\ell$ e que suporta uma carga uniforme $W_0$ por unidade de comprimento, é dada por

$$y(x)=\frac{W_0}{24EI}x^2\left(x^2-4\ell x+6\ell^2\right).$$

29. Em um circuito elétrico simples em série L-C-R (indutor-capacitor-resistor), a corrente i satisfaz a equação íntegro-diferencial

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau=E(t),$$

onde L é a indutância, R é a resistência, C é a capacitância e $E(t)$ é a força eletromotriz (f.e.m). Para o mesmo circuito, a carga instantânea $q(t)$ no capacitor satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$L\frac{d^2}{dt^2}q(t)+R\frac{d}{dt}q(t)+\frac{1}{C}q(t)=E(t).$$

Dessa forma, use as transformadas de Laplace e suas propriedades para determinar a carga $q(t)$ no capacitor e a corrente $i(t)$ em um circuito em série L-C-R no qual $L=1\,\text{henry}$, $R=20\,\text{ohms}$, $C=0{,}01\,\text{farad}$, $q(0)=0$, $i(0)=0$ e $E(t)$ é dada pela Figura 4.20.

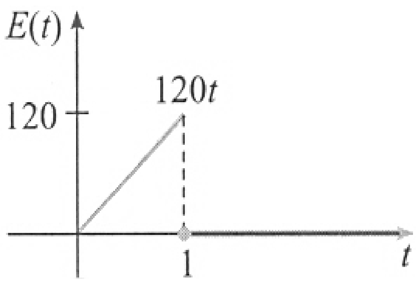



**Figura 4.20**: Força eletromotriz – **[18]**.

Resposta: $E(t)=120t-120(t-1)\,u(t-1)-120\,u(t-1)$.

$$q(t)=120\left[-\frac{1}{500}+\frac{1}{100}t+\frac{1}{500}e^{-10t}+\frac{1}{100}te^{-10t}-\frac{1}{125}u(t-1)-\frac{1}{100}(t-1)u(t-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{125}e^{-10(t-1)}u(t-1)+\frac{9}{100}(t-1)e^{-10(t-1)}u(t-1)\right]$$

$$i(t)=\frac{d}{dt}q(t)=120\left[\frac{1}{100}-\frac{1}{100}e^{-10t}-\frac{1}{10}te^{-10t}-\frac{1}{100}u(t-1)+\frac{1}{100}e^{-10(t-1)}u(t-1)+\right.$$

$$\left.-\frac{9}{10}(t-1)e^{-10(t-1)}u(t-1)\right]$$

30. Um resistor de R ohms e um capacitor de C farads são ligados em série com um gerador fornecendo E volts, como ilustra a Figura 4.21.

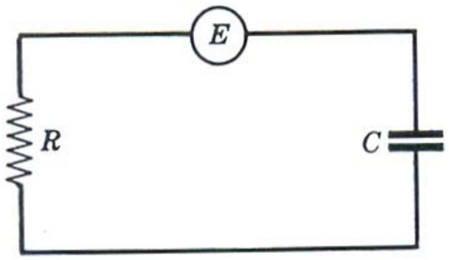



**Figura 4.21**: Circuito em série R-C – **[13]**.

a) Seja $Q_0$ a carga inicial no capacitor e $E=E_0\text{sen}(wt)$. Mostre, usando as transformadas de Laplace e suas propriedades, que a carga no capacitor em um tempo $t>0$ qualquer é dada por

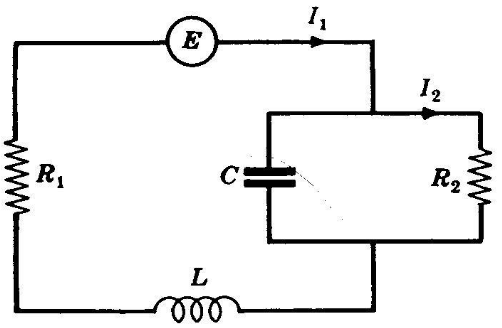
$$q(t)=\left(Q_0+\frac{wE_0}{aR}\right)e^{-\frac{t}{RC}}-\frac{E_0}{aR}\left[w\cos(wt)-\frac{1}{RC}\text{sen}(wt)\right],$$

sendo $a=w^2+\dfrac{1}{R^2C^2}$.

b) Determine a corrente $i(t)$.

Resposta: $i(t)=-\dfrac{1}{RC}\left(Q_0+\dfrac{wE_0}{aR}\right)e^{-\frac{t}{RC}}-\dfrac{wE_0}{aR}\left[w\,\text{sen}(wt)+\dfrac{1}{RC}\cos(wt)\right]$.

31. No circuito elétrico representado na figura abaixo




**<u>Figura 4.22</u>**: Circuito elétrico – **[13]**.

tem-se que $E = 500\text{sen}(10t)$, $R_1 = 10\,\text{ohms}$, $R_2 = 10\,\text{ohms}$, $L = 1\,\text{henry}$ e $C = 0{,}01\,\text{farad}$. Empregando as transformadas de Laplace e suas propriedades, determine:

1. a carga no capacitor em um tempo $t > 0$ qualquer;

   Resposta: $q(t) = \text{sen}(10t) - 2\cos(10t) + e^{-10t}[\text{sen}(10t) + 2\cos(10t)]$.

2. as correntes $I_1$ e $I_2$ em um tempo $t > 0$ qualquer.

   R.: $I_1(t) = 30\text{sen}(10t) - 10\cos(10t) - 10e^{-10t}[2\text{sen}(10t) - \cos(10t)]$;

   $I_2(t) = 10\text{sen}(10t) - 20\cos(10t) + 10e^{-10t}[2\cos(10t) + \text{sen}(10t)]$.

Sabe-se que a carga no capacitor e as correntes $I_1$ e $I_2$ são nulas em $t = 0$. Esboce o gráfico simultâneo da carga e das correntes para $t > 0$.

**<u>Observação</u>**

Equacionamento: $\begin{cases} E - \dfrac{q}{C} - L\dfrac{d}{dt}I - R_1 I_1 = 0 \\ \dfrac{q}{C} - R_2 I_2 = 0 \end{cases}$.

32. Prove que $\mathcal{L}\{\ln(t)\} = \frac{1}{s}[\Gamma'(1) - \ln(s)]$, onde $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$ é a *função gama*.

33. Prove que $\mathcal{L}\{\text{Si}(t)\} = \frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(s)\right] = \frac{1}{s}\text{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$, onde $\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}(u)}{u}du$ é a *integral seno*.

34. Empregando a transformada de Laplace unilateral e suas propriedades, calcule a integral a seguir.

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}\left(x^2\right) dx$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$ .

**<u>Sugestão</u>**: considere $g(t) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}\left(t\, x^2\right) dx$ e calcule a transformada de Laplace de $g(t)$.

# 5. TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

Define-se neste capítulo as transformadas discretas $\mathcal{Z}$ (direta e inversa) unilateral e bilateral.

## *5.1 – Definição da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral*

A transformada $\mathcal{Z}$ unilateral é definida como

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} + f_4 z^{-4} + \ldots$$

$$= f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \frac{f_3}{z^3} + \frac{f_4}{z^4} + \ldots, \qquad (5.1.1)$$

onde $z = a + ib$ (ou $z = x + iy$ ou $z = \alpha + j\beta$) é um número complexo e $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$ são os coeficientes da série de potências negativas de $z$, os quais representam os valores que o sinal assume nos diversos instantes discretos de tempo.

Uma sequência $f_n$ é $\mathcal{Z}$ transformável se a série (5.1.1) é convergente para pelos menos um complexo $z$.

Outras notações empregadas na definição da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral:

$$\mathcal{Z}[x(kT)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = x(0) + x(T) z^{-1} + x(2T) z^{-2} + x(3T) z^{-3} + \ldots;$$

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + x(3) z^{-3} + x(4) z^{-4} + \ldots.$$

**<u>Exemplo</u>**

Seja o sinal dado por

$$x(n)=\begin{cases} 2, & n=0 \\ -1, & n=1 \\ 1, & n=2 \\ -2, & n=3 \\ 3, & n=4 \\ -3, & n=5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + x(4)z^{-4} + \dots$$

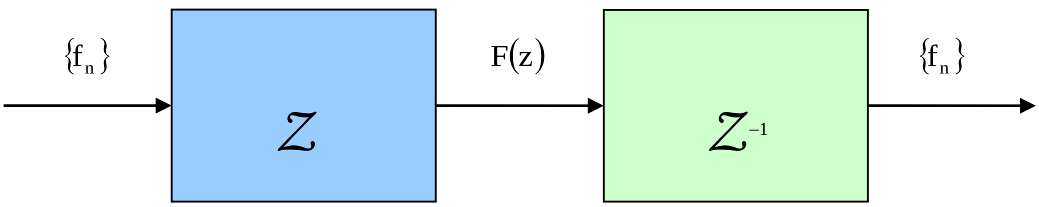
$$= 2 - z^{-1} + z^{-2} - 2z^{-3} + 3z^{-4} - 3z^{-5}$$

$$= 2 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} - \frac{3}{z^5}$$

Se $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ é a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral, então

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0,1,2,3,\dots$$

é a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral inversa.




**<u>Figura 5.1</u>**: Transformadas $\mathcal{Z}$.

### *5.2 – Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral de algumas sequências*

#### 5.2.1 – Versão discreta da função delta de Dirac

$$f_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = f_0 = 1 \quad \text{ou} \quad \mathcal{Z}\{\delta(n)\} = \delta(0) = 1.$$

### 5.2.2 – Sequência unitária ou passo discreto unitário

$f_n = 1 \ \forall n \geq 0$

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = \mathcal{Z}\{1\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots \qquad (5.2.2.1)$$

A série (5.2.2.1) é uma série geométrica. Esta série converge se:

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1 \Rightarrow |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \Rightarrow x^2 + y^2 > 1.$$

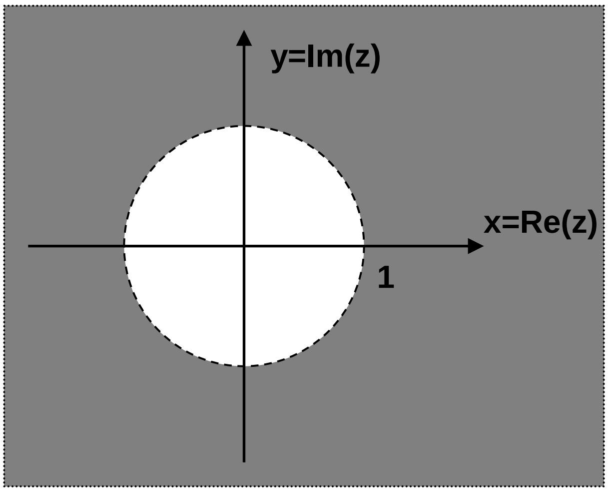



**Figura 5.2**: $|z| > 1 \Rightarrow x^2 + y^2 > 1$.

Logo, $\mathcal{Z}\{1\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \dfrac{z}{z-1}, \ |z| > 1$.

### 5.2.3 – Exponencial

$f_n = e^{an}$, a constante e $n \geq 0$

$$\mathcal{Z}\{e^{an}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{z}\right)^n = 1 + \frac{e^a}{z} + \frac{e^{2a}}{z^2} + \frac{e^{3a}}{z^3} + \frac{e^{4a}}{z^4} + \ldots \qquad (5.2.3.1)$$

A série (5.2.3.1) é uma série geométrica. Esta série converge se:

$$\left|\frac{e^a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |e^a| \Rightarrow |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} > |e^a| \Rightarrow x^2 + y^2 > |e^a|^2.$$

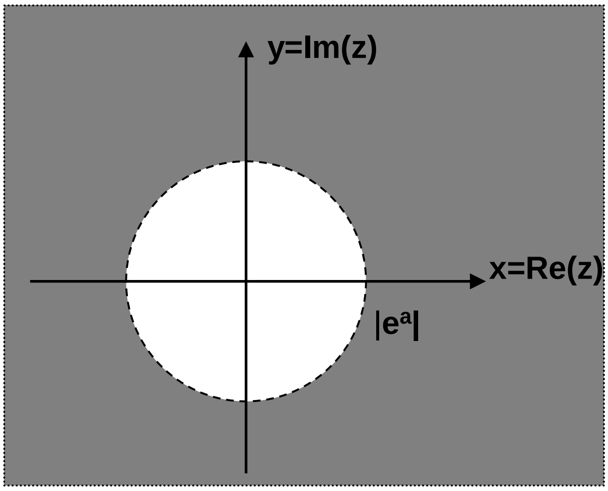



**Figura 5.3**: $|z| > |e^a| \Rightarrow x^2 + y^2 > |e^a|^2$.

Assim, $\mathcal{Z}\{e^{an}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^a}{z}} = \frac{z}{z-e^a}, |z| > |e^a|$.

### 5.2.4 – Potência

$f_n = a^n$, a constante e $n \geq 0$

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \frac{a^4}{z^4} + \ldots \qquad (5.2.4.1)$$

A série (5.2.4.1) é uma série geométrica. Esta série converge se:

$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a| \Rightarrow |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} > |a| \Rightarrow x^2 + y^2 > |a|^2$.

