O limite trigonométrico fundamental

Meta da aula

- Continuar a apresentação de limites de funções.

Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular limites usando o limite trigonométrico fundamental.

Introdução

Este é um bom momento para fazer um balanço dos conteúdos que você aprendeu nas três aulas anteriores. Em outras palavras, quais conceitos novos você conheceu? Quais limites você é ser capaz de calcular? Quais serão os próximos passos? Bem, vejamos.

Em primeiro lugar, você deve ter uma clara idéia do significado da frase matemática

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

inclusive de sua interpretação geométrica.

Isso cobre uma boa parte do conteúdo teórico apresentado, digamos assim. Do ponto de vista prático, você deve saber que a partir das propriedades elementares dos limites de funções, se $p(x)$ é uma função polinomial, então

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \big(2x^2 - x - 2\big) = 2 - \sqrt{2}.$$

Mais ainda, você já deve dar conta de algumas complicações, tais como calcular

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{t\to 2} \frac{\sqrt{t+2} - 2}{t - 2}.$$

Praticando bem, você deve ter encontrado as respostas 3 e 1/4.

Finalmente, você deve estar fluente na linguagem dos limites laterais.

Você deve ter notado que as funções com que temos lidado até agora são, essencialmente, funções algébricas. Veja, as funções algébricas são aquelas funções cujas leis de definição envolvem um número finito de operações elementares, além das inversas de funções que podem ser assim construídas. Por exemplo, as funções

$$f(x) = \frac{3x - 7}{2x + 1} \qquad \text{e} \qquad g(x) = (2x + 5)^{2/3}$$

são funções algébricas.

Muito bem, está na hora de incluirmos mais algumas funções no nosso repertório de exemplos. As principais candidatas são as funções trigonométricas, que já freqüentaram nossas aulas, pelo menos em rápidas aparições nos exemplos. Essas funções, além das funções exponencial e logaritmo, cujas principais propriedades você aprendeu no Pré-Cálculo, formarão a quase totalidade de nossos exemplos.

Essas funções, trigonométricas, exponencial e logaritmo, são chamadas transcendentes para diferenciá-las das funções algébricas. Esse nome é usado porque elas *transcendem* o universo das funções algébricas.

Para lidarmos com essas funções, chamadas **transcendentes**, precisaremos de novas informações sobre os limites.

Veja, agora, o que queremos estabelecer nesta aula. Vamos mostrar que as funções seno e cosseno são bem comportadas em relação ao limite, isto é, vamos mostrar que, para todo número real $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

Isso parece pouco, mas não é. Nós já usamos essas informações em alguns exemplos, nas aulas anteriores. Tudo o que você aprendeu sobre limites mais o que você já conhece de funções trigonométricas devem levá-lo a crer na veracidade dessas afirmações. Agora temos a oportunidade de prová-las.

Muito bem, uma vez que dispomos dessas informações, passaremos a lidar com problemas tais como calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}.$$

Veja, temos duas indeterminações, uma vez que os limites dos numeradores e dos denominadores são iguais a zero. A técnica de que dispomos até o momento para lidar com tais problemas é a fatoração e a simplificação algébrica, que não pode ser usada nesses casos, uma vez que as funções envolvidas são transcendentes.

Como sair dessa situação? A resposta, em muitos casos, está num limite muito especial, chamado limite trigonométrico fundamental. Ele funcionará como uma simplificação, nesses casos. Vamos mostrar que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

Você aprenderá a usar esse limite para levantar várias indeterminações que envolvem funções trigonométricas.

Agora que definimos a agenda da aula, vamos trabalhar.

Teorema do Confronto

Você está prestes a aprender uma poderosa técnica de cálculo de limites. Ela lhe será útil em muitas situações. Em linhas gerais, o Teorema do Confronto afirma que, se uma função estiver – nas vizinhanças de um dado ponto – *pinçada* por outras duas funções que tenham o mesmo limite nesse tal ponto, então ela terá o mesmo comportamento neste ponto – elas terão o mesmo limite. Veja, novamente, com mais detalhes.

Teorema do Confronto

Sejam f, g e h funções tais que, para um certo número a, existe um número $r > 0$, tal que

$$(a - r,\, a) \cup (a,\, a + r) \subset \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g) \cap \operatorname{Dom}(h)$$

e, para todo $x \in (a - r,\, a) \cup (a,\, a + r)$,

$$f(x) \geq g(x) \geq h(x).$$

Nessas condições, se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

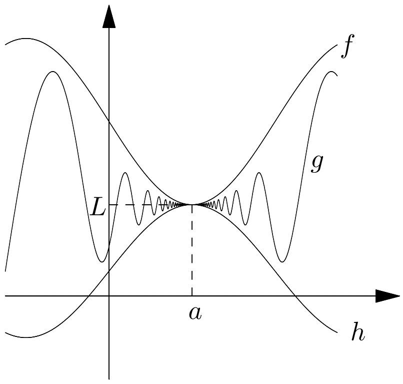

Figura 4.1

Gráficos de funções f, g e h, tais que $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$.

