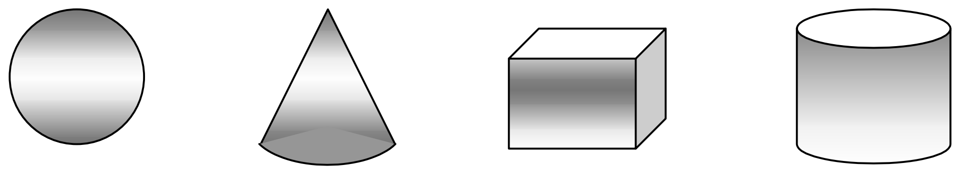
8.2- Volume de Sólidos de Revolução

Uma região tridimensional (S) que possui as propriedades a) e b) a seguir é um sólido:

a) A fronteira de S consiste em um número finito de superfícies lisas que se interceptam num número finito de arestas que por sua vez, podem se interceptar num número finito de vértices.

b) S é uma região limitada.

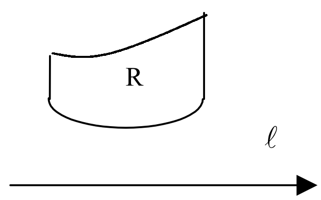
Exemplos de sólidos (esfera, cone circular, cubo, cilindro)



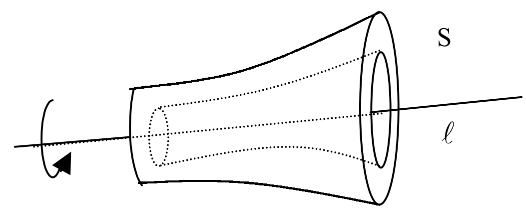
8.2.1- Sólidos de Revolução - Método do Disco

Um sólido de revolução se forma da seguinte maneira:

Dada uma região R plana e l uma linha reta que pode tocar ou não em R e que esteja no mesmo plano de R. Girando-se R em torno de l, forma-se uma região chamada de sólido de revolução.

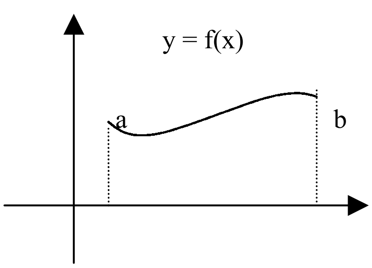


Área plana 1

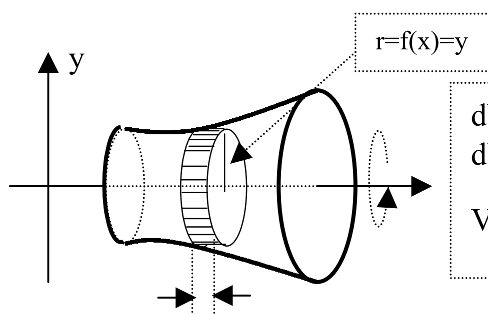


Sólido gerado pela Rotação.

Girando o gráfico de uma função f(x) tem-se:



Área plana 2

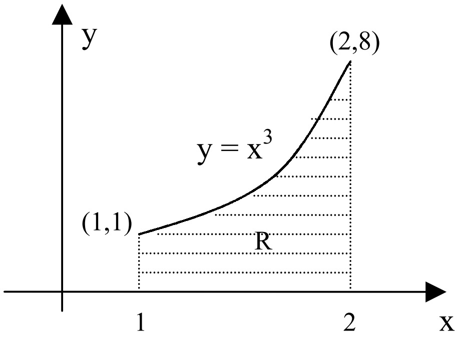


$$dV = \pi r^2 \, dx$$
$$dV = \pi [f(x)]^2 \, dx$$
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

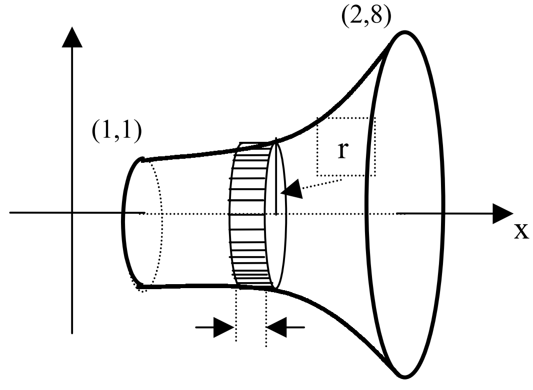
Cálculo do elemento de volume

Exercícios

1) Usando o método do disco circular, calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob a função $y = f(x) = x^3$, no intervalo [1,2].



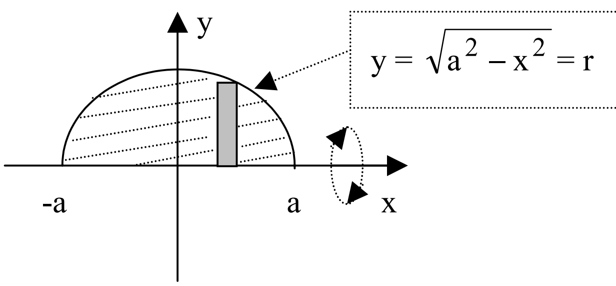
Área plana 3



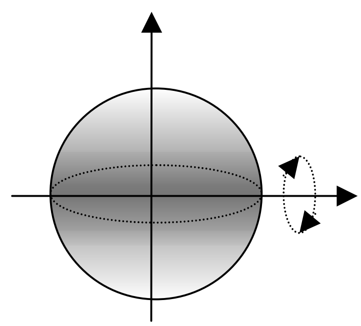
Elemento de volume

$$V=\pi\int_1^2 [f(x)]^2\,dx = \pi\int_1^2 [x^3]^2\,dx = \pi\int_1^2 x^6\,dx = \pi\left.\frac{x^7}{7}\right|_1^2 = \pi\left(\frac{2^7}{7}-\frac{1^7}{7}\right) = \frac{127}{7}\pi = 18{,}143\pi = 56{,}99 (unid\ vol)$$