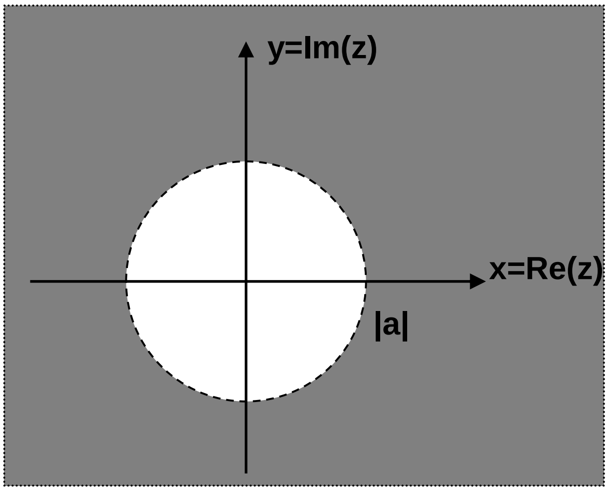



**Figura 5.4**: $|z| > |a| \Rightarrow x^2 + y^2 > |a|^2$.

Dessa forma, $\mathcal{Z}\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$.

**Resumo**

| $f_n$ | $F(z)$ |
|---|---|
| $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ | $1$ |
| $1$ | $\frac{z}{z-1}, \lvert z\rvert > 1$ |
| $e^{an}$ | $\frac{z}{z-e^a}, \lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$ |
| $a^n$ | $\frac{z}{z-a}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |

**Tabela 5.1**: Algumas transformadas Z unilaterais.

### *5.3 – Séries de potências: definição, raio de convergência*

Um série de potências complexas tem a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + a_3(z-c)^3 + a_4(z-c)^4 + \ldots,$$

sendo:

$z$: variável complexa;

$a_0, a_1, a_2, \ldots$: coeficientes da série;

$c$: centro da série (número complexo);

$R$: raio de convergência da série $(0 \leq R \leq \infty)$.

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ ou $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

**Convergência da série de potências de (z-c)** (Teorema de Cauchy-Hadamard)

1. **R = 0**

   A série converge somente para $z = c$.

2. **0 < R < ∞**

A série *converge absolutamente* para todo $z \in |z-c| < R$ e diverge para todo $z \in |z-c| > R$.

$z = x + iy$

$c + a + ib$

$|z-c| = |x + iy - (a+ib)| = |(x-a) + i(y-b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

**3. R = ∞**

A série *converge absolutamente* para todo $z$.

**Exemplo**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \ldots \tag{5.3.1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

A série converge em $|z| < 1$ e diverge em $|z| > 1$.

Para $|z| = 1$: testar a convergência absoluta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \tag{5.3.2}$$

A série (5.3.2) é a *série harmônica*, uma série *divergente*.

Logo, pode-se afirmar que a série (5.3.1) converge em $|z| < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$.

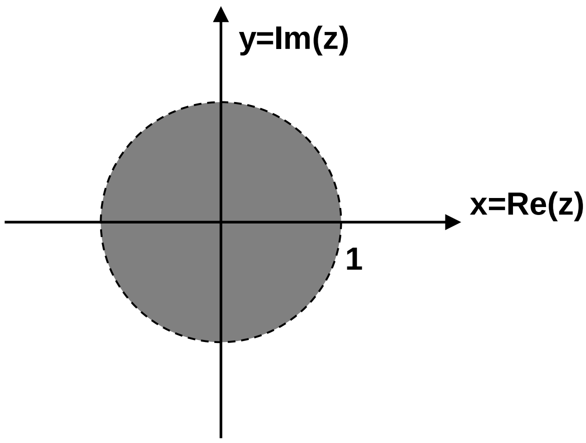



**Figura 5.5**: $|z| < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$.

### *5.4 – Existência e domínio de definição da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral*

Pode-se reescrever a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral (5.1.1) como

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{z} - 0\right)^n . \tag{5.4.1}$$

Do teorema de Cauchy-Hadamard tem-se que

$\left|\frac{1}{z}\right| < R \Rightarrow |z| > \frac{1}{R}$.

A série (5.4.1) converge em $|z| > \frac{1}{R}$.

A série (5.4.1) diverge em $|z| < \frac{1}{R}$.

**<u>Exemplo</u>**

$f_n = a^n$, a constante e $n \geq 0$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a^n|}{|a^{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} |a^{-1}| = \lim_{n\to\infty} |a|^{-1} = \frac{1}{|a|}$$

Convergência: $|z| > \frac{1}{R} \Rightarrow |z| > |a|$.

**<u>Teorema 1</u>**

Seja a série $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$, convergente em todo ponto $z_o \neq 0$. Então, a série *converge absolutamente* em $|z| > |z_o|$ e *converge uniformemente* em toda região $|z_o| < R' \leq |z|$.

**<u>Definição</u>**

Uma sequência é do *tipo exponencial* se existem $M > 0$, $s_0 \geq 0$ e $n_0 \geq 0$ tais que

$$|f_n| < M e^{s_0 n}$$

para todo $n \geq n_0$.

**<u>Teorema 2</u>**

Toda sequência do tipo exponencial é $\mathcal{Z}$ transformável.

**Teorema 3**

Para que uma sequência $\{f_n\}$ seja $\mathcal{Z}$ transformável é necessário que ela seja do tipo exponencial.

**Teorema 4**

Se a série $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ converge em $|z|>\frac{1}{R}$, então $F(z)$ é uma função analítica (ou regular ou holomorfa) nessa região e é a única transformada da sequência $\{f_n\}$.

**Teorema 5**

Seja $F(z)$ uma função analítica na região $|z|>\frac{1}{R}$. Então existe uma seqüência $\{f_n\}$ para a qual $\mathcal{Z}\{f_n\}=F(z)$.

**Demonstrações**: **VICH**, R. *Z transform theory and applications*. Praga: SNTL – Publishers of Technical Literature, 1987.

**Funções analíticas**

Se a derivada $f'(z)$ existe em todos os pontos $z$ de uma região $R'$ do plano complexo, então $f(z)$ é dita *analítica* (ou regular ou holomorfa) em $R'$. Uma função $f(z)$ é dita *inteira* quando for analítica em $C$.

Uma função $f(z)$ é *analítica* em um ponto $z_o$ se existir $\delta>0$ tal que $f'(z)$ exista para todo $z$ em $|z-z_0|<\delta$.

**Equações de Cauchy-Riemann**

Uma *condição necessária* para que $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ seja analítica em uma região $R'$ do plano complexo é que $u$ e $v$ satisfaçam em $R'$ as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad . \tag{5.4.2}$$

Se as derivadas parciais de $f(z)$ são contínuas em $R'$, então as equações de Cauchy-Riemann (5.4.2) são *condições necessárias e suficientes* para garantir a analiticidade de $f(z)$ em $R'$.

**Demonstração**: **SPIEGEL**, M.R. *Variáveis complexas*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972. Problema 5, página 107.

### *5.5 – Propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral*

#### 5.5.1 – Linearidade

Sejam $c_i, i = 0,1,2,\ldots,\ell$, números complexos dados. Se as transformadas $\mathcal{Z}\{f_{i,n}\} = F_i(z)$ existem, com raio de convergência $R_i > 0$ para $i = 0,1,2,\ldots,\ell$ ($\ell$ finito), então também existe a transformada

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{\ell} c_i f_{i,n}\right\} = \sum_{i=0}^{\ell} c_i F_i(z).$$

**Exemplos**

1º) $\mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\beta n)\}$, onde β é uma constante (real puro).

Lembrar que $\operatorname{sen}(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e $\mathcal{Z}\{e^{an}\} = \dfrac{z}{z - e^{a}}, |z| > \left|e^{a}\right|$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\beta n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{i\beta n} - e^{-i\beta n}}{2i}\right\} \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{i\beta}} - \frac{z}{z - e^{-i\beta}}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\,\frac{z\left(z - e^{-i\beta}\right) - z\left(z - e^{i\beta}\right)}{z^2 - ze^{-i\beta} - ze^{i\beta} + 1} \\
&= \frac{1}{2i}\,\frac{z^2 - ze^{-i\beta} - z^2 + ze^{i\beta}}{z^2 - z\left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) + 1} \\
&= \frac{1}{2i}\,\frac{z\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right)}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1} \\
&= \frac{1}{2i}\,\frac{2iz\operatorname{sen}(\beta)}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1} \\
&= \frac{z\operatorname{sen}(\beta)}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}
\end{aligned}$$

$f_n = \operatorname{sen}(\beta n)$ é $\mathcal{Z}$ transformável para

$$|z| > \left|e^{i\beta}\right| = |\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta)| = \sqrt{\cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta)} = 1.$$

$F(z) = \mathcal{Z}\{\operatorname{sen}(\beta n)\}$ é analítica em todo plano complexo, exceto em $z = e^{i\beta}$ e $z = e^{-i\beta}$.

2º) $\mathcal{Z}\{\cos(\beta n)\}$, onde β é uma constante (real puro).

Lembrar que $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $\mathcal{Z}\{e^{an}\} = \dfrac{z}{z - e^{a}}, |z| > |e^{a}|$.

$$\mathcal{Z}\{\cos(\beta n)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{i\beta n} + e^{-i\beta n}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{i\beta}} + \frac{z}{z - e^{-i\beta}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z(z - e^{-i\beta}) + z(z - e^{i\beta})}{z^2 - ze^{-i\beta} - ze^{i\beta} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z^2 - ze^{-i\beta} + z^2 - ze^{i\beta}}{z^2 - z(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2z^2 - z(e^{i\beta} + e^{-i\beta})}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2z^2 - 2z\cos(\beta)}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2z[z - \cos(\beta)]}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}$$

$$= \frac{z[z - \cos(\beta)]}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}$$

$f_n = \cos(\beta n)$ é $\mathcal{Z}$ transformável para

$$|z| > |e^{i\beta}| = |\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta)| = \sqrt{\cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta)} = 1.$$

$F(z) = \mathcal{Z}\{\cos(\beta n)\}$é analítica em todo plano complexo, exceto em $z = e^{i\beta}$ e $z = e^{-i\beta}$.

3º) $\mathcal{Z}\{\operatorname{senh}(\beta n)\}$, onde β é uma constante (real puro).

Lembrar que $\operatorname{senh}(z) = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$ e $\mathcal{Z}\{e^{an}\} = \dfrac{z}{z - e^{a}}, |z| > |e^{a}|$.

$$\mathcal{Z}\{\operatorname{senh}(\beta n)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{\beta n} - e^{-\beta n}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{\beta}}-\frac{z}{z-e^{-\beta}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z\left(z-e^{-\beta}\right)-z\left(z-e^{\beta}\right)}{z^2-ze^{-\beta}-ze^{\beta}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z^2-ze^{-\beta}-z^2+ze^{\beta}}{z^2-z\left(e^{\beta}+e^{-\beta}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right)}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2z\,\mathrm{senh}(\beta)}{z^2-2z\cos(\beta)+1}$$

$$=\frac{z\,\mathrm{senh}(\beta)}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$f_n=\mathrm{senh}(\beta n)$ é $\mathcal{Z}$ transformável para todo $|z|>\max\left(e^{\beta},e^{-\beta}\right)$.

$F(z)=\mathcal{Z}\{\mathrm{senh}(\beta n)\}$é analítica em todo plano complexo, exceto em $z=e^{\beta}$ e $z=e^{-\beta}$.

4º) $\mathcal{Z}\{\cosh(\beta n)\}$, onde β é uma constante (real puro).

Lembrar que $\cosh(z)=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ e $\mathcal{Z}\left\{e^{an}\right\}=\dfrac{z}{z-e^a},|z|>\left|e^a\right|$.

$$\mathcal{Z}\{\cosh(\beta n)\}=\mathcal{Z}\left\{\frac{e^{\beta n}+e^{-\beta n}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{\beta}}+\frac{z}{z-e^{-\beta}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z\left(z-e^{-\beta}\right)+z\left(z-e^{\beta}\right)}{z^2-ze^{-\beta}-ze^{\beta}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z^2-ze^{-\beta}+z^2-ze^{\beta}}{z^2-z\left(e^{\beta}+e^{-\beta}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2z^2-z\left(e^{\beta}+e^{-\beta}\right)}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2z^2-2z\cosh(\beta)}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2z[z-\cosh(\beta)]}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$$=\frac{z[z-\cosh(\beta)]}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$f_n=\cosh(\beta n)$ é $\mathcal{Z}$ transformável para todo $|z|>\max\left(e^{\beta},e^{-\beta}\right)$.

$F(z) = \mathcal{Z}\{\cosh(\beta n)\}$ é analítica em todo plano complexo, exceto em $z = e^{\beta}$ e $z = e^{-\beta}$.