As funções f e h limitam, superior e inferiormente, a função g. Como ambas têm limite L, quando x tende a a, o mesmo ocorre com f.

Há uma versão gastronômica para o nome desse teorema – Teorema do Sanduíche. Seja lá qual for a sua escolha de nome, você verá que esse teorema é muito útil.

Veja como podemos aplicá-lo, no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.

Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que, se $|x-3| < 2$, então

$$x^2 - 6x + 10 \;\leq\; g(x) \;\leq\; -\frac{x^2}{3} + 2x - 2.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 3} g(x) \;=\; 1.$$

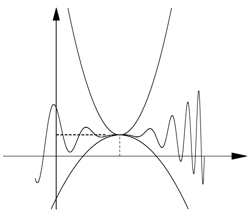

Figura 4.2

Gráficos das funções do Exemplo 4.1.

Realmente, se considerarmos $f(x) = x^2 - 6x + 10$ e $h(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x - 2$, um cálculo direto mostra que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = 1$.

Portanto, o Teorema do Sanduíche garante que $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 1$.

Note que podemos adaptar o teorema para o caso dos limites laterais. Por exemplo, se soubermos que, para algum número a, existe $r > 0$, tal que

$$(a - r,\, a) \;\subset\; \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h)$$

e, para todo $x \in (a - r,\, a)$,

$$f(x) \;\geq\; g(x) \;\geq\; h(x),$$

com $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} h(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a^-} g(x) = L.$$

Com as devidas modificações nas hipóteses, obtemos o mesmo resultado para os limites à direita de a.

Aplicações do Teorema do Confronto

Vamos usar o teorema para calcular alguns limites.

(a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.$

Note que o valor absoluto do seno de um arco é menor ou igual ao valor absoluto do arco. Em outras palavras,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |\operatorname{sen} x| \leq |x|.$$

Veja, na figura a seguir, o que ocorre nas proximidades de zero.

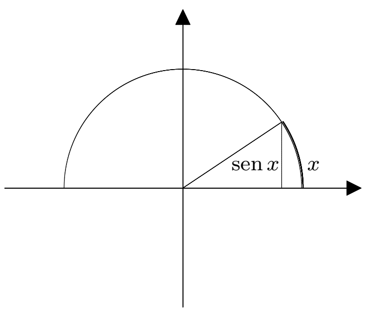

Figura 4.3
Arco x com o respectivo seno.

O semicírculo tem raio igual a um (círculo trigonométrico), enquanto $|\operatorname{sen} x|$ é o comprimento do segmento vertical, $|x|$ é o comprimento do arco. Dessa forma, se $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x|.$$

Como $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ (limites laterais) e $\lim_{x \to 0} 0 = 0$ (limite da função constante igual a zero), obtemos

$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sen} x| = 0.$$

Agora, usamos o seguinte:

Lema

Para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \lim_{x \to a} |\, f(x)\,| = 0.$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.}$$

Acabamos de calcular o primeiro limite de uma função transcendental. Este foi um pequeno grande passo!

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$

Neste caso, usamos o fato de que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$1 \le \cos x \le 1 - |\, x\,|.$$

Veja, na figura a seguir, os gráficos das funções $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x$ e $h(x) = 1 - |\, x\,|$.

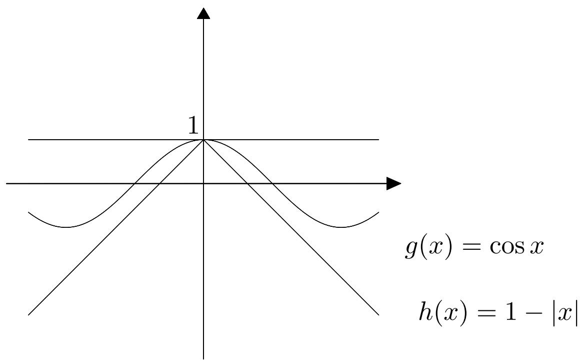

Figura 4.4

Gráficos da função constante 1, cosseno e $h(x) = 1 - |x|$.