2) Achar o volume gerado pela função $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ em [-a, a]



Semi-círculo em rotação



Sólido gerado pela rotação do semi-círculo

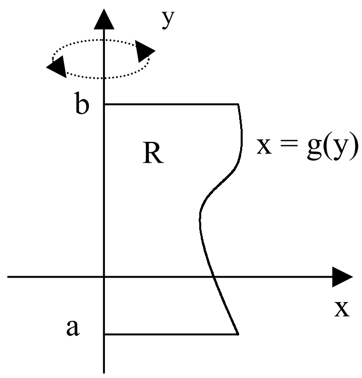
$$V = \pi\int_{-a}^{a} [f(x)]^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a} [\sqrt{a^2 - x^2}\,]^2\,dx = \pi\int_1^2 [a^2 - x^2]\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi\left\{\left[a^3 - \frac{a^3}{3}\right] - \left[-a^3 + \frac{a^3}{3}\right]\right\} = \pi\left\{a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right\} = \pi\left\{2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right\}$$

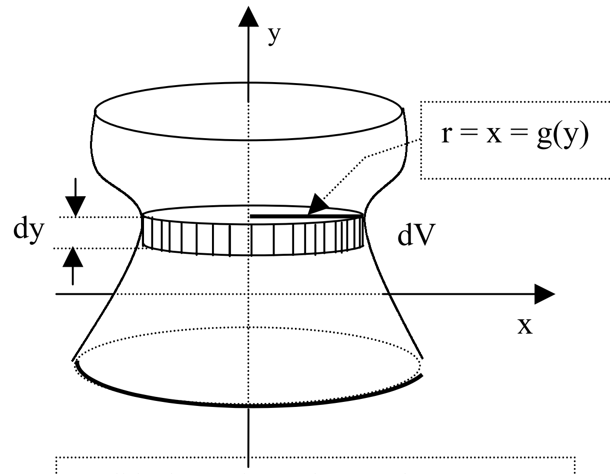
$$= \pi\left\{\frac{6a^3 - 2a^3}{3}\right\} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

que é o volume da esfera gerada!!!

Uma região plana pode ser girada em torno do eixo y ao invés do eixo x, e novamente um sólido de revolução será gerado.



Área plana girando em y

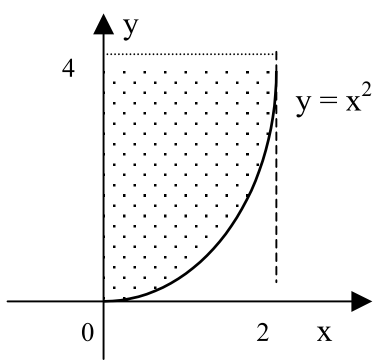


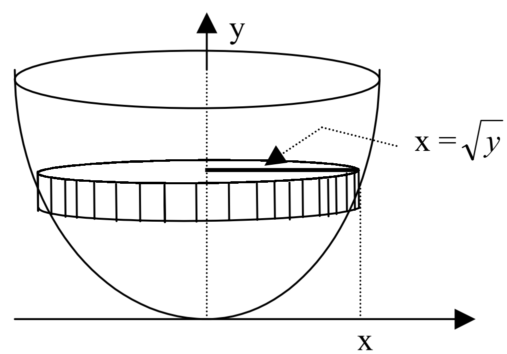
Sólido de revolução da área plana em torno de y

$$V = \pi\int_a^b [g(y)]^2\, dy = \pi\int_a^b r^2 dy$$ que é o volume do sólido

Exercícios

1) Calcule o volume gerado pela parábola $y = x^2$ girando em torno do eixo de y, no intervalo [0,4].





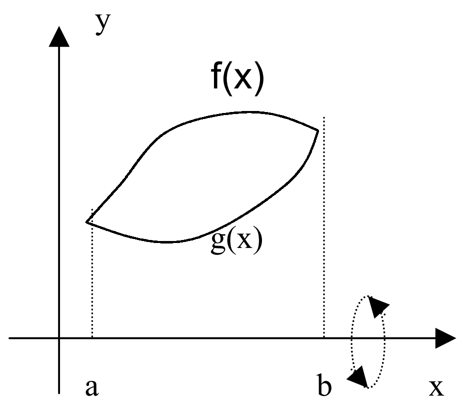
<u>Sólido gerado pela Parábola de revolução</u>

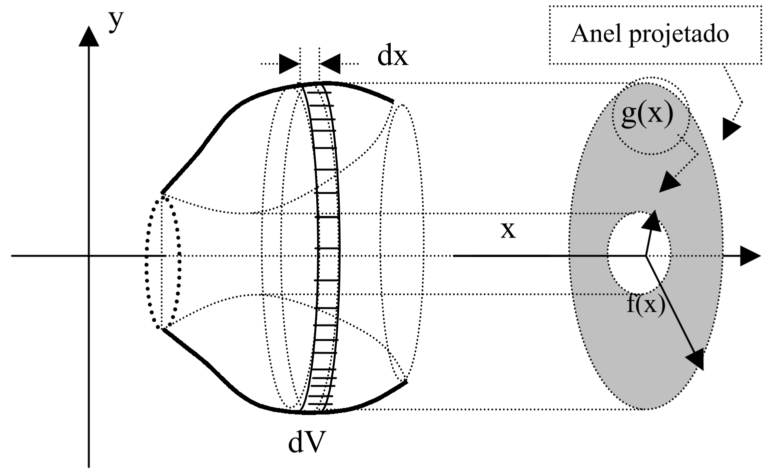
Seção plana parábola girando em y

$$V = \pi\int_a^b [g(y)]^2\, dy = \pi\int_a^b r^2 dy = \pi\int_0^4 [\sqrt{y}\,]^2\, dy = \pi\int_0^4 y dy = \frac{\pi y^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{\pi 4^2}{2} - 0 = 8\pi$$

