O teorema fundamental segundo Newton

Reproduzimos aqui o raciocínio de Newton em sua descoberta do teorema fundamental, como descrito em [G5], pp. 56–57. Consideremos uma curva no primeiro quadrante, representada por uma função y de x. Imaginamos, como sempre fazia Newton, que a curva passe pela origem e indiquemos com z a área ABC sob a curva (Fig. 8.5), a qual supomos, concretamente (como fazia Newton) dada por $z = 2x^{3/2}/3$. Na referida figura, $AB = x$, $BC = y$ e $BE = v$ é tal que a área da figura $BCDG$ é igual à área do retângulo $BEFG$. Dando a x um acréscimo infinitesimal $o = BG$, z sofrerá o acréscimo infinitesimal vo (igual à área do retângulo $BEFG$). Assim, teremos:

$$z^2 = \frac{4}{9}x^3 \text{ e } (z + vo)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3.$$

Expandindo esta última expressão, tendo em conta a primeira e dividindo os termos restantes por o, obtemos:

$$2zv + v^2o = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

Agora desprezamos os termos contendo o fator infinitesimal o e igualamos v a y, já que a diferença $v - y$ também é infinitesimal. Como $z = 2x^{3/2}/3$, o resultado é

$$2zy = \frac{4}{3}x^2, \text{ donde } y = x^{1/2},$$

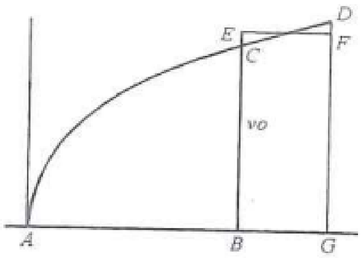

Fig. 8.5

Em linguagem moderna, Newton mostra assim que *a derivada da área z é a ordenada y e que a integral de y é z*. O mesmo argumento aplica-se, evidentemente à situação geral em que $y = ax^{m/n}$ e $z = [na/(m+n)]x^{(m+n)/n}$. Newton estende esse resultado a funções mais gerais, desenvolvendo-as em séries de potênciais, e sobre isso falaremos no final do capítulo 9.

O teorema fundamental segundo Leibniz

Em Leibniz, o teorema fundamental aparece mais claramente graças a sua notação, como está bem explicado em [E], pp. 257–258. A área z da Fig. 8.5 é interpretada como a soma das áreas infinitesimais $dz = ydx$ de uma infinidade de retângulos de base dx e altura y (como ilustra a Fig. 7.3, p. 158). Como notação para indicar essa soma, Leibniz adotou (em 1875) o símbolo $\int$, que é uma das formas da letra "S" usada em seu tempo. Portanto, com essa notação,

$$\int ydx = \int dz = z.$$

Como se vê, a própria notação e a concepção intuitiva de área como somatória de elementos infinitesimais levam, naturalmente, à expressão do teorema fundamental. Pondo $y = f(x)$ e $z = F(x)$, de sorte que $dz/dx = F'(x) = f(x)$, e subtraindo uma da outra duas aplicações da fórmula anterior, obtemos o teorema fundamental em sua forma que nos é bem familiar:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$