Como $\displaystyle\lim_{x \to 0} 1 - |\, x\,| = 1$ e $\displaystyle\lim_{x \to 0} 1 = 1$ (limite da função constante igual a um), obtemos

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \cos x \;=\; 1.}$$

Atividade 4.1.

Esboce os gráficos das funções $f(x) = |\,x\,|$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = -\,|\,x\,|$. Você deverá observar que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$-|\,x\,| \;\leq\; \operatorname{sen} x \;\leq\; |\,x\,|.$$

Use essa informação para mostrar que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x \;=\; 0$.

Mudança de coordenada

Um fato que usaremos com alguma freqüência é que podemos reescrever certos limites, fazendo uma mudança de coordenadas para facilitar o cálculo.

Lema

Considere $a \in \mathbb{R}$ *e seja* $x = t + a$, *equivalente a* $t = x - a$. *Então,* $\lim_{x \to a} f(x) \;=\; L$ *se, e somente se,* $\lim_{t \to 0} f(t + a) \;=\; L$.

A mudança de coordenada corresponde a uma translação da função na direção do eixo Ox.

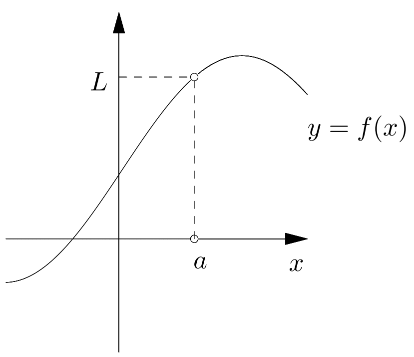

Figura 4.5
Gráfico da função f.

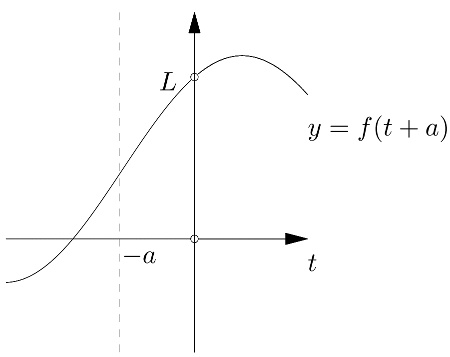

Figura 4.6
Gráfico da função transladada.

Agora estamos em condições de mostrar que as funções trigonométricas seno e cosseno são *bem comportadas* em relação ao limite. Isso quer dizer que, para todo número real $a \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x \to a} \cos x = \cos a\,.}$$

Veja, para mostrar que $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$, usamos a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, as propriedades de limites, e os limites $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, que acabamos de calcular, assim como a mudança de coordenadas $x = t + a$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x &= \lim_{t \to 0} \operatorname{sen}(t+a) = \\
&= \lim_{t \to 0} \left[\operatorname{sen} a \cos t + \cos a \operatorname{sen} t\right] = \\
&= \operatorname{sen} a \left[\lim_{t \to 0} \cos t\right] + \cos a \left[\lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t\right] = \\
&= \operatorname{sen} a.
\end{aligned}$$

Atividade 4.2.

Use a identidade trigonométrica $\cos(a+b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e as propriedades de limites de funções para mostrar, de maneira semelhante ao que acabamos de fazer, que $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$.

O limite trigonométrico fundamental

É hora de lidarmos com novas indeterminações. Como $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$, o limite do quociente, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ é uma indeterminação. Vamos levantar essa indeterminação, mostrando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Na verdade, vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$.

Aplicaremos, mais uma vez, o Teorema do Confronto. Para começar, observe as figuras a seguir.

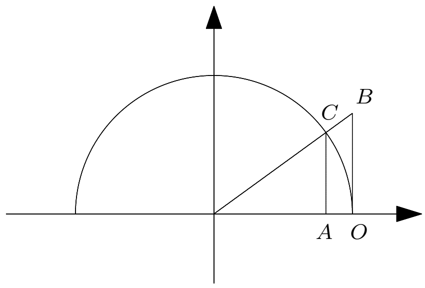

Figura 4.7
Arco OC positivo.

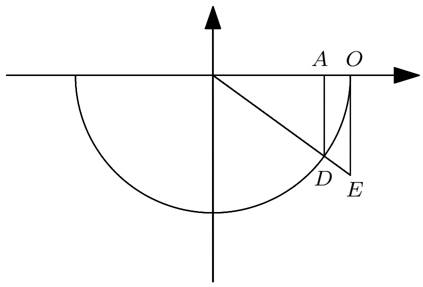

Figura 4.8
Arco OD negativo.