$V = 8\pi = 25{,}13$ *unid. de vol.*

O **Método do Disco** pode ser estendido para o **Método dos Anéis Circulares**. Este método surge quando a área de revolução é limitada por duas funções f(x) e g(x), tal que f(x) > g(x), para todo $x \in [a,b]$.





Área plana em revolução

Sólido gerado pela revolução

O elemento de volume do anel é dado por:

$$dV = \pi\,[f(x)]^2 dx - \pi\,[g(x)]^2 dx = \pi\,\{\,[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

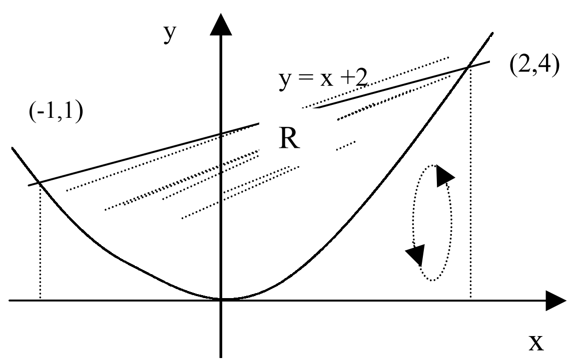
de forma que o volume todo é dado por:

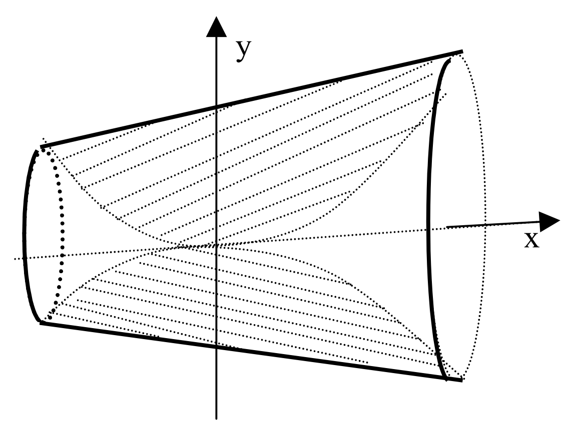
$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b \left\{ [\,f(x)\,]^2 - [\,g(x)\,]^2 \right\} dx$$

Note que o vão interno é descontado pela subtração dos dois volumes.

Exercício

1) Calcular, usando o método dos anéis circulares, o volume formado pela rotação da região entre $y = x^2$ e $y = x + 2$.





Área entre parábola e reta em revolução.

Sólido de revolução

Sol: Faço $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$ (pois $f(x) > g(x)$)
Pontos de Intersecção: $f(x) = g(x) \rightarrow x^2 = x + 2$, isto é:

$x^2 - x - 2 = 0$ $(x' = -1$ e $x'' = 2)$ e $(y' = 1$ e $y'' = 4)$

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+2)^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x^2 + 4x + 4) - (x^4) \right]$$

$$== \pi \int_{-1}^{2} [x^2 + 4x + 4 - x^4] dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

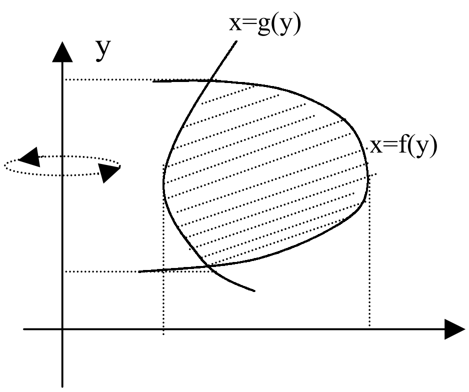
$$= \pi \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2.2^2 + 4.2 - \frac{2^5}{5} \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)^2 + 4(-1) - \frac{(-1)^5}{5} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{8}{3} + 8 + 8 - \frac{32}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 4 + \frac{1}{5} \right) \right] = \pi \left[\left(\frac{8}{3} + 16 - \frac{32}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{5} \right) \right]$$

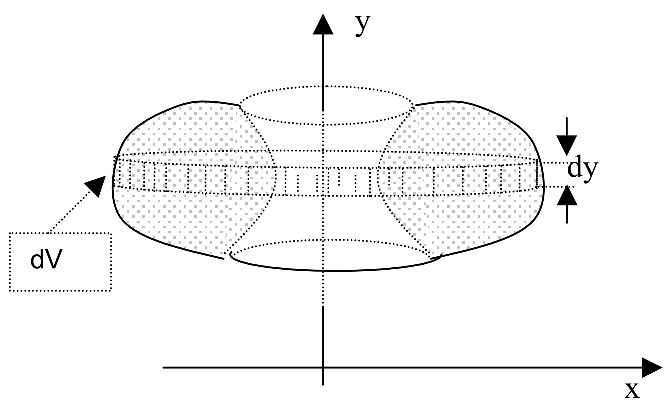
$$= \pi \left[\left(\frac{40 + 240 - 96}{15} \right) - \left(\frac{-5 - 30 + 3}{15} \right) \right] = \pi \left[\left(\frac{184}{15} \right) - \left(\frac{-32}{15} \right) \right] = \pi \frac{216}{15} = \frac{72}{5}\pi$$

logo $V = \dfrac{72\pi}{5} = 45{,}2389$ (unid. de vol.)