**Resumo**

| $f_n$ | $F(z)$ |
|---|---|
| $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ | $1$ |
| $1$ | $\dfrac{z}{z-1}, \lvert z \rvert > 1$ |
| $e^{an}$ | $\dfrac{z}{z-e^{a}}, \lvert z \rvert > \lvert e^{a} \rvert$ |
| $a^{n}$ | $\dfrac{z}{z-a}, \lvert z \rvert > \lvert a \rvert$ |
| $\operatorname{sen}(\beta n)$ | $\dfrac{z \operatorname{sen}(\beta)}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}, \lvert z \rvert > 1$ |
| $\cos(\beta n)$ | $\dfrac{z[z-\cos(\beta)]}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}, \ \lvert z \rvert > 1$ |
| $\operatorname{senh}(\beta n)$ | $\dfrac{z \operatorname{senh}(\beta)}{z^2 - 2z\cosh(\beta) + 1}, \lvert z \rvert > \max(e^{\beta}, e^{-\beta})$ |
| $\cosh(\beta n)$ | $\dfrac{z[z-\cosh(\beta)]}{z^2 - 2z\cosh(\beta) + 1}, \ \lvert z \rvert > \max(e^{\beta}, e^{-\beta})$ |

**Tabela 5.2**: Transformada Z unilateral de algumas funções discretas elementares.

### 5.5.2 – Translação (ou deslocamento)

Seja k um inteiro positivo. Se a transformada $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ existe para $\lvert z \rvert > \dfrac{1}{R}$, então também existem as transformadas $\mathcal{Z}\{f_{n+k}\}$ e $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\}$ (esta para $n \geq k$). Para $\lvert z \rvert > \dfrac{1}{R}$, tem-se que

$$\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^{k}\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}\right] \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = z^{-k}F(z) = \frac{F(z)}{z^{k}}.$$

**Prova**

1. Considerando-se $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} f_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}$ e $n = n' + k$.

$$F(z)=\sum_{n'+k=k}^{\infty} f_{n'+k} z^{-n'-k} + \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}$$

$$F(z)=z^{-k}\sum_{n'=0}^{\infty} f_{n'+k} z^{-n'} + \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}$$

$$F(z)=z^{-k}\,\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} + \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}$$

$$\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k\left[F(z)-\sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}\right]$$

2. Considerando-se $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=-k}^{\infty} f_n z^{-n} - \sum_{n=-k}^{-1} f_n z^{-n}$ e $n = n' - k$.

$$F(z)=\sum_{n'-k=-k}^{\infty} f_{n'-k} z^{-(n'-k)} - \sum_{n=-k}^{-1} f_n z^{-n}$$

$$F(z)=z^{k}\sum_{n'=0}^{\infty} f_{n'-k} z^{-n'} - \sum_{n=-k}^{-1} f_n z^{-n}$$

Como $f_n = 0 \;\forall n < 0$:

$$F(z)=z^k\;\mathcal{Z}\{f_{n-k}\};$$

$$\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = \frac{F(z)}{z^k}.$$

**Exemplo**

$$\mathcal{Z}\{e^{\alpha n}\} = \frac{z}{z-e^{\alpha}}$$

$$\mathcal{Z}\{e^{\alpha(n+2)}\} = z^2\left[\frac{z}{z-e^{\alpha}} - \sum_{n=0}^{1} f_n z^{-n}\right] = z^2\left[\frac{z}{z-e^{\alpha}} - f_0 - \frac{f_1}{z}\right]$$

$$= z^2\left[\frac{z}{z-e^{\alpha}} - 1 - \frac{e^{\alpha}}{z}\right] = z^2\,\frac{z^2 - z\left(z-e^{\alpha}\right) - e^{\alpha}\left(z-e^{\alpha}\right)}{z\left(z-e^{\alpha}\right)}$$

$$= z\,\frac{z^2 - z^2 + ze^{\alpha} - ze^{\alpha} + e^{2\alpha}}{z-e^{\alpha}}$$

$$= \frac{e^{2\alpha} z}{z-e^{\alpha}}$$

$$\mathcal{Z}\left\{e^{\alpha(n-2)}\right\} = z^{-2}\,\frac{z}{z-e^{\alpha}} = \frac{1}{z\left(z-e^{\alpha}\right)}$$

### 5.5.3 – Similaridade

Se a transformada $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ existe para $|z| > \frac{1}{R}$ e se $\lambda \neq 0$ é uma constante complexa, então a transformada $Z\left\{\lambda^n f_n\right\}$ também existe e, para $|z| > \frac{|\lambda|}{R}$, tem-se que

$$\mathcal{Z}\left\{\lambda^n f_n\right\} = F\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

**Prova**

$$\mathcal{Z}\left\{\lambda^n f_n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{\lambda}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

**Exemplo**

$$\mathcal{Z}\left\{e^{\alpha n}\operatorname{sen}(\beta n)\right\} = \frac{\frac{z}{e^{\alpha}}\operatorname{sen}(\beta)}{\left(\frac{z}{e^{\alpha}}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{e^{\alpha}}\right)\cos(\beta) + 1} = \frac{ze^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta)}{z^2 - 2e^{\alpha} z\cos(\beta) + e^{2\alpha}}$$

### 5.5.4 – Convolução

$$\{f_n\} * \{g_n\} = \{f_n * g_n\} = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k} g_k$$

Se as transformadas $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ e $\mathcal{Z}\{g_n\} = G(z)$ existem, respectivamente, para $|z| > \frac{1}{R_1}$ e $|z| > \frac{1}{R_2}$, então a transformada $\mathcal{Z}\{f_n * g_n\}$ também existe e, para $|z| > \max\left\{\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right\}$, tem-se que

$$\mathcal{Z}\{f_n * g_n\} = F(z)G(z).$$

**Prova**

$$F(z)G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}$$

Empregando-se a fórmula de Cauchy para o produto de séries absolutamente convergentes, tem-se que

$$F(z)G(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_{n-k} g_k\right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n * g_n) z^{-n} .$$

**Exemplo**

$$F(z) = \frac{z^2}{\left(z - e^{\alpha_1}\right)\left(z - e^{\alpha_2}\right)} = \underbrace{\frac{z}{z - e^{\alpha_1}}}_{F_1(z)} \cdot \underbrace{\frac{z}{z - e^{\alpha_2}}}_{F_2(z)} = \mathcal{Z}\left\{e^{\alpha_1 n}\right\} \mathcal{Z}\left\{e^{\alpha_2 n}\right\}$$

$$F_1(z)F_2(z) = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{\alpha_1 k} e^{\alpha_2 (n-k)}\right\} = \mathcal{Z}\left\{e^{\alpha_2 n} \sum_{k=0}^{n} e^{\alpha_1 k} e^{-\alpha_2 k}\right\}$$

$$\{f_n\} = e^{\alpha_2 n} \sum_{k=0}^{n} e^{\alpha_1 k} e^{-\alpha_2 k}$$

### 5.5.5 – Diferenciação da transformada de uma sequência

Se a transformada $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ existe para $|z| > \frac{1}{R}$, então a transformada $\mathcal{Z}\{n\, f_n\}$ também existe e, para $|z| > \frac{1}{R}$, tem-se que

$$\mathcal{Z}\{n\, f_n\} = -z \frac{d}{dz} F(z).$$

**Prova**

Como a série que define a transformada $\mathcal{Z}$ converge uniformemente na região $\frac{1}{R} < R^{'} \leq |z|$, ela pode ser diferenciada termo a termo. Assim:

$$\frac{d}{dz}F(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(f_n z^{-n}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} n\, f^{\,n} z^{-n-1}$$

$$\frac{d}{dz}F(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} n\, f^{\,n}\,\frac{z^{-n}}{z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} n\, f_n z^{-n}$$

$$\frac{d}{dz}F(z) = -\frac{1}{z}\,\mathcal{Z}\{n\, f_n\}$$

$$\mathcal{Z}\{n\, f_n\} = -z\frac{d}{dz}F(z).$$

**Exemplos**

1º) $\mathcal{Z}\{n\} = \mathcal{Z}\{n.1\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = -z\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

$$|z| > \frac{1}{R} \Rightarrow |z| > 1$$

2º) $\mathcal{Z}\{n^2\} = \mathcal{Z}\{n.n\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] = -z\frac{(z-1)^2 - z.2(z-1)}{(z-1)^4}$

$$= -z\frac{(z-1)(z-1-2z)}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

$$|z| > \frac{1}{R} \Rightarrow |z| > 1$$

3º) $\mathcal{Z}\{n^3\}=\mathcal{Z}\{n.n^2\}=-z\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]=-z\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{z^2+z}{(z-1)^3}\right]$

$$=-z\frac{(2z+1)(z-1)^3-(z^2+z)3(z-1)^2}{(z-1)^6}$$

$$=-z\frac{(z-1)^2[(2z+1)(z-1)-3z(z+1)]}{(z-1)^6}$$

$$=-z\frac{2z^2-z-1-3z^2-3z}{(z-1)^4}$$

$$=\text{-}z\frac{-z^2-4z-1}{(z-1)^4}$$

$$=\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=1$$

$$|z|>\frac{1}{R}\Rightarrow|z|>1$$

4º) Generalizando

$$\mathcal{Z}\{n^{k-1}\}=\frac{N_{k-1}(z)}{(z-1)^k},\ k=1,2,3,\ldots,|z|>1$$

$N_k(z)$ é um polinômio de variável complexa.

<u>**Exercício**</u>

Calcule $\mathcal{Z}\{n\,\mathrm{sen}(\beta n)\}$.

Resposta: $\dfrac{\mathrm{sen}(\beta)(z^3-z)}{[z^2-2z\cos(\beta)+1]^2}$.

### 5.5.6 – Integração da transformada de uma sequência

Seja $f_0=0$. Se a transformada $\mathcal{Z}\{f_n\}=F(z)$ existe para $|z|>\dfrac{1}{R}$, então a transformada $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{f_n}{n}\right\}$ também existe e, para $|z|>\dfrac{1}{R}$, tem-se que

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{f_n}{n}\right\} = \int_z^{\infty} \frac{F(u)}{u} du \, .$$

**Prova**

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u^{-n} \, , \, |u| > \frac{1}{R} \tag{5.5.6.1}$$

Multiplicando-se (5.5.6.1) por $u^{-1}$ e integrando de z a $z_0$, obtém-se:

$$\int_z^{z_0} u^{-1} F(u) du = \int_z^{z_0} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_n u^{-n-1} \right] du$$

$$\int_z^{z_0} u^{-1} F(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_z^{z_0} f_n u^{-n-1} du \right]$$

$$\int_z^{z_0} \frac{F(u)}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ - f_n \frac{u^{-n}}{n} \right]_z^{z_0}$$

$$\int_z^{z_0} \frac{F(u)}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ - \frac{f_n}{n} \left( z_0^{\ -n} - z^{-n} \right) \right] . \tag{5.5.6.2}$$

Considerando-se $z_0 \to \infty$ em (5.5.6.2), tem-se que:

$$\int_z^{\infty} \frac{F(u)}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n} z^{-n}$$

$$\int_z^{\infty} \frac{F(u)}{u} du = Z\left\{\frac{f_n}{n}\right\}, \; f_0 = 0 \, .$$

**Exemplo**

$$\{f_n\} = \left\{(-1)^{n-1}\right\}, \; n \geq 1, \; f_0 = 0$$

$$\mathcal{Z}\left\{(-1)^{n-1}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \ldots = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z+1}$$

$$\left| -\frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\} = \int_z^{\infty} \frac{du}{u(u+1)} = \lim_{z_0 \to \infty} \int_z^{z_0} \frac{du}{u(u+1)} = \lim_{z_0 \to \infty} \left[ \ln\left( \frac{u}{u+1} \right) \right]_z^{z_0}$$

$$= \lim_{z_0 \to \infty} \left[ \ln\left( \frac{z_0}{z_0 + 1} \right) - \ln\left( \frac{z}{z+1} \right) \right]$$

$$= \lim_{z_0 \to \infty} \left[ \ln\left( \frac{1}{1 + \frac{1}{z_0}} \right) - \ln\left( \frac{z}{z+1} \right) \right]$$

$$= -\ln\left( \frac{z}{z+1} \right) = \ln\left( \frac{z+1}{z} \right) = \ln\left( 1 + \frac{1}{z} \right)$$

### 5.5.7 – Valor inicial

Se a transformada $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ existe para $|z| > \frac{1}{R}$, então

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = f_0 .$$

**Prova**

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \frac{f_3}{z^3} + \dots$$

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = f_0$$

**Exemplos**

1º) $F(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - 0{,}5z^{-1}}$ $\quad \lim_{z \to \infty} F(z) = 1 \Rightarrow f_0 = 1$

2º) $F(z) = \frac{(z-1)^2}{z - 0{,}5}$ $\quad \lim_{z \to \infty} F(z) = \infty \Rightarrow$ F(z) não é a transformada $\mathcal{Z}$ de uma sequência $\{f_n\}$.

### 5.5.8 – Valor final

Seja $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ para $|z| > \frac{1}{R}$. Se $\lim_{n \to \infty} f_n$ existe, então $\lim_{z \to 1} (z-1)F(z)$ também existe e tem-se que

$$\lim_{z \to 1} (z-1)F(z) = \lim_{n \to \infty} f_n .$$

**Prova**

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

$$\mathcal{Z}\{f_{n+1}\} = z\left[F(z) - \sum_{n=0}^{0} f_n z^{-n}\right] = zF(z) - z\,f_0$$

$$\mathcal{Z}\{f_{n+1} - f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)z^{-n} = zF(z) - z\,f_0 - F(z) = (z-1)F(z) - z\,f_0 \qquad (5.5.8.1)$$

Considerando-se o limite de (5.5.8.1) quando $z \to 1$:

$$\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)z^{-n} = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - \lim_{z\to 1} z\,f_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f_0$$

$$(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \ldots = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f_0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z).$$

## *5.6 – Resumo: transformada $\mathcal{Z}$ unilateral das funções discretas elementares*

| $f_n$ | $F(z)$ |
|---|---|
| $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ | $1$ |
| $1$ | $\dfrac{z}{z-1}, \lvert z\rvert > 1$ |
| $e^{an}$ | $\dfrac{z}{z-e^{a}}, \lvert z\rvert > \lvert e^{a}\rvert$ |
| $a^{n}$ | $\dfrac{z}{z-a}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $\text{sen}(\beta n)$ | $\dfrac{z\,\text{sen}(\beta)}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1}, \lvert z\rvert > 1$ |

| | |
|---|---|
| $\cos(\beta n)$ | $\dfrac{z[z-\cos(\beta)]}{z^2-2z\cos(\beta)+1},\ \lvert z\rvert>1$ |
| $\mathrm{senh}(\beta n)$ | $\dfrac{z\,\mathrm{senh}(\beta)}{z^2-2z\cosh(\beta)+1},\lvert z\rvert>\max\left(e^{\beta},e^{-\beta}\right)$ |
| $\cosh(\beta n)$ | $\dfrac{z[z-\cosh(\beta)]}{z^2-2z\cosh(\beta)+1},\ \lvert z\rvert>\max\left(e^{\beta},e^{-\beta}\right)$ |
| $n$ | $\dfrac{z}{(z-1)^2},\lvert z\rvert>1$ |
| $n^2$ | $\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3},\lvert z\rvert>1$ |
| $n^3$ | $\dfrac{z\left(z^2+4z+1\right)}{(z-1)^4},\lvert z\rvert>1$ |

**<u>Tabela 5.3</u>**: Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral das funções discretas elementares.

### *5.7 – Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral inversa*

$$\mathcal{Z}\{f_n\}=F(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\{f_n\}$$

### *5.8 – Métodos para determinar a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral inversa*

### 5.8.1 – Uso da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e de suas propriedades

**<u>Exemplos</u>**

1º) $F(z)=3+2z^{-1}+6z^{-4}=3+\dfrac{2}{z}+\dfrac{6}{z^4}$

Zeros: raízes de $3z^4+2z^3+6=0$.

