11

Sequências e Séries Infinitas

11.10 Séries de Taylor e Maclaurin

Séries de Taylor e Maclaurin

Começaremos supondo que *f* seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \quad |x-a| < R$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem aparecer em termos de *f*. Para começar, observe que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos após o primeiro são 0 e teremos

$$f(a) = c_0$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Podemos derivar a série na Equação 1 termo a termo:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \cdots \quad |x - a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora derivamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots \quad |x - a| < R$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da série na Equação 3 fornece

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \quad |x - a| < \boldsymbol{R}$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n, nessa equação,obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, demonstramos o teorema a seguir.

$\boxed{5}$ **Teorema** Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, *se f* tiver uma expansão em série de potências em *a*, então ela deve ser da seguinte forma:

$$\boxed{6} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

A série na Equação 6 é chamada **série de Taylor da função *f* em *a*** (ou **em torno de *a*** ou **centrada em *a***).

Séries de Taylor e Maclaurin

Para o caso especial *a* = 0, a série de Taylor torna-se

$$\boxed{7} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.

Exemplo 1

Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO: Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto, a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Para encontrarmos o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

de modo que, pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e o raio de convergência é $R = \infty$.

Séries de Taylor e Maclaurin

A conclusão que podemos tirar do Teorema 5 e do Exemplo 1 é que *se* e^x tiver uma expansão em série de potências em 0, então

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Assim, como determinar se e^x *tem uma* representação em série de potências?

Séries de Taylor e Maclaurin

Vamos investigar uma questão mais geral: sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de sua série de Taylor? Em outras palavras, se *f* tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Como com qualquer série convergente, isso significa que $f(x)$ é o limite da sequência das somas parciais.

Séries de Taylor e Maclaurin

No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observe que T_n é um polinômio de grau n chamado **polinômio de Taylor de *n*-ésimo grau de *f* em *a***.

Séries de Taylor e Maclaurin

Por exemplo, para a função exponencial $f(x) = e^x$, o resultado do Exemplo 1 mostra que os polinômios de Taylor em 0 (ou polinômios de Maclaurin) com n = 1, 2, e 3 são

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Os gráficos da função exponencial e desses três polinômios de Taylor estão desenhados na Figura 1.

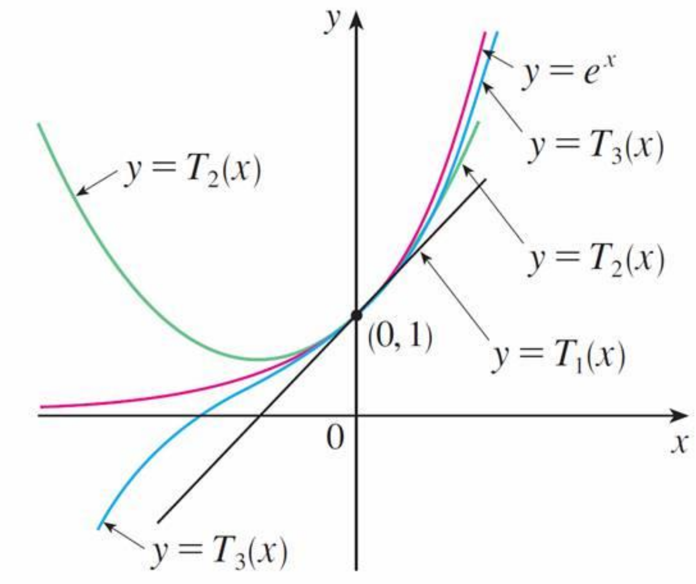

Figura 1

Quando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximar a e^x na Figura 1. Isso sugere que e^x seja igual à soma de sua série de Taylor.

Séries de Taylor e Maclaurin

Em geral, $f(x)$ é a soma se sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

Se considerarmos

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ de modo que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

Então, $R_n(x)$ é denominado **resto** da série de Taylor. Se pudermos de alguma maneira mostrar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, teremos mostrado que

$$\lim_{n \to \infty} T_n(x) = \lim_{n \to \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n \to \infty} R_n(x) = f(x)$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Assim, demonstramos o seguinte teorema:

8 **Teorema** Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de de n-ésimo grau f em a e

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Ao tentarmos mostrar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para uma função específica f, geralmente usamos o teorema a seguir.