Se a revolução for em torno do eixo *y*, como por exemplo para as funções *x = F(y)* e *x = G(y)*, tem-se:
$dV = \pi \{ [F(y)]^2 - [G(y)]^2 \} dy$
de forma que o volume todo é dado por:



Área entre curvas, em revolução

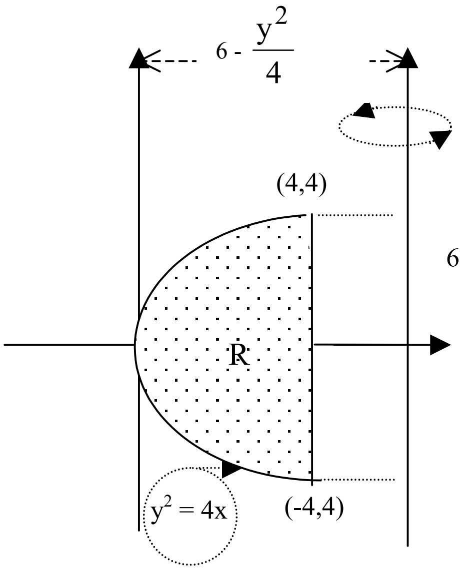


Sólido gerado pela área em revolução

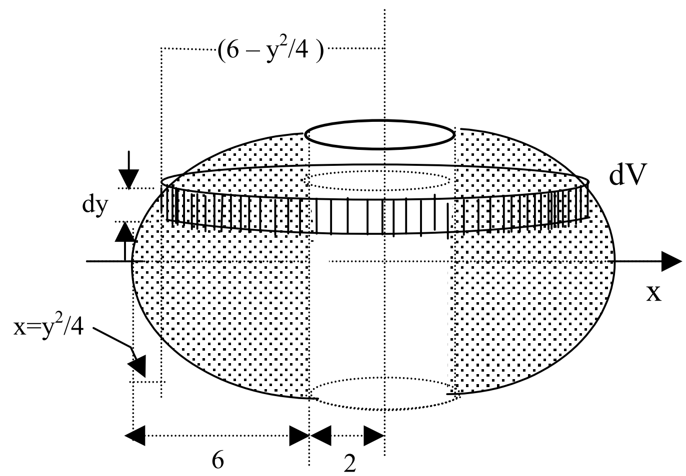
$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b \left\{ [F(y)]^2 - [G(y)]^2 \right\} dy$$

As vezes, o sólido de revolução é gerado em torno de um eixo externo que pode ser paralelo a "x" ou a "y". O método dos anéis circulares, pode ser aplicado, desde que se identifique o raio do giro.

Exercícios
Achar o volume do sólido gerado pela revolução da região R em torno do eixo $x = 6$. R é limitada pelos gráficos de $y^2 = 4x$ e $x = 4$.



Parábola girando em torno de um eixo externo



Parabolóide gerado pela rotação

Sol: Para isolarmos x fazemos: $y^2 = 4x \rightarrow x = \dfrac{y^2}{4}$

Também temos: se $x = 4 \rightarrow y^2 = 4.4 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

Obs: r_E = raio externo = $6 - \dfrac{y^2}{4}$ e r_I = raio interno = 2

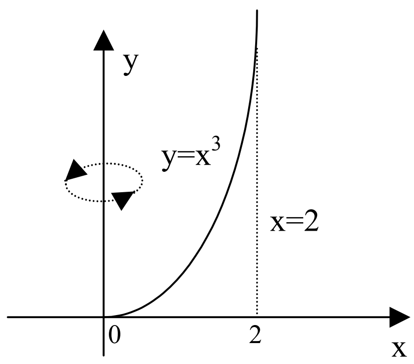
$$V = \int_{y=-4}^{y=4} dV = \int_{-4}^{4} \pi\left(r_E^2 - r_I^2\right)dy$$

$$V = \pi \int_{-4}^{4}\left[\left(6 - \frac{y^2}{4}\right)^2 - 2^2\right]dy = \pi \int_{-4}^{4}\left[36 - 3y^2 + \frac{y^4}{16} - 4\right]dy = \pi \int_{-4}^{4}\left[\frac{y^4}{16} - 3y^2 + 32\right]dy$$

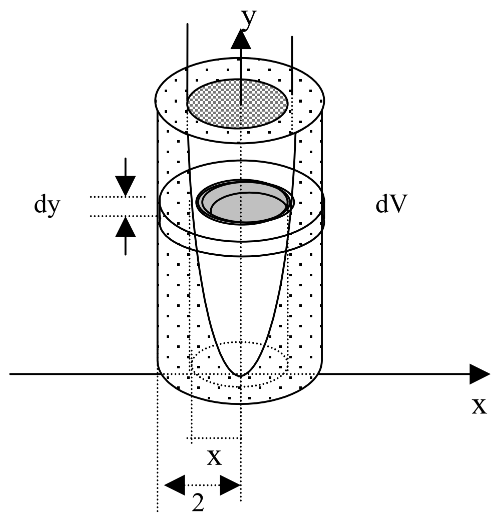
$$= \pi \left[\frac{y^5}{80} - y^3 + 32y\right]\Bigg|_{-4}^{4} = \pi\left\{\left[\frac{4^5}{80} - 4^3 + 32 \times 4\right] - \left[\frac{(-4)^5}{80} - (-4)^3 + 32(-4)\right]\right\}$$

$$= \pi \left[\frac{384}{5} - \left(\frac{-384}{5}\right)\right] = \frac{768}{5}\pi = 153{,}6\pi = 482{,}548 \text{ (unid. vol.)}$$

2) Dados os gráficos $y = x^3$ e $x = 2$, determine o volume da região, para o caso da área plana girar em y.