Singularidade: $z=0$ (polo de ordem 4).

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=3\,\mathcal{Z}^{-1}\{1\}+2\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\}+6\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^4}\right\} \qquad (5.8.1.1)$$

Pela propriedade de translação $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = \frac{F(z)}{z^k}, k \in Z_+$, $\mathcal{Z}\{f_{n-1}\} = \frac{F(z)}{z}$ e $\mathcal{Z}\{f_{n-4}\} = \frac{F(z)}{z^4}$.

Lembrando-se que $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$, $\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = 1$ e $\mathcal{Z}^{-1}\{1\} = \delta(n)$, obtém-se em (5.8.1.1):

$\{f_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + 6\delta(n-4), n \geq 0$.

Como $\delta(n-1) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$ e $\delta(n-4) = \begin{cases} 1, & n = 4 \\ 0, & n \neq 4 \end{cases}$, tem-se que $\{f_n\} = \{3,2,0,0,6,0,0,0,\ldots\}$.

2º) $F(z) = 2 - \frac{3z}{z-4}$

Zeros: $z = -8$.

Singularidade: $z = 4$ (polo de ordem 1).

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = 2\,\mathcal{Z}^{-1}\{1\} - 3\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-4}\right\} \qquad (5.8.1.2)$$

Lembrando-se que $\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$, obtém-se em (5.8.1.2):

$\{f_n\} = 2\delta(n) - 3.4^n, n \geq 0 \Rightarrow \{f_n\} = \{-1,-12,-48,-192,-768,\ldots\}$.

## 5.8.2 – Decomposição em frações parciais

**Exemplos**

1º) $F(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-0,5)}$

Zeros: $z = 1$.

Singularidades: $z = -1,\ z = 0,5$ (polos de ordem 1).

$$\frac{z-1}{(z+1)(z-0,5)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-0,5}$$
$$z - 1 = A(z-0,5) + B(z+1)$$
$$z - 1 = (A+B)z + (-0,5A + B)$$
$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -0,5A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4}{3} \text{ e } B = -\frac{1}{3}$$

$$F(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-0,5)} = \frac{4}{3}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{z-0,5}$$

$$\{f_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{4}{3}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1}\right\} - \frac{1}{3}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-0{,}5}\right\} = \frac{4}{3}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\frac{z}{z+1}\right\} - \frac{1}{3}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\frac{z}{z-0{,}5}\right\}$$

(5.8.2.1)

Lembrando-se que $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = \dfrac{F(z)}{z^k}$, pode-se escrever (5.8.2.1) como

$$\{f_n\} = \frac{4}{3}(-1)^{n-1} - \frac{1}{3}(0{,}5)^{n-1},\ n \geq 1.$$

Como $f_0 = \lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)} = 0$, tem-se que

$$\{f_n\} = \begin{cases} 0,\ n = 0 \\ \frac{4}{3}(-1)^{n-1} - \frac{1}{3}(0{,}5)^{n-1},\ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \{f_n\} = \left\{0, 1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \ldots\right\}.$$

2º) $F(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z-0{,}5)}$

Zeros: $z = 0,\ z = 1$.

Singularidades: $z = -1,\ z = 0{,}5$ (polos de ordem 1).

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z-1}{(z+1)(z-0{,}5)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-0{,}5} \Rightarrow A = \frac{4}{3}\ \text{ e }\ B = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{4}{3}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{z-0{,}5}$$

$$F(z) = \frac{4}{3}\frac{z}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{z}{z-0{,}5}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{4}{3}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\} - \frac{1}{3}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-0{,}5}\right\} \qquad (5.8.2.2)$$

Lembrando-se que $\mathcal{Z}\{a^n\} = \dfrac{z}{z-a}$, reescreve-se (5.8.8.2) como

$$\{f_n\} = \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(0{,}5)^n,\ n \geq 0 \Rightarrow \{f_n\} = \left\{1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \ldots\right\}.$$

Observe-se que $n = 0 \Rightarrow f_0 = 1$ e que $f_0 = \lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z(z-1)}{(z+1)(z-0{,}5)} = 1$.

3º) $F(z) = \dfrac{2z^2 - 7z + 7}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = \dfrac{2z^2 - 7z + 7}{(z-1)^2(z-2)}$

Zeros: $z = \frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} i$.

Singularidades: $z = 1$ (polo de ordem 2), $z = 2$ (polo de ordem 1).

$$\frac{2z^2 - 7z + 7}{(z-1)^2 (z-2)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2}$$

$$2z^2 - 7z + 7 = A(z-2) + B(z-1)(z-2) + C(z-1)^2$$

$$2z^2 - 7z + 7 = A(z-2) + B(z^2 - 3z + 2) + C(z^2 - 2z + 1)$$

$$2z^2 - 7z + 7 = (B + C) z^2 + (A - 3B - 2C) z + (-2A + 2B + C)$$

$$\begin{cases} B + C = 2 \\ A - 3B - 2C = -7 \\ -2A + 2B + C = 7 \end{cases} \qquad (5.8.2.3)$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{2z^2 - 7z + 7}{(z-1)^2 (z-2)} (z-1)^2 = \lim_{z\to 1} \frac{A}{(z-1)^2} (z-1)^2 + \lim_{z\to 1} \frac{B}{z-1} (z-1)^2 + \lim_{z\to 1} \frac{C}{z-2} (z-1)^2$$
$$\frac{2 - 7 + 7}{-1} = A + 0 + 0 \Rightarrow A = -2 \qquad (5.8.2.4)$$

$$\lim_{z\to 2} \frac{2z^2 - 7z + 7}{(z-1)^2 (z-2)} (z-2) = \lim_{z\to 2} \frac{A}{(z-1)^2} (z-2) + \lim_{z\to 2} \frac{B}{z-1} (z-2) + \lim_{z\to 2} \frac{C}{z-2} (z-2)$$
$$\frac{8 - 14 + 7}{1} = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 1 \qquad (5.8.2.5)$$

Usando-se os valores obtidos em (5.8.2.4) e (5.8.2.5) em uma das equações de (5.8.2.3), tem-se que

$$A - 3B - 2C = -7 \Rightarrow -2 - 3B - 2(1) = -7 \Rightarrow -3B = -3 \Rightarrow B = 1.$$

Assim:

$$F(z) = \frac{2z^2 - 7z + 7}{(z-1)^2 (z-2)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} = -\frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$\{f_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = -2\, \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-1)^2}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\}$$

$$= -2\, \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z} \frac{z}{(z-1)^2}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z} \frac{z}{z-1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z} \frac{z}{z-2}\right\}. \qquad (5.8.2.6)$$

Lembrando que $\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$, $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = \frac{F(z)}{z^k}$ e $\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}$, pode-se reescrever (5.8.2.6) como:

$$\begin{aligned}\{f_n\} &= -2(n-1)+(1)^{n-1}+(2)^{n-1}\\ &= -2n+2+1+(2)^{n-1}\\ &= 3-2n+(2)^{n-1},\ n\geq 1\end{aligned}$$

Como $f_0 = \lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left[-\dfrac{2}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}\right]=0$, tem-se que

$$\{f_n\}=\begin{cases}0, & n=0\\ 3-2n+(2)^{n-1}, & n\geq 1\end{cases} \Rightarrow \{f_n\}=\{0,2,1,1,3,9,23,\ldots\}.$$

### 5.8.3 – Expansão em série de potências

__Exemplos__

1º) $F(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{10z}{z^2-3z+2}=\dfrac{10z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$

Zeros: $z=0$.

Singularidades: $z=1,\ z=2$ (polos de ordem 1).

$$\begin{array}{l|l}
10z^{-1} & 1-3z^{-1}+2z^{-2} \\ \cline{2-2}
\underline{-10z^{-1}+30z^{-2}-20z^{-3}} & 10z^{-1}+30z^{-2}+70z^{-3}+150z^{-4}+310z^{-5}+\ldots \\
\quad 30z^{-2}-20z^{-3} & \\
\quad \underline{-30z^{-2}+90z^{-3}-60z^{-4}} & \\
\qquad 70z^{-3}-60z^{-4} & \\
\qquad \underline{-70z^{-3}+210z^{-4}-140z^{-5}} & \\
\qquad\quad 150z^{-4}-140z^{-5} & \\
\qquad\quad \underline{-150z^{-4}+450z^{-5}-300z^{-6}} & \\
\qquad\qquad 310z^{-5}-300z^{-6} & \\
\qquad\qquad \underline{-310z^{-5}+930z^{-6}-620z^{-7}} & \\
\qquad\qquad\quad 630z^{-6}-620z^{-7} &
\end{array}$$

$$F(z)=10z^{-1}+30z^{-2}+70z^{-3}+150z^{-4}+310z^{-5}+\ldots$$

Como $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0+f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+f_3z^{-3}+f_4z^{-4}+f_5z^{-5}+\ldots$, tem-se que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\{f_n\}=\{0,10,30,70,150,310,\ldots\};$$

$$\{f_n\} = 10.2^n - 10 = 10(2^n - 1),\ n \geq 0\,.$$

**Observações**

1ª) O método pode não conduzir a uma expressão fechada para $f_n$ .

2ª) O método pode ser vantajoso quando $F(z)$ não é uma razão de polinômios de z.

2º) $F(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = e^{z^{-2}}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^{-2})^n}{n!} = 1 + z^{-2} + \frac{z^{-4}}{2!} + \frac{z^{-6}}{3!} + \frac{z^{-8}}{4!} + \frac{z^{-10}}{5!} + \ldots$$

Como $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} + f_4 z^{-4} + f_5 z^{-5} + \ldots$ e

$$\{f_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{e^{z^{-2}}\right\},$$

tem-se que

$$\{f_n\} = \begin{cases} 0, \text{n} > 0 \text{ e n é ímpar} \\ \dfrac{1}{(n/2)!}, \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow \{f_n\} = \left\{1,0,1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{24},0,\frac{1}{120},0,\ldots\right\}$$

ou

$$\{f_n\} = \frac{(-1)^n + 1}{2\left(\dfrac{n}{2}\right)!},\ n \geq 0\,.$$

**Algumas séries de potências**

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{1}{n!}\right|}{\left|\dfrac{1}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = \infty$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ R = \infty$$

$$\operatorname{senh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = \infty$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ R = \infty$$

<u>**Exercício**</u>

Usando séries, mostre que

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \operatorname{sen}(\theta).$$

### 5.8.4 – Estratégia geral de inversão

Aplica-se o *teorema integral de Cauchy* para determinar os coeficientes da expansão em *série de Laurent*.

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{n-1} dz,\ n = 0,1,2,3,\ldots \qquad (5.8.4.1)$$

$$f_n = 0,\ n < 0$$

$$C: \quad z = \rho e^{i\varphi},\ \rho > \frac{1}{R},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Se $F(z)$ é uma função racional, o teorema dos resíduos pode ser aplicado com vantagens no cálculo da integral (5.8.4.1).

<u>**Exercícios**</u>

01. Seja $\{f_n\} = \{a^{n-1}\},\ f_0 = 0$. Mostre que $\mathcal{Z}\{a^{n-1}\} = \dfrac{1}{z-a},\ |z| > |a|$.

02. Determine a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral dos seguintes sinais discretos:

a) $x(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$; Resposta: $X(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$

b) $x(n) = \delta(n-4) - n\,u(n)$, onde $u(n) = 1\ \forall n \ge 0$. Resposta: $X(z) = z^{-4} - \dfrac{z}{(z-1)^2}$

03. Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral inversa de $X(z)=\dfrac{6}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$.

Resposta: $x(n)=-6\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}+12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$, $n\geq 0$.

## *5.9 – Transformada $\mathcal{Z}$ bilateral*

### 5.9.1 – Série de Laurent

A série de Laurent é definida como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-c)^n = \ldots+\frac{c_{-3}}{(z-c)^3}+\frac{c_{-2}}{(z-c)^2}+\frac{c_{-1}}{z-c}+ \qquad (5.9.1.1)$$
$$+c_0+c_1(z-c)+c_2(z-c)^2+c_3(z-c)^3+\ldots$$

onde

$\ldots+\dfrac{c_{-3}}{(z-c)^3}+\dfrac{c_{-2}}{(z-c)^2}+\dfrac{c_{-1}}{z-c}$ é a *parte principal* e

$c_0+c_1(z-c)+c_2(z-c)^2+c_3(z-c)^3+\ldots$ é a *parte analítica*.

Se a parte principal de (5.9.1.1) é nula, a série de Laurent se reduz à série de Taylor.

#### 5.9.1.1 - Singularidades

Um ponto $z_0$ é uma *singularidade* de uma função $f(z)$ se $f(z)$ não é analítica em $z_0$, enquanto toda vizinhança de $z_0$ contém pelo menos um ponto no qual $f(z)$ é analítica.