A Figura 4.7 representa a situação em que o arco x, que liga O até C, é positivo, enquanto a Figura 4.8 representa a situação em que o arco x, que liga O até D, é negativo. Como estamos tomando o limite quando x tende a zero, basta que consideremos valores de x suficientemente próximos a zero.

Na situação em que x é positivo (Figura 4.7), o comprimento do segmento OB é a tangente do arco x, enquanto o comprimento do segmento AC é o seno de x. Portanto, se x está suficientemente próximo de zero, com $x > 0$, temos

$$\operatorname{sen} x \ \leq \ x \ \leq \ \operatorname{tg} x.$$

Agora, veja a situação em que x é negativo (Figura 4.8). O comprimento do segmento OE, com sinal *negativo*, é a tangente de x e o comprimento do segmento AD, com sinal *negativo*, é a tangente de x. Assim, na situação em que x está próximo de zero, com $x < 0$, temos

$$\operatorname{sen} x \ \geq \ x \ \geq \ \operatorname{tg} x.$$

Resumindo, se x é um valor suficientemente próximo de zero,

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \ \leq \ x \ \leq \ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & \text{se } \ x > 0; \\[2ex] \operatorname{sen} x \ \geq \ x \ \geq \ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & \text{se } \ x < 0. \end{cases}$$

Multiplicando ambas inequações por $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ (lembre-se, estamos considerando valores de x próximos a 0, mas diferentes de 0), obtemos o mesmo resultado,

$$1 \;\leq\; \frac{x}{\operatorname{sen} x} \;\leq\; \frac{1}{\cos x}.$$

Realmente, no caso $x < 0$, $\operatorname{sen} x < 0$, e as desigualdades são invertidas no processo.

Ótimo! Agora, se fizermos $f(x) = 1$, $g(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ e $h(x) = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$, como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$, o Teorema do Confronto garante que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \;=\; 1.$$

Agora que estabelecemos o limite trigonométrico fundamental, vamos apreciá-lo um pouco, do ponto de vista geométrico.

Interpretação geométrica do limite fundamental

Quando afirmamos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, estamos dizendo que, para valores próximos de zero, a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ assume valores mais e mais próximos de 1. Veja o gráfico da função na figura a seguir.

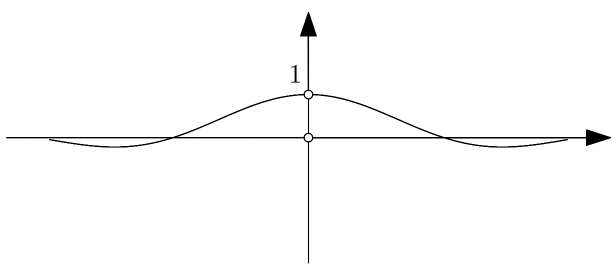

Figura 4.9
Gráfico da função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Uma outra interpretação para esse limite é que as funções $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = x$ (função identidade) tornam-se cada vez mais parecidas, à medida que os valores assumidos por x pertencem a uma pequena vizinhança de zero. Assim, se x assume valores muito próximos de zero, porém é diferente de zero, $\operatorname{sen} x \sim x$ e, portanto, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \sim 1$. É claro que a maneira adequada de dizer isso é colocar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

A informação dada pelo limite é de caráter local, isto é, quanto mais próximos do ponto em questão são tomados os valores de x, mais precisa será a informação. O limite descreve o comportamento da função em uma pequena proximidade do ponto em questão.

Veja os gráficos de $g(x) = \operatorname{sen} x$ e de $h(x) = x$ em duas vizinhanças de zero. Uma de raio bem próximo de zero (Figura 4.11) e outra de raio relativamente maior (Figura 4.10).

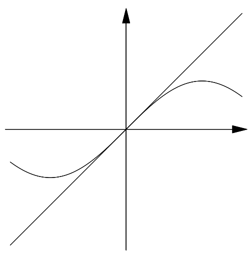

Figura 4.10

Gráficos de g e de h numa (grande) vizinhança de zero.

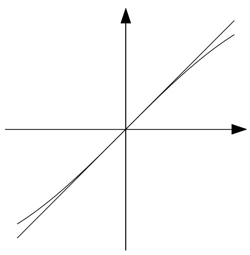

Figura 4.11

Gráfico de f e de g numa (pequena) vizinhança de zero.

Aplicações do limite fundamental trigonométrico no cálculo de outros limites

Do ponto de vista operacional, espera-se que você use o limite trigonométrico fundamental para calcular outros limites trigonométricos. Dessa forma, o limite trigonométrico fundamental faz o papel das fatorações algébricas usadas nas aulas anteriores para calcular os limites.

