Seção 24– Revisão sobre séries de potências

Vamos revisar alguns fatos básicos a respeito de séries de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, que serão úteis no estudo de suas aplicações à resolução de equações diferenciais. Vamos começar examinando alguns exemplos simples. O mais comum é que $x_0 = 0$. Começamos com a série geométrica de razão x , $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, que converge quando a razão $|x| < 1$. Sabemos que a soma da série geométrica é $(1-x)^{-1}$. Temos então a função

$$f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ . \tag{1}$$

A partir de (1) é possível obter novos desenvolvimentos em série, derivando termo a termo,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} \ , \tag{2}$$

ou por integração termo a termo,

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ . \tag{3}$$

As séries (1) e (2) convergem para x no intervalo $(-1,1)$. Já em (3), o intervalo de convergência é $[-1,1)$, passando a incluir o ponto $x=-1$. Para $x = -1$, a série alternada $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge pelo Teste de Leibniz (a soma desta série é $-\ln 2$). Nestes exemplos vemos que derivando ou integrando termo a termo a série de potências, a única alteração sofrida pelo intevalo de convergência foi quanto a incluir ou não as extremidades. O raio de convergência não se alterou. Para observar novamente este fato, integramos (3) termo a termo. Obtemos

$$\big(1-x\big)\ln(1-x) + x = \int_0^x -\ln(1-t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \ . \tag{4}$$

O intervalo de convergência da série (4) é $[-1,1]$. De fato,

$$\left|\frac{x^n}{n(n-1)}\right| \le \frac{1}{n(n-1)} \ , \qquad \text{para todo } \ x \in [-1,1] \text{ e todo } \ n \ge 2$$

e a série numérica $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge, pelo teste da comparação no limite para séries de termos positivos, comparando com a série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$, que é convergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n-1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

Como o limite é finito e positivo, ambas as séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n-1)}$ e $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ têm o mesmo caráter, ou ambas convergem ou ambas divergem. Mas é sabido que a segunda converge (ela faz parte da coleção standard das séries conhecidas usadas para comparar com séries desconhecidas). Logo, a primeira também converge.

Logo $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ converge para todo $x \in [-1, 1]$.

Pondo em termos mais sistemáticos, enunciamos o seguinte teorema.

Teorema. Uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge em um intervalo centrado no ponto x_0, com raio R, $0 \le R \le +\infty$, chamado de raio de convergência da série de potências. A série pode ser derivada e integrada termo a termo, sem que com isto se altere seu raio de convergência (o intervalo de convergência pode mudar, pode passar a incluir ou deixar de incluir uma ou ambas as extremidades, mas fora isto, não muda, de modo que o raio de convergência permanece o mesmo).

Conseqüência: Se $f(x)$ é definida como a soma $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, para $|x - x_0| < R$, então, fazendo $x = x_0$, todos os termos da série se anulam, exceto o pimeiro termo a_0 e obtemos

$$a_0 = f(x_0)\,.$$

Por derivação, temos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}\,.$$

Fazendo $x = x_0$, todos os termos da série se anulam, exceto o pimeiro termo, que é o termo constante a_1. Desta foram, obtemos

$$a_1 = f'(x_0)\,.$$

Derivando uma segunda vez, temos

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}\,.$$

Fazendo depois $x = x_0$, obtemos

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}\,.$$

Analogamente, fazendo $x = x_0$ em

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x - x_0)^{n-3}\,,$$

obtemos

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}\,.$$

De um modo geral, derivando n vezes e fazendo $x = x_0$, obtemos

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Conclusão: Se quisermos desenvolver uma função $f(x)$ em série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\,,$$

para x próximo de x_0, a única alternativa que poderá funcionar será tomando $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Observação Útil: Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$, para $|x-x_0| < \delta$, então $a_n = 0$, para todo n. A justificativa é muito simples. Neste caso temos $f(x) = \text{const} = 0$ em (5) acima. Logo, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$. Esta observação é crucial para o método das séries de potências. De fato, já a usamos, sem chamar atenção, nos exemplos da Seção 21. Por exemplo, no Exemplo 1 daquela seção, chegamos na expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} + (n+1)\,a_n\Big]x^n = 0\,.$$

Pondo $b_n = (n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} + (n+1)\,a_n$, temos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$, para todo x em um intervalo centrado no ponto 0. Segue desta observação que podemos concluir que $b_n = 0$ para todo n, ou seja, fica justificada a fórmula de recorrência $(n+2)\,a_{n+2} + a_n = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Exemplo: Série Binomial

Consideremos a função $f(x) = (1+x)^a$, onde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ (se a assumir um destes valores, desenvolvemos $f(x)$ pelo binômio de Newton), definida para $x > -1$ (esta restrição no domínio é porque em geral só quando a base é positiva a exponencial está definida). Temos