Denomina-se δ vizinhança de um ponto $z_0$ ao conjunto de todos os pontos $z$ do plano complexo tais que $|z-z_0|<\delta$, com δ>0. Notação: $N(z_0,\delta)$ é o disco de raio δ centrado em $z_0$.

Existem dois tipos de singularidades: singularidades não isoladas e singularidades isoladas.

Um ponto $z_0$ é uma *singularidade não isolada* de uma função $f(z)$ se e somente se $z_0$ é uma singularidade de $f(z)$ e toda vizinhança de $z_0$ contém pelo menos uma singularidade de $f(z)$ que não seja $z_0$.

Um ponto $z_0$ é uma *singularidade isolada* de uma função $f(z)$ se e somente se $f(z)$ é analítica em uma δ-vizinhança perfurada $\left(0<|z-z_0|<\delta \text{ ou } N^*(z_0,\delta)\right)$ de $z_0$.

Se $z_0$ é uma *singularidade isolada* de uma função $f(z)$, então $f(z)$ é analítica no anel $0<|z-z_0|<\delta$ e, portanto, pode ser expandida em série de Laurent.

As singularidades isoladas podem ser de três tipos.

### 1. Singularidades removíveis

Um ponto $z_0$ é uma singularidade removível de $f(z)$ se a parte principal de $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ é nula, ou seja, a expansão em série de Laurent de $f(z)$ tem apenas parte analítica.

**Exemplo**

$$f(z)=\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+\ldots\right)$$

$$f(z)=\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots$$

$z=0$ é uma singularidade removível de $f(z)$.

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}=1 \Rightarrow f(0)=1$$

### 2. Polos

Um ponto $z_0$ é um polo de $f(z)$ se a parte principal de $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ tem um número finito de potências negativas de $(z-z_0)$, com coeficientes não nulos. Assim, em $\sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \frac{c_{-N}}{(z-z_0)^N}+\frac{c_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}}+\ldots+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\ldots$, onde N é um número inteiro positivo, $z_0$ é um polo de ordem N.

**Exemplo**

$$f(z)=\frac{e^z-(z+1)}{z^3}=z^{-3}\left(e^z-z-1\right)=-z^{-3}-z^{-2}+z^{-3}e^z$$

$$=-z^{-3}-z^{-2}+z^{-3}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\dots\right)$$

$$=-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\frac{z^2}{5!}+\frac{z^3}{6!}+\dots$$

$$=\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\frac{z^2}{5!}+\frac{z^3}{6!}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n+2)!}$$

A função $f(z)$ tem um polo de ordem 1 em $z=0$.

**3. Singularidades essenciais**

Um ponto $z_0$ é uma singularidade essencial de $f(z)$ se a parte principal de $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ tem um número infinito de potências negativas de $(z-z_0)$, com coeficientes não nulos.

**Exemplo**

A função $f(z)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\frac{1}{7!z^7}+\dots$ tem uma singularidade essencial em $z=0$.

**5.9.2 – Definição**

Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral: $\mathcal{Z}\{f_n\}=F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^{-n}$.

Região de convergência da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral: $|z|>\frac{1}{R}$.

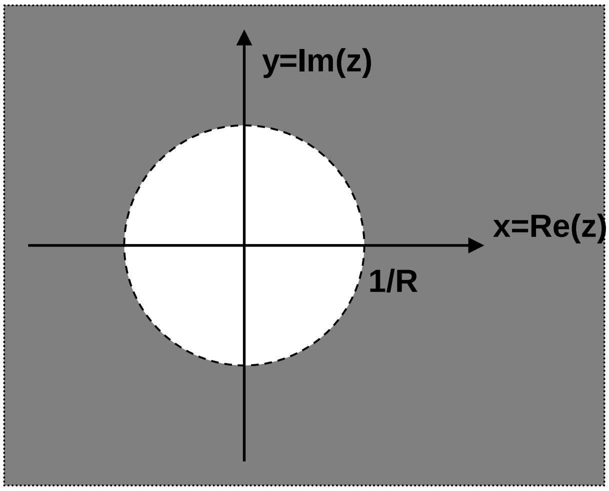



**Figura 5.6**: $|z| > \dfrac{1}{R} \Rightarrow x^2 + y^2 > \dfrac{1}{R^2}$.

Transformada Z bilateral: $\mathcal{Z}_{II}\{f_n\} = F_{II}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$

$$= \ldots + f_{-2}z^2 + f_{-1}z + f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \ldots . \qquad (5.9.2.1)$$

A série (5.9.2.1) é uma série de Laurent onde

$\ldots + f_{-3}z^3 + f_{-2}z^2 + f_{-1}z$ é a *parte analítica* (ou parte regular) e

$f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \frac{f_3}{z^3} + \ldots$ é a *parte principal* (transformada $\mathcal{Z}$ unilateral).

$$F_{II}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-1}^{-\infty} f_n z^{-n}}_{F_-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}}_{F_+(z)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

$$F_{II}(z) = F_-(z) + F_+(z)$$

$$\mathcal{Z}_{II}\{f_n\} = \mathcal{Z}_-\{f_n\} + \mathcal{Z}_+\{f_n\}$$

Região de convergência de $F_-(z)$: $|z| < R_-$.

Região de convergência de $F_+(z)$: $|z| > \dfrac{1}{R_+}$.

Região de convergência de $F_{II}(z)$: $\dfrac{1}{R_+} < |z| < R_-$.

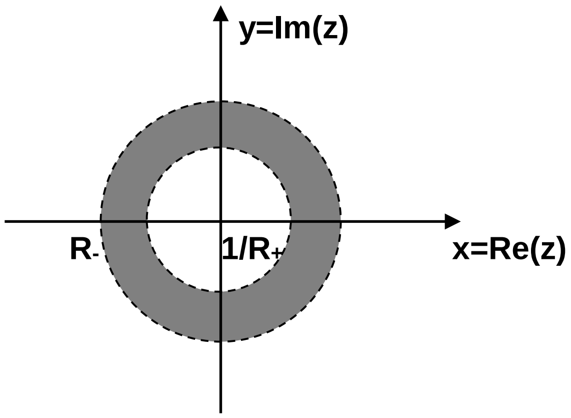



**Figura 5.7**: Anel de convergência de $F_{II}(z) = F_-(z) + F_+(z)$: $\dfrac{1}{R_+} < |z| < R_-$.

**Exemplo**

$$\{f_n\} = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ e^{\alpha n}, n < 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$F_{II}(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{\alpha n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

$$F_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$F_-(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \frac{z}{e^{\alpha}} + \frac{z^2}{e^{2\alpha}} + \frac{z^3}{e^{3\alpha}} + \frac{z^4}{e^{4\alpha}} + \ldots$$

$$= \frac{z/e^{\alpha}}{1 - z/e^{\alpha}} = \frac{z}{e^{\alpha} - z} = -\frac{z}{z - e^{\alpha}}, \quad \left|\frac{z}{e^{\alpha}}\right| < 1 \Rightarrow |z| < e^{\alpha}$$

$$F_{II}(z) = -\frac{z}{z-e^{\alpha}} + \frac{z}{z-1} = \frac{-z(z-1) + z(z-e^{\alpha})}{(z-1)(z-e^{\alpha})} = \frac{-z^2 + z + z^2 - ze^{\alpha}}{(z-1)(z-e^{\alpha})} = \frac{z(1-e^{\alpha})}{(z-1)(z-e^{\alpha})}$$

Polos de ordem 1:

$$z = 1, \; z = e^{\alpha}.$$

Região de convergência de $F_{II}(z): 1 < |z| < e^{\alpha}$.

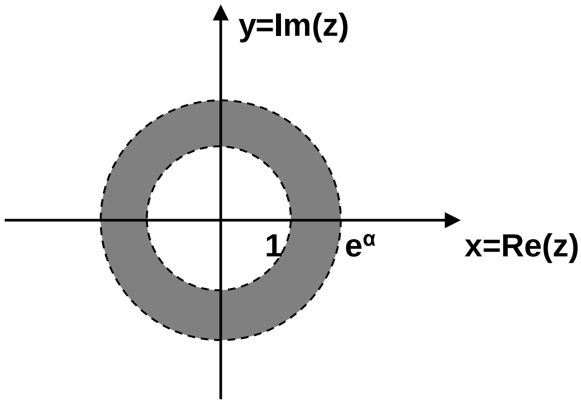



**Figura 5.8**: Anel de convergência de $F_{II}(z) = F_{-}(z) + F_{+}(z): 1 < |z| < e^{\alpha}$.

## Exercícios

01. Seja $\{y_n\}$ uma sequência definida por $\{y_n\} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & n < 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 0 \end{cases}$.

Determine: a) $\mathcal{Z}\{y_n\}$;

Resposta: $\mathcal{Z}\{y_n\} = -\dfrac{2z}{2z+1} + \dfrac{8z}{4z-1} = -\dfrac{z}{z+\frac{1}{2}} + \dfrac{2z}{z-\frac{1}{4}}$

b) os polos de $F(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$ e a ordem dos mesmos;

Resposta: polos de ordem 1: $z = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$

c) a região de convergência de $F(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$.

Resposta: $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$

02. Seja $\{y_n\}$ uma seqüência definida por $\{y_n\} = \begin{cases} n - 2.3^n, & n \geq 0 \\ 3(-4)^n, & n < 0 \end{cases}$.

Determine: a) $\mathcal{Z}\{y_n\}$;

Resposta: $\mathcal{Z}\{y_n\} = -\dfrac{3z}{z+4} + \dfrac{z}{(z-1)^2} - \dfrac{2z}{z-3}$

b) a região de convergência de $F(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$;

Resposta: $3 < |z| < 4$

c) os polos de $F(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$ e a ordem dos mesmos.

Resposta: polos de ordem 1: $z = -4$, $z = 3$

polo de ordem 2: $z = 1$

### *5.10 – Exercícios resolvidos*

01. Seja $\{y_n\} = \begin{cases} \left(-\dfrac{4}{5}\right)^{-n}, & n < 0 \\ n^4, & n \geq 0 \end{cases}$.

a) Determine $F(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$.

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} y_{-n} z^n}_{\text{I}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}}_{\text{II}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n z^n}_{\text{I}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n^4 z^{-n}}_{\text{II}} \qquad (5.10.1)$$

**I**: série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}z\right)^n = \frac{-\frac{4}{5}z}{1-\left(-\frac{4}{5}z\right)} = -\frac{4z}{4z+5} \text{ se } \left|-\frac{4}{5}z\right| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{5}{4} \text{ (RDC)}$$

RDC: região de convergência

**II**: transformada $\mathcal{Z}$ unilateral

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^4 z^{-n} = \mathcal{Z}\{n.\underbrace{n^3}_{f_n}\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z^3+4z^2+z}{(z-1)^4}\right]$$

$$= -z\frac{(3z^2+8z+1)(z-1)^4 - (z^3+4z^2+z)4(z-1)^3(1)}{(z-1)^8}$$

$$= -z\frac{(3z^2+8z+1)(z-1) - (4z^3+16z^2+4z)}{(z-1)^5}$$

$$= -z\frac{3z^3-3z^2+8z^2-8z+z-1-4z^3-16z^2-4z}{(z-1)^5}$$

$$= \frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5}$$

RDC: $|z| > 1$ uma vez que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|n^4|}{|(n+1)^4|} = 1$

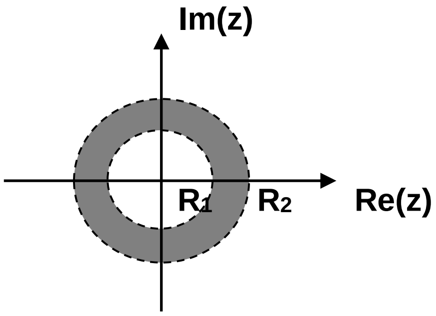
Retornando-se a (5.10.1):

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = F(z) = -\frac{4z}{4z+5} + \frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5} \text{ se } 1 < |z| < \frac{5}{4}$$

b) Represente algebricamente e geometricamente a região de convergência de $F(z)$.

$1 < |z| < \frac{5}{4}$

$R_1 = 1, R_2 = \frac{5}{4}$




c) Identifique e classifique as singularidades de $F(z)$.

$z = -\frac{5}{4}$: polo simples (polo de ordem 1)

$z = 1$: polo de ordem 5

02. Calcule as transformadas a seguir, identificando os polos e suas ordens.

a) $\mathcal{Z}\{n\,a^n\}$

$$\mathcal{Z}\{n\,f_n\} = -z\frac{d}{dz}F(z)$$

$$\mathcal{Z}\{n\,a^n\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-a}\right] = -z\frac{z-a-z}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

Polo duplo: $z = a$.

b) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{5}{(z-3)^2}\right\}$

$$\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = \frac{F(z)}{z^k},\ \mathcal{Z}\{n\,a^n\} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{5}{(z-3)^2}\right\} = 5\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{3z}\frac{3z}{(z-3)^2}\right\} = \frac{5}{3}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z}\frac{3z}{(z-3)^2}\right\}$$

$$= \frac{5}{3}(n-1)3^{n-1}$$

Polo simples: $z = 0$; Polo duplo: $z = 3$.