Curva do 3º grau girando em y



Casca cilíndrica gerada

De $y = x^3 \rightarrow x = y^{1/3}$
Sejam:
$F(y) = 2$ $\quad r_E = 2$ $\quad$ *(raio externo)*
$G(y) = y^{1/3}$ $\quad r_I = x = y^{1/3}$ $\quad$ *(raio interno)*

$$V=\pi\int_0^8\left[4-\left(y^{1/3}\right)^2\right]dy=\pi\int_0^8\left[4-y^{2/3}\right]dy=\pi\left[4y-\frac{y^{5/3}}{5/3}\right]_0^8=\pi\left[4.8-\frac{8^{5/3}}{5/3}\right]-0=\pi\left[32-\frac{3}{5}8^{5/3}\right]$$

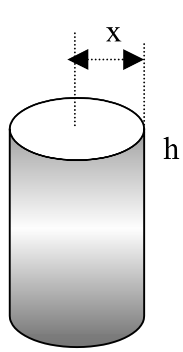
Mas

$$8^{5/3}=\sqrt[3]{8^5}=\sqrt[3]{8^3 8^2}=8\sqrt[3]{8^2}=8\sqrt[3]{(2^3)^2}=8\sqrt[3]{2^6}=8.2^{6/3}=8.4=\mathbf{32}$$

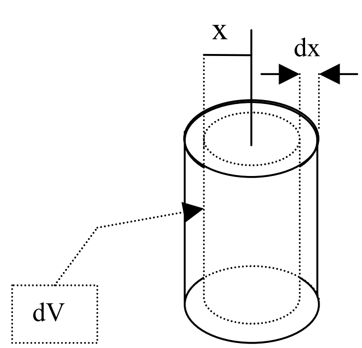
Então $V=\pi\left[32-\frac{3}{5}8^{5/3}\right]=\pi\left[32-\frac{3}{5}\times 32\right]=\pi\frac{64}{5}$ = 12,8π = 40,212 (unid. vol.)

8.2.2- Método do Invólucro Cilíndrico

Este método usa cascas cilíndricas ao invés de discos.



Cilindro



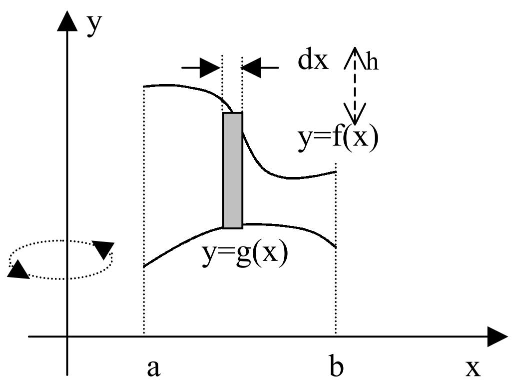
Casca cilíndrica

$2\pi x$ = comprimento da casca

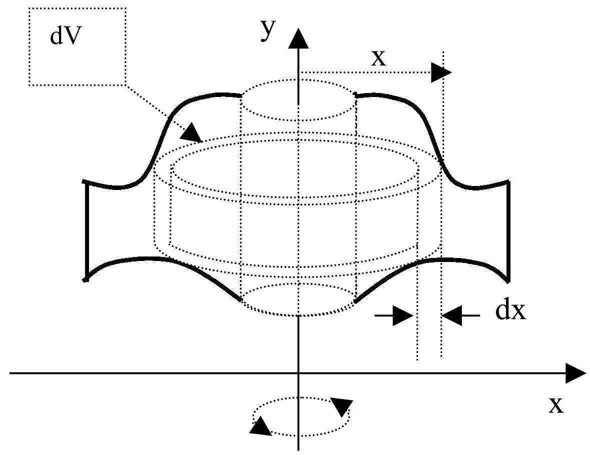
$V = \pi x^2 h$

$dV = 2\pi h x dx \rightarrow V = 2\pi \int xhdx$

Se a área plana de revolução estiver limitada pelas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, no intervalo $a \leq x \leq b$, conforme mostra a figura:



Área plana entre curvas, em Revolução e em torno de y



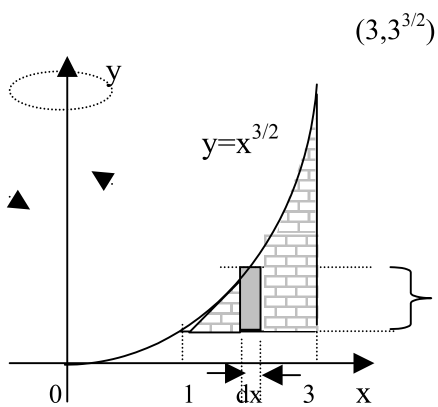
Sólido gerado pela área em revolução.