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1\\
&f'(x) = a(1+x)^{a-1}\,, \qquad f'(0) = a\\
&f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}\,, \qquad f''(0) = a\,(a-1)\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(0) = a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)\,.
\end{aligned}$$

Logo, se for possível expressar $f(x) = (1+x)^a = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como soma de série de potências, esta expressão será

$$\begin{aligned}
f(x) = (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}\,x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\,x^3 + \cdots\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\,(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}\,x^n\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Enfatizamos que não está ainda estabelecida a veracidade da igualdade acima. O primeiro passo nesta direção será estudar o raio de convergência da série. Dado um $x > -1$, queremos saber se para este x a série converge ou não. Usamos o Teste da Razão. O Teste da Razão nos diz que se o limite da razão entre termos consecutivos de uma série for menor do que 1, então a série converge, e se o mesmo limite for maior do que 1 então a série diverge. Aplicando o Teste da Razão à série (6), temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(a-1)\cdots(a-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a-n)x}{n+1}\right| = |x|\,.$$

Portanto, a série (6) converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Logo, o raio de convergência é $R = 1$. Logo, para $|x| < 1$, a série (6) representa uma certa função

$$g(x) = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}\,x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\,x^3 + \cdots \ .$$

A questão agora é saber se $g(x) = f(x)$. Por derivação termo a termo, temos

$$g'(x) = a\left[1 + \frac{a-1}{1!}\,x + \frac{(a-1)(a-2)}{2!}\,x^2 + \cdots\right] .$$

Multiplicando por $1 + x$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\big(1+x\big)g'(x) = \\
&= a\left[1 + \frac{a}{1!}\,x + \cdots + \left(\frac{\big(a-1\big)\big(a-2\big)\cdots\big(a-n\big)}{n!} + \frac{\big(a-1\big)\big(a-2\big)\cdots\big(a-n+1\big)}{\big(n-1\big)!}\right)x^n + \cdots\right] \\
&= a\left[1 + \frac{a}{1!}\,x + \cdots + \frac{a\big(a-1\big)\cdots\big(a-n+1\big)}{n!}\,x^n + \cdots\right] \\
&= a\,g(x) \ .
\end{aligned}$$

Verificamos, então, que a função $g(x)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} \big(1+x\big)g'(x) = ag(x) \\ g(0) = 1 \end{cases} \tag{7}$$

ou seja, do mesmo PVI do qual $f(x)$ é solução. Mas um PVI como (7) tem solução única. Logo, $f(x) = g(x)$. Também é possível resolver a equação do PVI (7) por separação de variáveis e usando a condição inicial, concluirs que $f(x) = g(x)$. De fato,

$$\big(1+x\big)\frac{dg}{dx} = a\,g \implies \int \frac{dg}{g} = \int \frac{a}{1+x}\,dx \implies \ln g = a\ln\big(1+x\big) + \ln C \implies$$

$$g(x) = C\big(1+x\big)^a = Cf(x) \ .$$

Como $g(0) = 1$, concluímos, finalmente, que $g(x) = \big(1+x\big)^a = f(x)$. Fica, portanto, estabelecida a validade da expansão em série binomial.

$$\big(1+x\big)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\big(a-1\big)\cdots\big(a-n+1\big)}{n!}\,x^n \ , \qquad \text{para } \ |x| < 1 \ .$$

Aplicação: Fazendo $a = -\dfrac{1}{2}$ e substituindo x por $-x$, obtemos

$$\big(1-x\big)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^3 + \cdots \ , \quad \text{para } |x| < 1 \, .$$

Substituindo x por x^2, obtemos, ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^6 + \cdots \ , \qquad \text{para } \ |x| < 1 \ .$$

Substituindo x por t e integrando em relação a t entre 0 e x, obtemos, finalmente,

$$\operatorname{arcsen} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots \ , \quad \text{para } |x| < 1 \, .$$

Definição: Uma função $f(x)$ definida numa vizinhança de um ponto x_0 é dita analítica neste ponto se admitir uma representação em série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n \ ,$$

válida em um intervalo centrado no ponto x_0 e com raio positivo.

Observações: 1) Toda função analítica no ponto x_0 é infinitamente diferenciável numa vizinhança deste ponto.

