7 Técnicas de Integração

7.4

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (um quociente de polinômios), expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas *frações parciais*, que já sabemos como integrar. Para ilustrar o método, observe que, levando as frações $2/(x-1)$ e $1/(x+2)$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Se agora revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito desta equação:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= 2 \ln |x - 1| - \ln |x + 2| + C.$$

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Para vermos como o método de frações parciais funciona em geral, consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde *P* e *Q* são polinômios. É possível expressar *f* como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de *P* seja menor que o grau de *Q*. Essa função racional é denominada *própria*.

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Lembre-se de que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$, então o grau de P é n e escrevemos $\text{gr}(P) = n$.

Se f for *impróprio*, isto é, $\text{gr}(P) \geq \text{gr}(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar, dividindo Q em P (por divisão de polinômios) até o resto $R(x)$ ser obtido com $\text{gr}(R) < \text{gr}(Q)$.

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

O resultado da divisão é

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde *S* e *R* também são polinômios.

Como o exemplo a seguir mostra, algumas vezes essa etapa preliminar é tudo que precisamos.

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,dx.$

Solução: Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos realizae a divisão.

Isso nos permite escrever

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x - 1| + C$$

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. É possível demonstrar que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$). Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamos fatorar como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma das **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

Caso I O denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro).

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nesse caso, o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx.$

Solução: Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2).$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando $\boxed{2}$ tem a forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para determinarmos os valores de *A*, *B* e *C*, multiplicamos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x – 1)(x + 2)$, obtendo

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1).$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos

$$\boxed{5} \quad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A.$$

Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente de x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$2A + B + 2C = 1$$

$$3A + 2B - C = 2$$

$$-2A = -1$$

Resolvendo, obtemos, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right] dx$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

Ao integrarmos o termo do meio, fizemos mentalmente a substituição $u = 2x - 1$, que resulta em $du = 2dx$ e $dx = du/2$.

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

OBSERVAÇÃO Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes *A*, *B* e *C* no Exemplo 2. A Equação 4 é uma identidade; é verdadeira para cada valor de *x*. Vamos escolher valores de *x* que simplificam a equação. Se colocarmos $x = 0$ na Equação 4, então o segundo e terceiro termos do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$, ou $A = \frac{1}{2}$. Da mesma forma, $x = \frac{1}{2}$ dá $5B/4 = \frac{1}{4}$ e $x = -2$ resulta em $10C = -1$, assim $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$.

Caso II $Q(x)$ é um produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos.

Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes; isto é, $(a_1x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$ na Equação 2, usaríamos

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Para ilustrarmos, poderíamos escrever

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

mas é preferível detalhar um exemplo mais simples.

Exemplo 4

Encontre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx.$

Solução: A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1)$$
$$= (x - 1)^2(x + 1).$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x - 1)^2(x + 1)$,temos

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C). \end{aligned}$$

Agora igualamos os coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + C &= 0 \\ B - 2C &= 4. \\ -A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Resolvendo, obtemos *A* = 1, *B* = 2 e *C* = –1; assim

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K$$

Caso III $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.

Se $Q(x)$ tiver o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

$$\boxed{9} \qquad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

em que A e B são as constantes a serem determinadas.

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

O termo dado em $\boxed{9}$ pode ser integrado completando o quadrado (se necessário) e usando a fórmula

10 $$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

Exemplo 6

Calcule $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx.$

Solução: Como o grau do numerador *não é menor que* o grau do denominador, primeiro dividimos e obtemos

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Observe que o quadrático $4x^2 - 4x + 3$ é irredutível, pois seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica de frações parciais.

Para integrarmos a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2.$$

Isso sugere que façamos a substituição $u = 2x - 1$.

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Então $du = 2\,dx$ e $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, assim

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\,du$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2 + 2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{tg}^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Observação O Exemplo 6 ilustra o procedimento geral para se integrar uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{onde } b^2 - 4ac < 0.$$

Completamos o quadrado no denominador e então fazemos uma substituição que traz a integral para a forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\, du = C \int \frac{u}{u^2 + a^2}\, du + D \int \frac{1}{u^2 + a^2}\, du$$

Então, a primeira integral é um logaritmo, e a segunda é expressa em termos de tg^{-1}.

Caso IV $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Se $Q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, em vez de uma única fração parcial $\boxed{9}$, a soma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$. Cada um dos termos $\boxed{11}$ pode ser integrado usando uma substituição ou completando primeiramente o quadrado, se necessário.

Exemplo 8

Calcule $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx.$

Solução: A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x$$

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$

$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A.$$

Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A + B = 0, \quad C = -1, \quad 2A + B + D = 2, \quad C + E = -1, \quad A = 1,$$

que tem a solução $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 0$.

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

de modo que

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K$$

Substituições Racionalizantes

Substituições Racionalizantes

Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por meio de substituições apropriadas. Em particular, quando um integrando contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz. Outros exemplos aparecem nos exercícios.

Exemplo 9

Calcule $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx.$

Solução: Seja $u = \sqrt{x+4}$. Então $u^2 = x + 4$, assim $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$. Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u - 2)(u + 2)$ e usando as frações parciais ou usando a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4} = 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$