Obs: temos: $h = f - g$

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

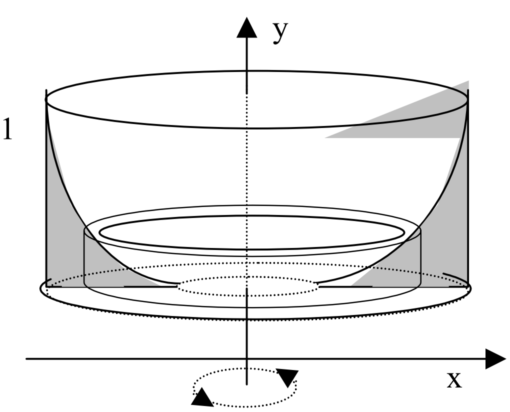
Exercícios

1) Calcular o volume de revolução em torno de y limitado por $y = x^{3/2}$, $y = 1$, em $x \in [1,3]$



Área girando em y

$h = y - y_0 = x^{3/2} - 1$



Casca cilídrica que gera o volume elementar

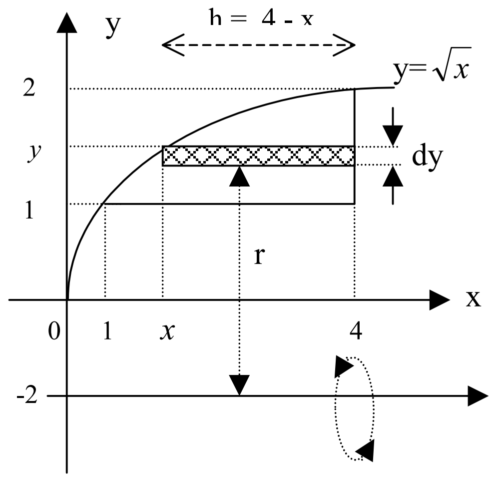
Sejam $f(x) = x^{3/2}$ e $g(x) = 1$

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = 2\pi \int_1^3 x[x^{3/2} - 1]dx = 2\pi \int_1^3 [x^{5/2} - x]dx = 2\pi \left(\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_1^3 =$$

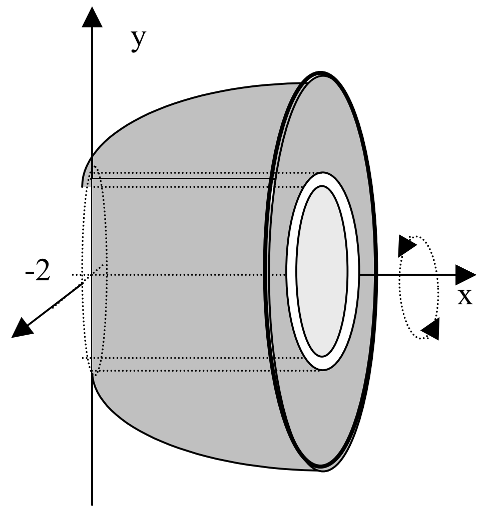
$$= 2\pi\left[\left(\frac{3^{7/2}}{7/2}-\frac{3^2}{2}\right)-\left(\frac{1^{7/2}}{7/2}-\frac{1^2}{2}\right)\right]= 2\pi\left[\left(\frac{2}{7}.27\sqrt{3}-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{2}\right)\right]= 2\pi\left[\left(\frac{108\sqrt{3}-63}{14}\right)-\left(-\frac{3}{14}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{108\sqrt{3}}{14}-\frac{60}{14}\right]= 2\pi(9,075825) = 18,1516\pi = 57,025 \text{ (unid vol.)}$$

2) Use o método das cascas cilíndricas para calcular o volume gerado pela rotação da área R em torno de $y = -2$. R é limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ e $x = 4$.



Área plana girando em
Torno do eixo y=-2



Sólido gerado

Se $y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$

Para $y = 1 \rightarrow x = 1$
Para $x = 4 \rightarrow y = 2$

$r = y - (-2) = y + 2$
$h = 4 - x = 4 - y^2$

$dV = 2\pi\, r\, \mathbf{h}\, dy \rightarrow dV = 2\pi(y + 2)(\mathbf{4 - y^2})dy = 2\pi(4y - y^3 + 8 - 2y^2)$

$$V = 2\pi\int_1^2 [-y^3 - 2y^2 + 4y + 8]\,dy \;= 2\pi\left[-\frac{y^4}{4}-\frac{2y^3}{3}+2y^2+8y\right]\Bigg|_1^2$$

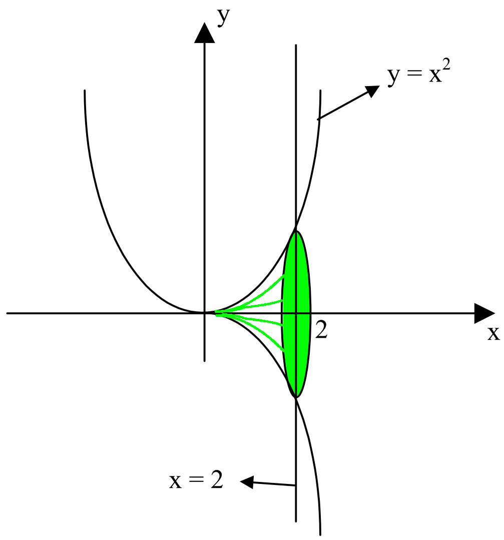
$$V = 2\pi\left\{\left[-\frac{2^4}{4}-\frac{2.2^3}{3}+2.2^2+8.2\right]-\left[-\frac{1^4}{4}-\frac{2.1^3}{3}+2.1^2+8.1\right]\right\}$$

$$V = 2\pi\left\{\left[-4-\frac{16}{3}+8+16\right]-\left[-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+2+8\right]\right\} =$$

$$V = 2\pi\left\{\left[-4-\frac{16}{3}+8+16+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-2-8\right]\right\} = 2\pi\left\{-\frac{14}{3}+\frac{1}{4}+10\right\} = 2\pi\left\{\frac{-56+3+120}{12}\right\} = \frac{67}{6}\pi$$

$$V = \frac{67}{6}\pi = 35,081 \;\; (unid.\ vol.)$$

3) Determinar o volume gerado pela revolução em torno do eixo x da região limitada por $y = x^2$, x = 2 e o eixo x.