Para isso, devemos ficar atentos ao argumento da função seno. Veja, se

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então,

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}\big(f(x)\big)}{f(x)} = 1.$$

Exemplo 4.2.

Vamos calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}.$$

Neste caso, o limite do argumento da função seno, $5x$, é zero, quando x tende a 0. O problema é que o denominador difere do argumento por uma constante. Portanto, precisamos fazer um pequeno ajuste. Veja:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x \to 0} 5 \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 5 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 1.$$

Exemplo 4.3.

Veja o ajuste necessários para calcular o limite a seguir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \to 1} \left[\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{1}{(x+1)} \right] = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4.

Nem sempre o limite resulta numa constante não-nula. Aqui está um exemplo dessa situação.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x\,(\cos\, x^2)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\,(\operatorname{sen} x^2)}{x^2\,(\cos\, x^2)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{(\cos\, x^2)} = \\
&= 1 \cdot \frac{0}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Neste caso, precisamos multiplicar o numerador e o denominador por x para que o argumento de seno, a função $y = x^2$, *aparecesse* no denominador. Esse tipo de manobra é comum no cálculo do limite.

Exemplo 4.5.

O exemplo que estudaremos agora requer outro tipo de manobra. Vamos calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

É claro que o limite apresenta uma indeterminação, pois os limites do numerador e do denominador são ambos zero. No entanto, não temos, exatamente, a função seno em vista. Nesse caso, usaremos, também, um truque que você já conhece – o conjugado!

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x)}{x\,(1+\cos x)}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos^2 x}{x\,(1+\cos x)}\right] = \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\,(1+\cos x)}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{x\,(\operatorname{sen}^2 x)}{x^2(1+\cos x)}\right] = \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x}{1+\cos x}\right] = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Considerações finais

Chegamos ao fim da aula, mas não ao fim das aplicações do Teorema do Confronto. A demonstração desse teorema, assim como as demonstrações dos dois lemas apresentados nesta aula, decorrem naturalmente da definição de limite. Voltaremos a falar sobre elas. No momento, o importante é aprender as suas interpretações geométricas, assim como as suas aplicações nos cálculos dos limites.

Veja, nesta aula você aprendeu que as funções trigonométricas são *bem comportadas* em relação ao limite, assim como a usar o limite trigonométrico fundamental para levantar algumas indeterminações que envolvem funções trigonométricas. Não deixe de praticar o que aprendeu, fazendo os exercícios propostos.

Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec x}{x^2}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos x}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sec 3x - \sec x}{x^2}$;

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 4x}$;

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x^2 - sen\, x}$.

2. Use as propriedades elementares de limites de funções e os limites calculados na aula para mostrar que, se $a \neq \dfrac{(2n+1)\,\pi}{2}$, para todo número inteiro n, então

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x \;=\; \operatorname{tg} a.$$

O que você pode dizer a respeito das outras funções trigonométricas?

3.

O Teorema do Confronto pode ser usado para mostrar que o resultado a seguir é verdadeiro.

Teorema

Considere duas funções f e g com as seguintes propriedades:

(a) *para um certo $a \in \mathbb{R}$, existe um $r > 0$, tal que*

$$(a - r,\, a) \cup (a,\, a + r) \subset \big(Dom(f) \cap Dom(g)\big);$$

(b) *existe um $M > 0$, tal que, se $x \in (a - r,\, a) \cup (a,\, a + r)$, então $|g(x)| \leq M$;*

(c)

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Então,

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 0.$$

Resumindo, o limite do produto de duas funções, uma delas limitada e a outra com limite igual a zero, também é zero.

A idéia da prova é a seguinte: para $x \in (a - r,\, a) \cup (a,\, a + r)$,

$$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)|\, M.$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, sabemos que $\lim\limits_{x \to a} |f(x)|\, M = 0$.

Agora, o Teorema do Confronto garante que $\lim\limits_{x \to a} |f(x) \cdot g(x)| = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 0$.

Use o resultado para calcular os limites a seguir.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2x}\right)$;

(b) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x^2) \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x} - 1) \cos\left(\dfrac{1}{(x-1)^3}\right)$;

(d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4. Sabendo que, para valores de x próximos a zero,

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} \;<\; \frac{1-\cos x}{x^2} \;<\; \frac{1}{2},$$

o que você pode dizer a respeito de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$?

5. Construa uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} |f(x)| = 1$;

(b) f não admite limite quando x tende a 0.

Sugestão: pense em um degrau, por exemplo, e use os limites laterais.