### *5.11 – Exercícios complementares*

01. Calcular:

a) $\mathcal{Z}\left\{2e^{-n}+3e^{-0.5n}\right\}$; Resposta: $F(z)=\dfrac{2z}{z-\frac{1}{e}}+\dfrac{3z}{z-\frac{1}{\sqrt{e}}}$

b) $\mathcal{Z}\left\{5(0,8)^{n}-4(1,1)^{n}\right\}$; Resposta: $F(z)=\dfrac{5z}{z-0,8}-\dfrac{4z}{z-1,1}$

c) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{5+3z^{-2}-z^{-3}+2z^{-5}\right\}$; Resposta: $f_n=5\delta(n)+3\delta(n-2)-\delta(n-3)+2\delta(n-5),\ n\geq 0$

d) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{8z+4}{z^2-2z-3}\right\}$. Resposta: $f_n=\begin{cases}0,\ n=0\\(-1)^{n-1}+7(3)^{n-1},\ n>0\end{cases}$

02. Seja $\{y_n\}$ uma sequência definida por $\{y_n\}=\begin{cases}\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n,\ n<0\\ n^2-n+2^{-n}+1,\quad n\geq 0\end{cases}$.

Determine: a) $\mathcal{Z}\{y_n\}$;

Resposta: $\mathcal{Z}\{y_n\}=-\dfrac{3z}{3z+4}+\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}-\dfrac{z}{(z-1)^2}+\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$

b) os polos de $F(z)=\mathcal{Z}\{y_n\}$ e a ordem dos mesmos;

Resposta: polos de ordem 1: $z=-\dfrac{4}{3}$, $z=\dfrac{1}{2}$; polo de ordem 3: $z=1$

c) a região de convergência de $F(z)=\mathcal{Z}\{y_n\}$.

Resposta: $1<|z|<\dfrac{4}{3}$

03. Seja $\{y_n\}=\begin{cases}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{2-n},\ n<0\\ \left[(-1)^{n+1}-1\right]\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-n},\ n\geq 0\end{cases}$.

Determine $F(z)=\mathcal{Z}\{y_n\}$, identifique as singularidades de $F(z)$ e represente algebricamente e geometricamente a região de convergência de $F(z)$.

Resposta: $\mathcal{Z}\{y_n\} = F(z) = -\dfrac{9}{25}\dfrac{z}{z+\dfrac{5}{3}} - \dfrac{2z^2}{\left(z+\dfrac{3}{2}\right)\left(z-\dfrac{3}{2}\right)}$

Polos simples (de ordem 1): $z=-\dfrac{5}{3}, z=-\dfrac{3}{2}, z=\dfrac{3}{2}$

Anel de convergência: $\dfrac{3}{2} < |z| < \dfrac{5}{3}$

04. Seja o sinal discreto $x[n] = n\,e^{-2n} * (-7)^{-n}$.

Determine: a) $\mathcal{Z}\{x[n]\}$;

Resposta: $\dfrac{1}{e^2}\dfrac{z^2}{\left(z-\dfrac{1}{e^2}\right)^2\left(z+\dfrac{1}{7}\right)}$

b) os polos de $F(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ e a ordem dos mesmos;

Resposta: polo de ordem 1: $z=-\dfrac{1}{7}$; polo de ordem 2: $z=\dfrac{1}{e^2}$

c) a região de convergência de $F(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$.

Resposta: $|z| > \dfrac{1}{7}$

05. Seja $\{y_n\} = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{1-n}, n<0 \\ \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), n \geq 0 \end{cases}$.

a) Determine $F(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$;

Resposta: $\mathcal{Z}\{y_n\} = F(z) = -\dfrac{9z}{2(3z-2)} + \dfrac{15z}{25z^2+9} = -\dfrac{9z}{2(3z-2)} + \dfrac{3z}{5\left(z-\dfrac{3}{5}i\right)\left(z+\dfrac{3}{5}i\right)}$

b) Identifique as singularidades de $F(z)$ e represente geometricamente a região de convergência de $F(z)$.

Resposta: Polos de ordem 1: $z=\dfrac{2}{3}$, $z=-\dfrac{3}{5}i$, $z=\dfrac{3}{5}i$

Região de convergência: $\dfrac{3}{5} < |z| < \dfrac{2}{3}$

## 7. EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

Define-se neste capítulo uma equação a diferenças lineares e emprega-se as transformadas $\mathcal{Z}$ na solução dessa equação.

### *7.1 – Definição*

Uma equação a diferenças (ou uma fórmula de recorrência) é uma relação entre os termos de uma sucessão $\{y_n\} = \{y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\}$.

**Exemplo**

$$\begin{cases} (n+2)y_{n+1} - 3y_n = n^2 + 2 \\ y_0 = 0 \end{cases} \tag{7.1.1}$$

Em (7.1.1) tem-se uma equação a diferenças linear, não homogênea, com um coeficiente variável e outro constante, sujeita à condição inicial $y_0 = 0$.

$$\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow 2y_1 - 3y_0 = 2 \Rightarrow y_1 = 1 \\ n = 1 \Rightarrow 3y_2 - 3y_1 = 3 \Rightarrow y_2 = 2 \\ n = 2 \Rightarrow 4y_3 - 3y_2 = 6 \Rightarrow y_3 = 3 \\ n = 3 \Rightarrow 5y_4 - 3y_3 = 11 \Rightarrow y_4 = 4 \\ n = 4 \Rightarrow 6y_5 - 3y_4 = 18 \Rightarrow y_5 = 5 \\ n = 5 \Rightarrow 7y_6 - 3y_5 = 27 \Rightarrow y_6 = 6 \\ \vdots \end{array}$$

$$\{y_n\} = n \tag{7.1.2}$$

Em (7.1.2) tem-se uma *solução particular* de (7.1.1). A *solução geral* de (7.1.1) é dada por

$$\{y_n\} = n + y_0 \frac{3^n}{(n+1)!}. \tag{7.1.3}$$

**Questão**

Como determinar a solução (7.1.2) ou a solução (7.1.3)?

**Observaçóes**

1ª) Pode-se reescrever (7.1.1) como $(n+1)y_n - 3y_{n-1} = (n-1)^2 + 2$.

2ª) A estratégia usada para determinar (7.1.2) não dá garantias acerca do comportamento dos termos da sequência.

### *7.2 – Equações a diferenças lineares*

**1ª ordem**: $a_n y_{n+1} + b_n y_n = f_n$

**2ª ordem**: $a_n y_{n+2} + b_n y_{n+1} + c_n y_n = f_n$

**3ª ordem**: $a_n y_{n+3} + b_n y_{n+2} + c_n y_{n+1} + d_n y_n = f_n$

$\vdots$

Se $f_n = 0 \ \forall n \geq 0$, a equação a diferenças linear é *homogênea*. Caso contrário, é não homogênea.

### *7.3 – Solução de equações a diferenças lineares por intermédio da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral*

Propriedade da translação: $\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k \left[ F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right]$ e $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = \dfrac{F(z)}{z^k}$.

**<u>Exemplos</u>**

1º) $$\begin{cases} y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 3^n \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \tag{7.3.1}$$

Notação: $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral à equação a diferenças lineares de segunda ordem em (7.3.1) e usando-se as condições iniciais, tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} + 3\,\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} + 2\,\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{3^n\}$$

$$z^2\left[ Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z} \right] + 3z\left[Y(z) - y_0\right] + 2Y(z) = \frac{z}{z-3}$$

$$z^2Y(z) - z^2 + 3zY(z) - 3z + 2Y(z) = \frac{z}{z-3}$$

$$(z^2 + 3z + 2)Y(z) = \frac{z}{z-3} + z^2 + 3z$$

$$(z+1)(z+2)Y(z) = \frac{z}{z-3} + z^2 + 3z$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z-3)} + \frac{z^2 + 3z}{(z+1)(z+2)}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z-3)} + \frac{z(z+3)}{(z+1)(z+2)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z-3)} + \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} \qquad (7.3.2)$$

Decompondo-se (7.3.2) em frações parciais:

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)(z-3)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-3}$$

$$\lim_{z\to-1} \frac{1}{(z+1)(z+2)(z-3)}(z+1) = \lim_{z\to-1} \frac{A}{z+1}(z+1) + \lim_{z\to-1} \frac{B}{z+2}(z+1) + \lim_{z\to-1} \frac{C}{z-3}(z+1)$$

$$\frac{1}{-4} = A + 0 + 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{z\to-2} \frac{1}{(z+1)(z+2)(z-3)}(z+2) = \lim_{z\to-2} \frac{A}{z+1}(z+2) + \lim_{z\to-2} \frac{B}{z+2}(z+2) + \lim_{z\to-2} \frac{C}{z-3}(z+2)$$

$$\frac{1}{5} = 0 + B + 0 \Rightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{z\to3} \frac{1}{(z+1)(z+2)(z-3)}(z-3) = \lim_{z\to3} \frac{A}{z+1}(z-3) + \lim_{z\to3} \frac{B}{z+2}(z-3) + \lim_{z\to3} \frac{C}{z-3}(z-3)$$

$$\frac{1}{20} = 0 + 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)(z-3)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{20}\frac{1}{z-3}$$

$$\frac{z+3}{(z+1)(z+2)} = \frac{D}{z+1} + \frac{E}{z+2}$$

$$\lim_{z\to-1} \frac{z+3}{(z+1)(z+2)}(z+1) = \lim_{z\to-1} \frac{D}{z+1}(z+1) + \lim_{z\to-1} \frac{E}{z+2}(z+1)$$

$$\frac{2}{1} = D + 0 \Rightarrow D = 2$$

$$\lim_{z\to-2} \frac{z+3}{(z+1)(z+2)}(z+2) = \lim_{z\to-2} \frac{D}{z+1}(z+2) + \lim_{z\to-2} \frac{E}{z+2}(z+2)$$

$$\frac{1}{-1} = 0 + E \Rightarrow E = -1$$

$$\frac{z+3}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z-3)} + \frac{z+3}{(z+1)(z+2)}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{20}\frac{1}{z-3} + \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$Y(z) = -\frac{1}{4}\frac{z}{z+1} + \frac{1}{5}\frac{z}{z+2} + \frac{1}{20}\frac{z}{z-3} + 2\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{7}{4}\frac{z}{z+1} - \frac{4}{5}\frac{z}{z+2} + \frac{1}{20}\frac{z}{z-3} \qquad (7.3.3)$$

$z=-1$, $z=-2$ e $z=3$ são polos de ordem 1 de $Y(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral inversa a (7.3.3), obtém-se

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \frac{7}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\} - \frac{4}{5}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+2}\right\} + \frac{1}{20}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\}. \qquad (7.3.4)$$

Lembrando-se que $\mathcal{Z}\{a^n\} = \dfrac{z}{z-a}$, pode-se reescrever (7.3.4) como:

$$\{y_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \frac{7}{4}(-1)^n - \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{1}{20}3^n,\ n \geq 0;$$

$$\{y_n\} = \{1,0,-1,6,\ldots\}.$$

2º) $y_n - \frac{3}{4}y_{n-1} + \frac{1}{8}y_{n-2} = \delta(n)$ (7.3.5)

**Observação**: Não se tem em (7.3.5) um problema de valor inicial.

Notação: $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral à equação a diferenças lineares de segunda ordem (7.3.5), tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{y_n\} - \frac{3}{4}\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} + \frac{1}{8}\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} = \mathcal{Z}\{\delta(n)\}$$

$$Y(z)-\frac{3}{4}\frac{Y(z)}{z}+\frac{1}{8}\frac{Y(z)}{z^2}=1$$

$$8z^2Y(z)-6zY(z)+Y(z)=8z^2$$

$$8\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)Y(z)=8z^2$$

$$Y(z)=\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\,. \tag{7.3.6}$$

Decompondo-se (7.3.6) em frações parciais:

$$\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{z-\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\left(z-\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{A}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}\left(z-\frac{1}{2}\right)+\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{B}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}\left(z-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=A+0\Rightarrow A=2$$

$$\lim_{z\to\frac{1}{4}}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\left(z-\frac{1}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{4}}\frac{A}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}\left(z-\frac{1}{4}\right)+\lim_{z\to\frac{1}{4}}\frac{B}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}\left(z-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=0+B\Rightarrow B=-1$$

$$\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{z-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{z-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z-\frac{1}{4}}$$

$$Y(z)=2\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\,. \tag{7.3.7}$$

$z=\frac{1}{2}$ e $z=\frac{1}{4}$ são polos de ordem 1 de $Y(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral inversa a (7.3.7), obtém-se

$$\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = 2\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right\}. \qquad (7.3.8)$$

Lembrando-se que $\mathcal{Z}\{a^n\} = \dfrac{z}{z-a}$, pode-se reescrever (7.3.8) como

$$\{y_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n, n \geq 2.$$

$$y_0 = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty}\left[2\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right] = 2-1=1$$

$$y_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

Usando-se $n=2$, $y_0 = 1$ e $y_2 = \dfrac{7}{16}$ em (7.3.5), obtém-se $y_1 = \dfrac{3}{4}$.

<u>**Observação**</u>: basta lembrar que $y_n = 0$ para $n < 0$.

$$\{y_n\} = \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{7}{16}, \frac{15}{64}, \frac{31}{256}, \ldots\right\}$$

3º) $$\begin{cases} u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \end{cases} \qquad (7.3.9)$$

Notação: $\mathcal{Z}\{u_n\} = U(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral à equação a diferenças lineares de terceira ordem em (7.3.9) e usando-se as condições iniciais, tem-se que:

$$\mathcal{Z}\{u_{n+3}\} - \mathcal{Z}\{u_{n+2}\} - \mathcal{Z}\{u_{n+1}\} + \mathcal{Z}\{u_n\} = \mathcal{Z}\{0\}$$

$$z^3\left[U(z)-\sum_{n=0}^{2}u_n z^{-n}\right]-z^2\left[U(z)-\sum_{n=0}^{1}u_n z^{-n}\right]-z\left[U(z)-\sum_{n=0}^{0}u_n z^{-n}\right]+U(z)=0$$

$$z^3\left[U(z)-u_0-\frac{u_1}{z}-\frac{u_2}{z^2}\right]-z^2\left[U(z)-u_0-\frac{u_1}{z}\right]-z\left[U(z)-u_0\right]+U(z)=0$$

$$z^3U(z)-z^2-2z-z^2U(z)+z-zU(z)+U(z)=0$$

$$\left(z^3-z^2-z+1\right)U(z)=z^2+z$$

$$(z-1)\left(z^2-1\right)U(z)=z(z+1)$$

$$U(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)(z-1)(z+1)}$$

$$U(z)=\frac{z}{(z-1)^2}\,. \tag{7.3.10}$$

$z=1$ é um polo de ordem 2 de $U(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral inversa a (7.3.10), obtém-se:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\}$$

$$\{u_n\}=\mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\}=n,\ n\geq 0$$

$$\{u_n\}=\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}.$$

## Exercícios

01. Usando transformadas $\mathcal{Z}$, solucione a equação a diferenças

$$y_{n+2}-6y_{n+1}+5y_n=3$$

sujeita às condições iniciais $y_0=0$ e $y_1=1$. Escreva os cinco primeiros termos da sequência.