2) Nem toda função infinitamente diferencivel é analítica. O exemplo clássico, devido a Cauchy (1789–1857), é a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ se } \ x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \ x = 0 \end{cases}$$

Quando $x \longrightarrow 0$, temos que $-\dfrac{1}{x^2} \longrightarrow -\infty$ e mostra-se que $e^{-\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 0$ tão rápido, isto é, o grau de tangência de $f(x)$ ao eixo dos X, é tão grande que vale

$$f^{(n)}(0) = 0 \ , \qquad \text{para todo } \ n \ . \tag{8}$$

Uma indicação de como isto pode ser feito é, por derivação, escrever

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \, e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \ .$$

Quando $x \longrightarrow 0$, temos que $\dfrac{1}{x^3} \longrightarrow \infty$, mas $e^{\frac{1}{x^2}} \longrightarrow \infty$ muito mais rápido, de modo que $f'(x) \longrightarrow 0$. Derivando mais uma vez,

$$f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \ .$$

Analogamente, quando $x \longrightarrow 0$, temos que o polinômio em $\dfrac{1}{x}$ tende $-\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{4}{x^6} \longrightarrow \infty$, mas a exponencial $e^{\frac{1}{x^2}} \longrightarrow \infty$ muito mais rápido, de modo que $f''(x) \longrightarrow 0$. Analogamente, podemos obter para qualquer ordem de derivação $f^{(n)}(x) \longrightarrow 0$. Assim (8) pode ser justificado.

Se fosse possível representar a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ como soma de uma série de potências, como vimos acima, teríamos

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \ , \qquad \text{para todo } \ n$$

e de (8) seguiria que $f(x) = 0$ numa vizinhana de 0, o que é uma contradição. Logo esta função, apesar de ser infinitamente diferenciável, não é analítica em 0.

3) As funções elementares são, em geral, analíticas.

4) Dois casos extremos correspondem a raios de convergência 0 e ∞. O raio de convergência de uma série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ é ∞ se ela converge para todo x real. Neste caso a série define uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O raio de convergência de uma série de potências

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ é 0 se ela converge somente para todo $x = x_0$. Neste caso a série não define nenhuma função. Um exemplo de série de potências com raio de convergência $R = \infty$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

De fato, para qualquer número real x, o limite da razão entre termos concecutivos da série é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto, pelo Teste da Razão a série converge qualquer que seja x real. Analogamente, um exemplo de série de potências com raio de convergência $R = 0$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n .$$

Neste exemplo, para qualquer número real $x \neq 0$, o limite da razão entre termos concecutivos da série é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!\, x^{n+1}|}{|n!\, x^n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty > 1.$$

Pelo Teste da Razão, segue que a série diverge para qualquer $x \neq 0$. Portanto, o seu raio de convergência é 0.

Observação adicional: Uma questão interessante é: dada uma função $f(x)$ analítica no ponto x_0, existe alguma maneira de saber de antemão qual vai ser o raio de convergência da série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$? Vamos examinar alguns exemplos, sempre com $x_0 = 0$.

1– Se $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, vimos que o raio de convergência é $R = 1$. Isto é bem razoável, já que o domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e, portanto, o maior intervalo centrado em $x_0 = 0$ contido no domínio tem raio $R = 1$.

2– Para $f(x) = \operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \dfrac{x^7}{7} + \cdots$, vimos que também $R = 1$. O domínio da função é o intervalo $[-1, 1]$. Mais uma vez, o maior intervalo centrado em $x_0 = 0$ e contido no domínio tem raio $R = 1$.

3– Do item 1 acima, substituindo x por $-x^2$, obtemos

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots \ , \qquad \text{para} \ \ |x| < 1 \ . \tag{9}$$

O domínio da função $g(x)$ é todo $\mathbb{R}$, fazendo, à primeira vista, pensar que o raio de convergência da série deveria ser $R = \infty$. No entanto vimos que $R = 1$. A aparente contradição desaparece quando percebemos que a função está definida também para todos os valores complexos de x, exceto para $x = \pm i$. Pensando assim, seu domínio passa a ser $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ e assim o maior disco centrado em 0 e contido no domínio tem raio $R = 1$.

Estes exemplos ilustram um fato que se estuda em Funções de Variável Complexa. Podemos saber de antemão o raio de convergência da série de potências que representa uma função $f(x)$

no ponto x_0. Para isto, devemos identificar qual é o domínio máximo de $f(x)$ considerada como definida para valores complexos da variável. O raio de convergência é o raio do maior disco centrado em x_0 e contido no domínio.

Notamos, para finalizar, que partir do exemplo (9) do item 3 acima, podemos obter a expansão de uma outra função elementar. Integrando entre 0 e x, obtemos

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \ , \qquad \text{para} \ \ |x| < 1 \ .$$

O raio de convergência da série é 1, apesar de que seu domínio é todo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Novamente, o fato de que raio de convergência é 1 está de acordo com o fato que se estuda em Variável Complexa, que o domínio dessa função é $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.