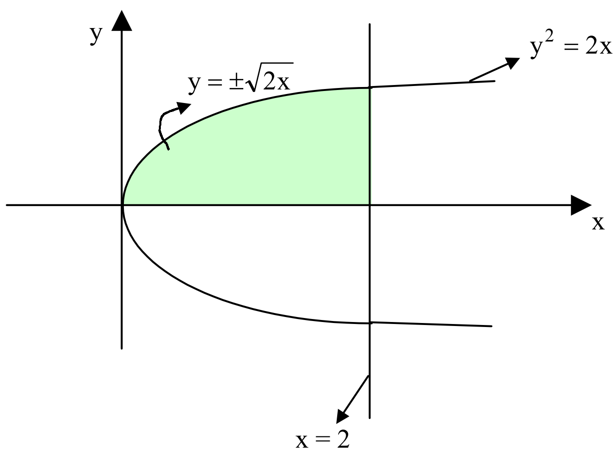
$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2\, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^4\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$V = \frac{32.\pi}{5} u.v.$$

4) Determinar o volume gerado pela revolução em torno do eixo x da região limitada por $y^2 = 2.x$, eixo x e x = 2.



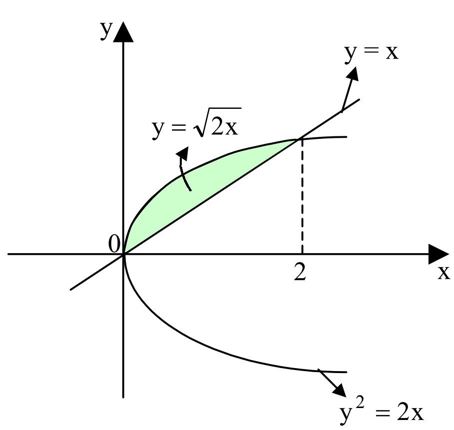
$$V = \pi \int_0^2 \left(\sqrt{2x}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 2x dx$$

$$V = \pi x^2 \Big|_0^2$$

$$V = 4\pi u.v.$$

5) Determinar o volume gerado pela revolução em torno do eixo x da área limitada pelas curvas $y^2 = 2x$ e y = x.



- <u>Pontos de interseção</u>

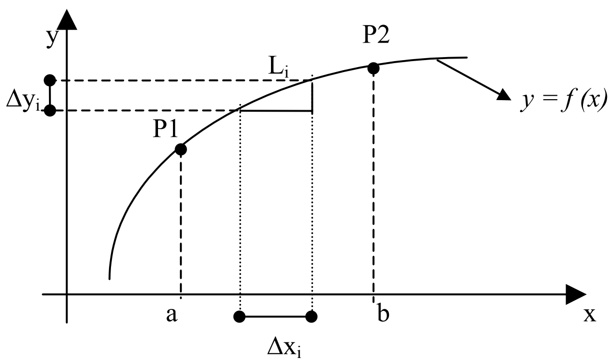
$$y^2 = 2x$$
$$y = x$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- <u>Volume</u>

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(\sqrt{2x}\right)^2 - x^2 \right] dx$$
$$V = \pi \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx$$
$$V = \pi \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2$$
$$V = \pi \left(4 - \frac{8}{3} \right)$$
$$V = \frac{4\pi}{3} u.v.$$

8.3- Comprimento de Arcos de Curvas

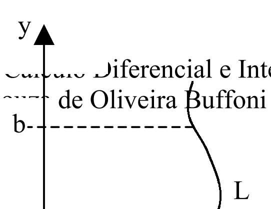
Seja $y = f(x)$ contínua e derivável em $[a, b]$.



$$L_i^2 = \Delta y_i^2 + \Delta x_i^2$$
$$L_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$$
$$L_i = \sqrt{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 + 1} \cdot \Delta x_i$$

$$L \cong \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 + 1} \cdot \Delta x_i$$
$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 + 1} \cdot \Delta x_i$$
$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \cdot dx}$$

Seja $x = f(y)$ $y = a$ e $y = b$.



$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

Exercícios

1) Determinar o comprimento do arco da curva $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ entre os pontos *P1 (8, 4)* e *P2 (27, 9)*.

$$L = \int_8^{27} \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \cdot dx$$

• $y = x^{\frac{2}{3}}$

• $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3.x^{\frac{1}{3}}}$

• $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4}{9.x^{\frac{2}{3}}}$

• $\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{9.x^{\frac{2}{3}}} + 1} = \sqrt{\frac{4 + 9x^{\frac{2}{3}}}{9x^{\frac{2}{3}}}}$

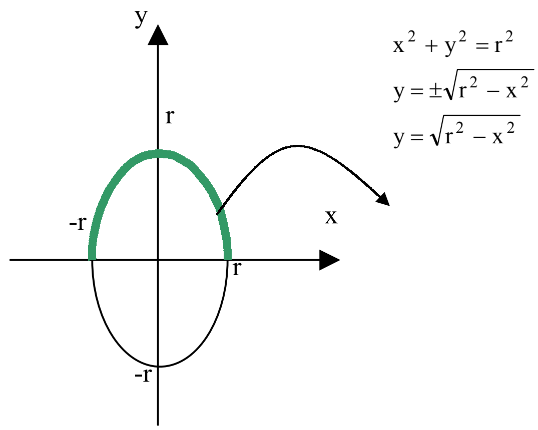
• $\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \frac{\left(4 + 9x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$