Resposta: $\{y_n\}=\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}=\frac{7}{16}5^n-\frac{3}{4}n-\frac{7}{16},\ n\geq 0$.

02. Utilizando as transformadas $\mathcal{Z}$, solucione a equação a diferenças

$$y_n-4y_{n-1}+3y_{n-2}=2^n.$$

Resposta: $\{y_n\}=\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}=\frac{1}{2}3^{n+2}-4(2)^n+\frac{1}{2},\ n\geq 0$.

03. Utilizando as transformadas $\mathcal{Z}$, solucione a equação a diferenças

$$\begin{cases} y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = \delta(n-1) \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases}.$$

Resposta: $\{y_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = -\frac{1}{12}\delta(n-1) + \frac{33}{28}4^{n-1} + \frac{19}{21}(-3)^{n-1},\ n \geq 1.$

04. Utilizando as transformadas $\mathcal{Z}$, solucione a equação a diferenças

$$3y_n + 27y_{n-2} = 3^n.$$

Resposta: $\frac{1}{6}3^n + \frac{1-i}{12}(3i)^n + \frac{1+i}{12}(-3i)^n.$

### *7.4 – Exercícios resolvidos*

01. Um sistema é descrito pela equação recursiva

$$y_{n+3} + 3y_{n+2} + 4y_{n+1} + 12y_n = g_n \, ,$$

sujeita às condições iniciais $y_0 = y_1 = 0$ e $y_2 = 2$.

a) Utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e suas propriedades, determine a resposta $\{y_n\}$ do sistema quando $g_n = (-2)^n$.

**Notação**: $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral à equação a diferenças:

$$z^3 Y(z) - y_2 z + 3z^2 Y(z) + 4zY(z) + 12Y(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$\underbrace{\left(z^3 + 3z^2 + 4z + 12\right)}_{P(z)} Y(z) = \frac{z}{z+2} + 2z = \frac{z + 2z^2 + 4z}{z+2} = \frac{2z^2 + 5z}{z+2} = \frac{z(2z+5)}{z+2} \, .$$

Como $P(-3) = 0 \Rightarrow P(z) = (z+3)\left(z^2+4\right) = (z+2)(z+2i)(z-2i)$. Assim:

$$(z+3)(z+2i)(z-2i)Y(z) = \frac{z(2z+5)}{z+2} \Rightarrow Y(z) = \frac{z(2z+5)}{(z+2)(z+3)(z+2i)(z-2i)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z+5}{(z+2)(z+3)(z+2i)(z-2i)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+3} + \frac{C}{z+2i} + \frac{D}{z-2i} \qquad (7.4.1)$$

$$\lim_{z\to -2} (4.1)(z+2) \Rightarrow A = \frac{1}{(1)(-2+2i)(-2-2i)} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{z\to -3} (4.1)(z+3) \Rightarrow B = \frac{-1}{(-1)(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{1}{9+3} = \frac{1}{13}$$

$$\lim_{z\to -2i} (4.1)(z+2i) \Rightarrow C = \frac{-4i+5}{(-2i+2)(-2i+3)(-4i)} = \frac{-4i+5}{8(i-1)(2+3i)} = \frac{-4i+5}{8(2i-3-2-3i)}$$
$$= \frac{-4i+5}{8(-5-i)} \frac{(-5+i)}{(-5+i)} = \frac{20i+4-25+5i}{8(25+1)} = \frac{-21+25i}{208}$$

$$\lim_{z\to 2i} (4.1)(z-2i) \Rightarrow D = \frac{4i+5}{(2i+2)(2i+3)(4i)} = \frac{4i+5}{8(i+1)(-2+3i)} = \frac{4i+5}{8(-2i-3-2+3i)}$$
$$= \frac{4i+5}{8(-5+i)} \frac{(-5-i)}{(-5-i)} = \frac{-20i+4-25-5i}{8(25+1)} = \frac{-21-25i}{208} \, .$$

Retornando-se a (7.4.1):

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{8}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{13}\frac{1}{z+3}+\frac{-21+25i}{208}\frac{1}{z+2i}+\frac{-21-25i}{208}\frac{1}{z-2i}$$

$$Y(z)=\frac{1}{8}\frac{z}{z+2}+\frac{1}{13}\frac{z}{z+3}+\frac{-21+25i}{208}\frac{z}{z+2i}+\frac{-21-25i}{208}\frac{z}{z-2i}.$$

Como $\{y_n\}=\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$, tem-se que

$$\{y_n\}=\frac{1}{8}(-2)^n+\frac{1}{13}(-3)^n+\frac{-21+25i}{208}(-2i)^n+\frac{-21-25i}{208}(2i)^n,\ n\geq 0.$$

b) Calcule o elemento $y_5$ da sucessão $\{y_n\}$.

$$n=0\Rightarrow y_3+3y_2+4y_1+12y_0=1\Rightarrow y_3+3(2)=1\Rightarrow y_3=-5$$

$$n=1\Rightarrow y_4+3y_3+4y_2+12y_1=-2\Rightarrow y_4+3(-5)+4(2)=-2\Rightarrow y_4=5$$

$$n=2\Rightarrow y_5+3y_4+4y_3+12y_2=4\Rightarrow y_5+3(5)+4(-5)+12(2)=4\Rightarrow y_5=-15$$

$$y_5=-15$$

02. Um sistema é descrito pela equação recursiva

$$y_{n+2}-4y_n=g_n,$$

sujeita às condições iniciais $y_0=0$ e $y_1=1$.

a) Utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e suas propriedades, determine a resposta $\{y_n\}$ do sistema quando $g_n=2^n$.

**Notação**: $\mathcal{Z}\{y_n\}=Y(z)$.

Aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral à equação a diferenças:

$$z^2Y(z)-y_0z^2-y_1z-4Y(z)=\frac{z}{z-2}$$

$$(z^2-4)Y(z)-z=\frac{z}{z-2}\Rightarrow(z^2-4)Y(z)=\frac{z}{z-2}+z\Rightarrow(z^2-4)Y(z)=\frac{z^2-z}{z-2}$$

$$(z+2)(z-2)Y(z)=\frac{z(z-1)}{z-2}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z-1}{(z+2)(z-2)^2}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{(z-2)^2}+\frac{C}{z-2} \tag{7.4.2}$$

$$\lim_{s\to -2}(4.1)(z+2) \Rightarrow A = -\frac{3}{16}$$

$$\lim_{s\to 2}(4.1)(z-2)^2 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$z-1 = -\frac{3}{16}(z-2)^2 + \frac{1}{4}(z+2) + C(z+2)(z-2)$$

$$-1 = -\frac{12}{16} + \frac{2}{4} - 4C \Rightarrow 4C = -\frac{1}{4} + 1 \Rightarrow 4C = \frac{3}{4} \Rightarrow C = \frac{3}{16}.$$

Retornando-se a (7.4.2):

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{3}{16}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{3}{16}\frac{1}{z-2}$$

$$Y(z) = -\frac{3}{16}\frac{z}{z+2} + \frac{1}{4}\frac{z}{(z-2)^2} + \frac{3}{16}\frac{z}{z-2}$$

$$Y(z) = -\frac{3}{16}\frac{z}{z+2} + \frac{1}{4(2)}\frac{2z}{(z-2)^2} + \frac{3}{16}\frac{z}{z-2}$$

Como $y_n = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$, $\mathcal{Z}\{a^n\} = \dfrac{z}{z-a}$ e $\mathcal{Z}\{na^n\} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$, tem-se que

$$\{y_n\} = -\frac{3}{16}(-2)^n + \frac{1}{8}n2^n + \frac{3}{16}2^n, \quad n \geq 0.$$

b) Calcule o elemento $y_{10}$ da sucessão $\{y_n\}$.

$$y_{10} = -\frac{3}{16}(-2)^{10} + \frac{1}{8}(10)2^{10} + \frac{3}{16}2^{10} = -\frac{3}{16}(1024) + \frac{5}{4}(1024) + \frac{3}{16}(1024)$$

$$y_{10} = 1024\left(-\frac{3}{16} + \frac{5}{4} + \frac{3}{16}\right) = 1024\frac{5}{4} = 256(5) = 1280$$

$$y_{10} = 1280$$

### *7.5 – Exercícios complementares*

01. Solucionar a equação a diferenças utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral.

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} - 4y_n = 1 \\ y_o = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

Resposta: $\{y_n\} = -\frac{1}{6} + \frac{7}{15}(4)^n - \frac{3}{10}(-1)^n,\ n \geq 0$.

02. Utilizando as transformadas $\mathcal{Z}$, solucione a equação a diferenças

$$\begin{cases} y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = \delta(n-1) \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases}.$$

Resposta: $\{y_n\} = -\frac{1}{6}\delta(n-1) + \frac{19}{15}3^{n-1} + \frac{9}{10}(-2)^{n-1},\ n \geq 1$.

03. Utilizando as transformadas $\mathcal{Z}$ e suas propriedades, solucione a equação a diferenças

$$y_n + 2y_{n-1} - 24y_{n-2} = 3^{n-2}.$$

Calcule os três primeiros termos da sequência $\{y_n\}$.

Resposta: $\{y_n\} = -\frac{1}{9}3^n + \frac{1}{10}4^n + \frac{1}{90}(-6)^n,\ n \geq 0 \Rightarrow \{y_n\} = \{0,0,1,\ldots\}$.

04. Utilizando as transformadas $\mathcal{Z}$ e suas propriedades, solucione a equação a diferenças

$$y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = 2^{n-2}.$$

Calcule os cinco primeiros termos da sequência $\{y_n\}$.

Resposta: $\{y_n\} = 2^n - n - 1,\ n \geq 0 \Rightarrow \{y_n\} = \{0,0,1,4,11,\ldots\}$.

05. Utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e suas propriedades, determine a resposta $\{y_n\}$ do sistema descrito pela equação recursiva

$$y_n + \frac{5}{3}y_{n-1} - \frac{2}{3}y_{n-2} = g_n,$$

quando o mesmo é excitado por $g_n = 2^{-n}$.

Calcule o primeiro termo da sucessão $\{y_n\}$.

Resposta: $\{y_n\} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{24}{35}(-2)^n$;

$$y_0 = \lim_{z\to\infty} Y(z) = 1.$$

06. Utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e suas propriedades, determine a resposta $\{y_n\}$ do sistema descrito pela equação recursiva

$$3y_n + 27y_{n-2} = g_n,$$

quando o mesmo é excitado por $g_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$.

Calcule os três primeiros termos da sucessão $\{y_n\}$.

Resposta: $\{y_n\} = \frac{1}{6}(3)^n + \frac{1-i}{12}(3i)^n + \frac{i+1}{12}(-3i)^n$, $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{3}, 1, 0, \dots\right\}$.

07. Seja $\{y_n\} = \begin{cases} n^2(-2)^n, & n \geq 0 \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^{-n}\cos(n\pi), & n < 0 \end{cases}$.

a) Determine $F(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$.

Resposta: $\mathcal{Z}\{y_n\} = F(z) = -\frac{z}{z-4} + \frac{2z(2-z)}{(z+2)^3}$, $2 < |z| < 4$.

b) Identifique, classifique e represente no plano de Argand-Gauss as singularidades de $F(z)$.

Resposta: $z = 4$ polo simples; $z = -2$ polo triplo.

c) Represente algebricamente e geometricamente a região de convergência de $F(z)$.

Resposta: $2 < |z| < 4$ (algebricamente).

08. Um sistema é descrito pela equação recursiva

$$y_{n+3} + y_{n+2} + 9y_{n+1} + 9y_n = g_n,$$

sujeita às condições iniciais $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$.

a) Utilizando a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e suas propriedades, determine a resposta $\{y_n\}$ do sistema quando $g_n = 0$.

Resposta: $\{y_n\} = \frac{1-3i}{20}(3i)^n + \frac{1+3i}{20}(-3i)^n - \frac{1}{10}(-1)^n$ .

b) Calcule o elemento $y_6$ da sucessão $\{y_n\}$.

Resposta: $y_6 = -73$.

09. A sequência de Fibonacci tem as seguintes características:

$$\begin{aligned} &y_{n+2} = y_{n+1} + y_n \\ &y_0 = 1 \\ &y_1 = 1 \end{aligned} .$$

Empregando a transformada $\mathcal{Z}$ unilateral e suas propriedades, determine o n-ésimo termo dessa sucessão e calcule alguns termos da mesma.

Resposta: $\{y_n\} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ , $n \geq 0$ ;

$\{y_n\} = \{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots\}$ .

