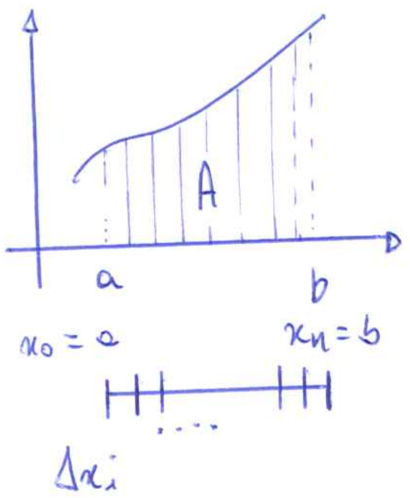
Seja o gráfico de $f(x)$, contínua em $[a,b]$ e integrável, temos a área como

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad , \text{onde}$$

$x_0 = a \leq c_i \leq b = x_n$, ou seja

$a \leq c \leq b$



Esse resultado existe independentemente de escolha de c_i e Δx_i. Por outro lado, $f(x)$ admite uma primitiva $F(x)$ em $[a,b]$, logo, $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$. Assim, seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, uma partição qualquer de $[a,b]$, podemos escrever:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]$$

Então, pelo teorema do valor médio, temos que existe $\bar{c}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1})$$

Substituindo, vem

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i$$

Devido a partição P ser arbitrária, então, utilizando o limite

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A \quad , \text{ou seja}$$

$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Calcular $\int_a^b e^x dx$ em termos de soma:

① $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

② Tomemos para pontos ξ_i os extremidades esquerdas e formemos a soma:

$$S_n = e^a \Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \dots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x =$$

$$= e^a\left(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}\right)\Delta x$$

A expressão entre parênteses é uma progressão geométrica de razão $e^{\Delta x}$ do primeiro termo 1, logo:

Obs: Soma de PG $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

$$S_n = e^a\left(\frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}\right)\Delta x$$

Como a extremidade direita do intervalo é b e $b = n\Delta x + a$ temos que $n\Delta x = b - a$, assim:

$$S_n = e^a\left(e^{b-a} - 1\right)\frac{\Delta x}{(e^{\Delta x} - 1)}$$

$$S_n = (e^b - e^a)\frac{\Delta x}{(e^{\Delta x} - 1)}$$

→ Assumindo que $\Delta x \to 0$, no limite temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}, \text{ usando L'Hôpital,}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{e^{\Delta x}} = 1.$$

Por conseguinte, tomemos o limite de S_n, sendo $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, como

$$n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

quando $\Delta x \to 0$

$n \to \infty$, então ⋆

$$\star \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(e^b - e^a).1 = e^b - e^a,$$

→ ou seja, $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ é

$$\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_{x=a}^{x=b} = e^b - e^a.$$