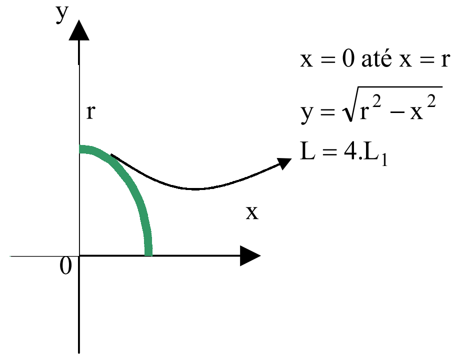
$$L = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \int_8^{27} \left(4 + 9.x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot 6 \cdot dx$$

$$L = \frac{1}{18} \left(4 + 9.x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Bigg|_8^{27}$$

$$L = \frac{1}{27} \left(85^{\frac{3}{2}} - 40^{\frac{3}{2}}\right)$$

2) Calcular o comprimento de uma circunferência de raio r.





$$L_1 = \int_0^r \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \cdot dx$$

• $y = \left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

• $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \dfrac{-x}{\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

• $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}$

• $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \dfrac{x^2}{r^2 - x^2} + 1 = \dfrac{x^2 + r^2 - x^2}{r^2 - x^2} = \dfrac{r^2}{r^2 - x^2}$

• $\sqrt{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$L_1 = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r.arcsen\,\frac{x}{r}\Big|_0^r$$

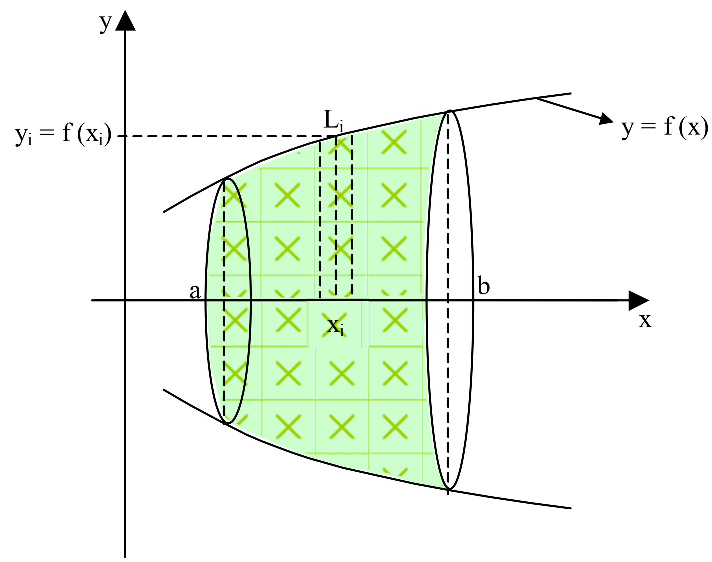
$$L_1 = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{r\pi}{2}$$

$$L = 4.L_1 = \frac{4\pi r}{2}$$

$$\boxed{L = 2.\pi.r}$$

8.4- Área de Superfície de Revolução

Seja $y = f\ (x)$ contínua e derivável em $[a, b]$.



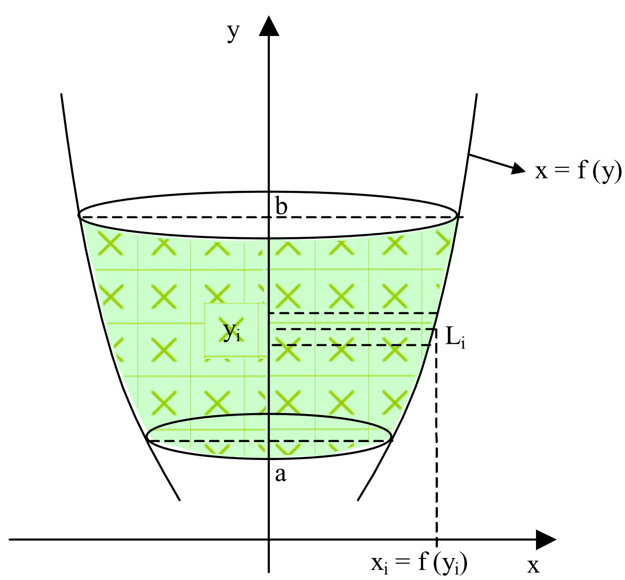
$$Si = 2\pi f(x_i)L_i$$

$$S_i = 2\pi f(x_i)\sqrt{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 + 1} \cdot \Delta x_i$$

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i)\sqrt{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 + 1} \cdot \Delta dx$$

$$S = \int_b^a 2\pi f(x)\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \cdot dx \text{ ou } \boxed{S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{(f`(x))^2 + 1} \cdot dx}$$ → Superfície gerada pela revolução do eixo x.

Seja x = f (y).



$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \cdot dy}$$ $\rightarrow$ Superfície gerada pela revolução em torno do eixo y.

Exercícios

1) Determinar a área da superfície obtida pela revolução da curva $y = \sqrt{x}$, entre $x = 1$ e $x = 4$ em torno do eixo x.

$$S = 2\pi \int_1^4 y \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} \cdot dx$$

- $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2.x^{-\frac{1}{2}}}$
- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4x}$
- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4x} + 1 = \frac{1+4x}{4x}$
- $\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1+4x}{4x}} = \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}}$

$$S = \frac{2\pi}{2} \int_1^4 \frac{\sqrt{x}.\sqrt{1+4x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$S = \frac{\pi}{4} \int_1^4 (1+4x)^{\frac{1}{2}}.4.dx$$

$$S = \frac{\pi}{4} (1+4x)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\Bigg|_1^4$$

$$S = \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \right)$$