## 8. FORMULÁRIO

### 1. Série de Fourier/Coeficientes de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

### 2. A forma exponencial (ou complexa) da série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

### 3. Identidade de Parseval para séries de Fourier

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\right)$$

### 4. Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx\; e^{-i\alpha x}d\alpha$$

### 5. Transformadas de Fourier

| | |
|---|---|
| $\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$ | $\Im^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$ |
| $\Im_C\{f(x)\} = F_C(\alpha) = \int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx$ | $\Im_C^{-1}\{F_C(\alpha)\} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_C(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha$ |
| $\Im_S\{f(x)\} = F_S(\alpha) = \int_{0}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)dx$ | $\Im_S^{-1}\{F_S(\alpha)\} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_S(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha x)d\alpha$ |

**Tabela 8.1**: Transformadas de Fourier.

## 6. Algumas propriedades das transformadas de Fourier

6.1 - Comportamento de $F(\alpha)$ quando $\alpha \to \pm\infty$

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} F(\alpha) = 0$$

6.2 - Linearidade

$$\Im\{a\,f(x) + b\,g(x)\} = a\,\Im\{f(x)\} + b\,\Im\{g(x)\} = a\,F(\alpha) + bG(\alpha)$$

6.3 - Simetria (dualidade)

$\Im\{F(x)\} = 2\pi\,f(-\alpha)$, se $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

6.4 - Conjugado

$\Im\{\overline{f(x)}\} = \overline{F(-\alpha)}$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

6.5 - Translação (no tempo)

$\Im\{f(x-a)\} = e^{ia\alpha}\,F(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

6.6 - Translação (na freqüência)

$\Im\{e^{iax} f(x)\} = F(\alpha + a)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

6.7 - Similaridade (ou dilatação ou mudança de escala)

$\Im\{f(ax)\} = \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\alpha}{a}\right)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

6.8 - Inversão de tempo

$\Im\{f(-x)\} = F(-\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

6.9 - Convolução

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

$$\Im\{f * g\} = \Im\{f(x)\}\,\Im\{g(x)\} = F(\alpha)G(\alpha)$$

6.10 - Multiplicação (convolução na frequência)

$\Im\{f(x).g(x)\} = \dfrac{1}{2\pi} F(\alpha) * G(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$ e $G(\alpha) = \Im\{g(x)\}$

6.11 - Transformadas de Fourier de derivadas

$$\Im\{f^{(n)}(x)\} = (-i\alpha)^n\,\Im\{f(x)\} = (-i\alpha)^n\,F(\alpha)$$

$$\Im_C\{f''(x)\} = -\alpha^2 \Im_C\{f(x)\} - f'(0) = -\alpha^2 F_C(\alpha) - f'(0)$$

$$\Im_S\{f''(x)\} = -\alpha^2 \Im_S\{f(x)\} + \alpha\,f(0) = -\alpha^2 F_S(\alpha) + \alpha\,f(0)$$

6.12 - Derivadas de transformadas de Fourier

$$\Im\{x^n f(x)\} = (-i)^n F^{(n)}(\alpha), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$$

6.13 - Diferenciação na frequência

$$\Im\{i\, x\, f(x)\} = \frac{d}{d\alpha} F(\alpha), \text{ onde } F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$$

## 7. Identidade de Parseval para integrais de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$\int_0^{\infty} [f(x)]^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [F_C(\alpha)]^2 d\alpha \qquad \int_0^{\infty} [f(x)]^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [F_S(\alpha)]^2 d\alpha$$

## 8. Algumas identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(u)\cos(v) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$

$$\cos(u)\cos(v) = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

$$\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v) = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

## 9. Transformadas de Fourier de algumas funções e distribuições

| $f(x)$ | $F(\alpha)$ |
|---|---|
| $f(x) = \begin{cases} 1, \lvert x\rvert < a \\ 0, \lvert x\rvert > a \end{cases}$ | $\frac{2\operatorname{sen}(a\alpha)}{\alpha}, \alpha \neq 0$ <br> $F(0) = 2a$ |
| $e^{-a\lvert x\rvert}, \operatorname{Re}(a) > 0$ | $\frac{2a}{\alpha^2 + a^2}$ |
| $\frac{1}{x^2 + a^2}, \operatorname{Re}(a) > 0$ | $\frac{\pi}{a} e^{-a\lvert\alpha\rvert}$ |
| $e^{-x}$ | $F_C(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \quad F_S(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$ |
| $e^{-\frac{x^2}{2}}$ | $\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ |

| | |
|---|---|
| $e^{-\frac{ax^2}{2}}, a>0$ | $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\alpha^2}{2a}}$ |
| $e^{-ax}\,u(x), \mathrm{Re}(a)>0,\ u(x-c)=\begin{cases}1, & x>c\\ 0, & x<c\end{cases}$ | $\frac{1}{a-i\alpha}$ |
| $x^n e^{-ax}\,u(x), \mathrm{Re}(a)>0,\ u(x-c)=\begin{cases}1, & x>c\\ 0, & x<c\end{cases}$ | $\frac{n!}{(a-i\alpha)^{n+1}}$ |
| $\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$ | $1$ |
| $1=\lim_{a\to\infty} f(x),\ f(x)=\begin{cases}1, & \lvert x\rvert\leq a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$ | $2\pi\delta(\alpha)$ |
| $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ | $\frac{2i}{\alpha}$ |
| $u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$ | $\pi\delta(\alpha)+\frac{i}{\alpha}$ |
| $e^{iax}$ | $2\pi\delta(\alpha+a)$ |
| $\cos(ax)$ | $\pi[\delta(\alpha+a)+\delta(\alpha-a)]$ |
| $\mathrm{sen}(ax)$ | $i\pi[\delta(\alpha-a)-\delta(\alpha+a)]$ |
| $\cos(ax)\,u(x)$ | $\frac{\pi}{2}[\delta(\alpha+a)+\delta(\alpha-a)]+\frac{i\alpha}{\alpha^2-a^2}$ |
| $\mathrm{sen}(ax)\,u(x)$ | $\frac{i\pi}{2}[\delta(\alpha-a)-\delta(\alpha+a)]-\frac{a}{\alpha^2-a^2}$ |
| $\int_{-\infty}^{x} f(\kappa)d\kappa$ | $\pi F(0)\delta(\alpha)+\frac{i\,F(\alpha)}{\alpha}$ |

**Tabela 8.2**: Transformadas de Fourier de algumas funções e distribuições.

## 10. Transformada de Laplace unilateral

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(s)e^{st}ds$$

## 11. Algumas propriedades da transformada de Laplace unilateral

11.1 - Comportamento de $F(s)$ quando $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

11.2 - Linearidade

$$\mathcal{L}\{a\,f(t) + b\,g(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

11.3 - Primeira propriedade de translação

$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

11.4 - Segunda propriedade de translação

$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, com $u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

11.5 - Similaridade (ou mudança de escala)

$\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

11.6 - Transformada de Laplace de derivadas

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \ldots - s\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

11.7 - Transformada de Laplace de integrais

$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

11.8 - Derivadas de transformadas de Laplace (multiplicação por $t^n$)

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

11.9 - Integrais de transformadas de Laplace (divisão por $t$)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du, \text{ desde que } \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} \text{ exista}$$

11.10 - Convolução

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du$$

$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

11.11 - Valor inicial

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

11.12 - Valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

11.13 - Transformada de Laplace de funções periódicas

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ , com f(t) periódica de período fundamental T

11.14 - Fórmula de desenvolvimento de Heaviside

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{\frac{d}{ds}Q(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

## 12. Transformada de Laplace unilateral de algumas funções e distribuições

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a},\ \mathrm{Re}(s) > a$ |
| $t^{n}$ | $\frac{n!}{s^{n+1}},\ \mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2},\ \mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $\mathrm{sen}(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2},\ \mathrm{Re}(s) > 0$ |
| $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2},\ \mathrm{Re}(s) > \lvert a\rvert$ |
| $\mathrm{senh}(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2},\ \mathrm{Re}(s) > \lvert a\rvert$ |
| $e^{iat}$ | $\frac{1}{s - ia}$ |
| $\ln(t)$ | $\frac{1}{s}[\Gamma'(1) - \ln(s)],\ \Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$ |

| | |
|---|---|
| $\mathrm{Si}(t)=\int_0^t \frac{\mathrm{sen}(u)}{u}du$ | $\frac{1}{s}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(s)\right]=\frac{1}{s}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$ |
| $N(t)$ | 0 |
| $u(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$ | $\frac{e^{-as}}{s}$ |
| $\delta(t-a)=\begin{cases}\infty, & t=a\\ 0, & t\ne a\end{cases}$ | $e^{-as}$ |

**Tabela 8.3**: Transformada de Laplace unilateral de algumas funções e distribuições.

## 13. Transformadas $\mathcal{Z}$ unilateral e bilateral

$$\mathcal{Z}\{f_n\}=F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \qquad \mathcal{Z}_{II}\{f_n\}=F_{II}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Raio de convergência R de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ :

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{ou} \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Região de convergência da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral: $|z|>\frac{1}{R}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\{f_n\}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)z^{n-1}dz$$

## 14. Algumas propriedades da transformada $\mathcal{Z}$ unilateral

14.1 - Linearidade

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^{\ell} c_i f_{i,n}\right\}=\sum_{i=0}^{\ell} c_i F_i(z)$$

14.2 - Translação (ou deslocamento)

$$\mathcal{Z}\{f_{n+k}\}=z^k\left[F(z)-\sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}\right]$$

$\mathcal{Z}\{f_{n-k}\}=z^{-k}F(z)=\frac{F(z)}{z^k}$, onde $F(z)=\mathcal{Z}\{f_n\}$

14.3 - Similaridade

$$\mathcal{Z}\{\lambda^n f_n\} = F\left(\frac{z}{\lambda}\right),\ \text{onde}\ F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$$

14.4 - Convolução

$$\{f_n\} * \{g_n\} = \{f_n * g_n\} = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$$

$$\mathcal{Z}\{f_n * g_n\} = F(z)G(z),\ \text{onde}\ F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}\ \text{e}\ G(z) = \mathcal{Z}\{g_n\}$$

14.5 - Diferenciação da transformada de uma sequência

$$\mathcal{Z}\{n f_n\} = -z\frac{d}{dz}F(z),\ \text{onde}\ F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$$

14.6 - Integração da transformada de uma sequência

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{f_n}{n}\right\} = \int_z^{\infty} \frac{F(u)}{u}\,du \quad , \ f_0 = 0$$

14.7 - Valor inicial

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f_0$$

14.8 - Valor final

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = \lim_{n\to\infty} f_n$$

## 15. Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral de algumas sequências

| $f_n$ | $F(z)$ |
|---|---|
| $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ | $1$ |
| $1$ | $\frac{z}{z-1},\ \lvert z\rvert > 1$ |
| $e^{an}$ | $\frac{z}{z-e^a},\ \lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$ |
| $a^n$ | $\frac{z}{z-a},\ \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $\operatorname{sen}(\beta n)$ | $\frac{z\operatorname{sen}(\beta)}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1},\ \lvert z\rvert > 1$ |
| $\cos(\beta n)$ | $\frac{z[z-\cos(\beta)]}{z^2 - 2z\cos(\beta) + 1},\ \lvert z\rvert > 1$ |

| | |
|---|---|
| $\operatorname{senh}(\beta n)$ | $\dfrac{z\,\operatorname{senh}(\beta)}{z^2-2z\cosh(\beta)+1},\ \lvert z\rvert > \max\left(e^{\beta}, e^{-\beta}\right)$ |
| $\cosh(\beta n)$ | $\dfrac{z[z-\cosh(\beta)]}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}, \lvert z\rvert > \max\left(e^{\beta}, e^{-\beta}\right)$ |
| $n$ | $\dfrac{z}{(z-1)^2}, \lvert z\rvert > 1$ |
| $n^2$ | $\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}, \lvert z\rvert > 1$ |
| $n^3$ | $\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}, \lvert z\rvert > 1$ |

**Tabela 8.4**: Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral de algumas sequências.

## REFERÊNCIAS


[1] **ÁVILA**, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] **BOYCE**, W.E.; **DIPRIMA**, R.C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[3] **FIGUEIREDO**, D.G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[4] **HAYKIN**, S.; **VEEN**, B. *Sinais e sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[5] **HSU**, H.P. *Sinais e sistemas*. Porto Alegre: Bookman, 2004.

[6] **IÓRIO**, V.M. *EDP Um curso de graduação*. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

[7] **KAPLAN**, W. *Cálculo avançado*. Vol. 2. São Paulo: Edgard Blücher, 1972.

[8] **KREYSZIG**, E. *Matemática superior*. Vol. 3. Rio de Janeiro: LTC, 1984.

[9] **OPPENHEIM**, A.V.; **WILLSKY**, A.S.; **NAWAB**, S.H. *Signals & systems*. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

[10] **PALIOURAS**, J.D. *Complex variables for scientists and engineers*. New York: Macmillan Publishing Co., 1975.

[11] **SPIEGEL**, M.R.; **WREDE**, R.C. *Cálculo avançado*. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

[12] **SPIEGEL**, M.R. *Schaum's outline of Fourier analysis with applications to boundary value problems.* McGraw-Hill, 1974.

[13] **SPIEGEL**, M.R. *Schaum's Outline of Laplace Transforms*. McGraw-Hill, 1965.

[14] **SPIEGEL**, M.R. *Variáveis complexas*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972.

[15] **STEWART**, J. *Cálculo*. Vol. 1 e 2. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

**[16] TROFINO**, A. *Sistemas lineares*. http://www.das.ufsc.br/~trofino

**[17] VICH**, R. *Z transform theory and applications*. Praga: SNTL – Publishers of Technical Literature, 1987.

**[18] ZILL**, D.G.; **CULLEN**, M.R. *Equações diferenciais*. Vol. 1 e 2. São Paulo: Makron Books, 2005.