9 **Desigualdade de Taylor** Se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Para vermos por que isso é verdadeiro para $n = 1$, assumimos que $|f''(x)| \leq M$. Em particular, temos $f''(x) \leq M$, assim para $a \leq x \leq a + d$ temos

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leqslant \int_a^x M\,dt$$

Uma antiderivada de f'' é f', dessa forma, pela parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f'(x) - f'(a) \leq M(x - a) \quad \text{ou} \quad f'(x) \leq f'(a) + M(x - a)$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Logo,
$$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a) + M\,\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Mas $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Portanto

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Um argumento similar, usando $f''(x) \geq -M$, mostra que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x - a)^2$$

Então
$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x - a|^2$$

Embora tenhamos suposto que $x > a$, cálculos similares mostram que essa desigualdade é também verdadeira para $x < a$.

Séries de Taylor e Maclaurin

Isso demonstra que a Desigualdade de Taylor para o caso onde $n = 1$. O resultado para um n qualquer é demonstrado de maneira similar pela integração $n + 1$ vezes.

Ao aplicar os Teoremas 8 e 9, muitas vezes é útil usar o fato a seguir.

10

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Isso é verdade porque sabemos do Exemplo 1 que a série $\Sigma\, x^n/n!$ converge para todo x, e seu n-ésimo termo tende a 0.

Exemplo 2

Demonstre que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

SOLUÇÃO: Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d é qualquer número positivo e $|x| \leq d$, então $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^d$. Assim, a Desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Observe que a mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n. Mas, da Equação 10, temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^d}{(n+1)!} |x|^{n+1} = e^d \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Decorre do Teorema do Confronto que $\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = 0$ e, portanto, $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema 8, e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é,

11

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Em particular, se colocarmos x = 1 na Equação 11, obteremos a seguinte expressão para o número e como a soma de uma série infinita:

$$\boxed{12} \qquad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Exemplo 8

Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$, onde k é um número real qualquer.

SOLUÇÃO: Arranjando nosso trabalho em colunas, temos

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = (1 + x)^k & f(0) = 1 \\
f'(x) = k(1 + x)^{k-1} & f'(0) = k \\
f''(x) = k(k-1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) = k(k-1) \\
f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) = k(k-1)(k-2) \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{array}
$$

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Portanto, a série de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

Essa série é chamada **série binomial**. Observe que, se k é um inteiro não negativo, então os termos são, eventualmente, nulos, de modo que a série é finita. Para outros valores de k, nenhum dos termos é 0 e assim podemos tentar o Teste da Razão.

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Se seu n-ésimo termo for a_n, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \quad \text{quando } n \to \infty$$

Logo, pelo Teste da Razão, a série binomial converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$.

Séries de Taylor e Maclaurin

A notação tradicional para os coeficientes na série binomial é

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

e esses números são chamados **coeficientes binomiais**.

O teorema a seguir afirma que $(1 + x)^k$ é igual à soma de sua série de Maclaurin.

Séries de Taylor e Maclaurin

É possível demonstrar isso mostrando que o resto $R_n(x)$ tende a 0, mas assim acaba sendo muito difícil.

17 **A Série Binomial** Se k for um número real qualquer e $|x| < 1$, então

$$(1 + x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Embora a série binomial sempre convirja quando $|x| < 1$, a questão de ser ou não convergente nas extremidades, ± 1, depende do valor de k. Ocorre que a série converge em 1 se $-1 < k \leq 0$ e em ambas as extremidades $k \geq 0$. Observe que se k for um inteiro positivo e $n > k$, então a expressão $\binom{k}{n}$ contém um fator $(k - k)$, de modo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n > k$. Isto significa que a série acaba e se reduz ao Teorema Binomial usual quando k for um inteiro positivo.

Séries de Taylor e Maclaurin

Listamos na tabela a seguir, para referência futura, algumas séries de Maclaurin importantes que deduzimos nesta seção e na precedente.

$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\tan^{-1} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$R = 1$

Séries de Maclaurin Importantes e Seus Raios de Convergência

Tabela 1

Multiplicação e Divisão de Séries de Potências

Exemplo 13

Encontre os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin de (a) e^x sen x e (b) tg x.

SOLUÇÃO:

(a) Usando a série de Maclaurin para e^x e sen x na Tabela 1, temos

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Exemplo 13 – *Solução*

continuação

Multiplicamos essas expressões, juntando os termos semelhantes como nos polinômios:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\times & \quad\;\; x \qquad\qquad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\hline
 & x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\
+ & \qquad\qquad - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\
\hline
 & x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{array}
$$

Logo,

$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

Exemplo 13 – *Solução*

continuação

(b) Usando as séries de Maclaurin da tabela, obtemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Exemplo 13 – *Solução*

continuação

Usamos um procedimento parecido com a divisão de polinômios:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\cline{2-2}
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}
$$

Logo,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$