Seção 2: Interpretação Geométrica – Campo de Direções

Definição. Dizemos que uma EDO de 1ª ordem está em *forma normal* se y' está isolado, ou seja, se a equação for da forma

$$y' = F(x,y)\ ,$$

onde $F(x,y)$ é uma função de duas variáveis.

Exemplos:

$y' = xy$ está em forma normal;

$\big(x+y\big)y' = xy$ não está, mas pode facilmente ser posta em forma normal;

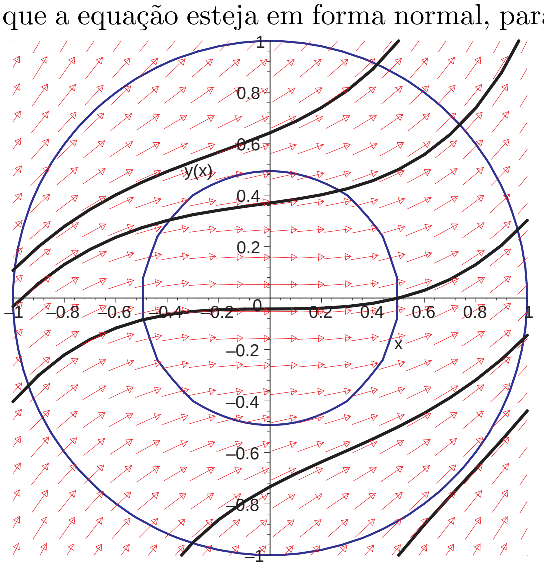
$xy' + \big(y'\big)^3 = y$ não está em forma normal.

Exemplo 1. Consideremos a equação diferencial

$$y' = x^2 + y^2\ . \tag{1}$$

Esta é uma EDO de 1ª ordem em forma normal. Não sabemos resolver a equação (1), mas vamos ver que por considerações geométricas é possível ter uma idéia do comportamento de suas soluções.

Qual a declividade da solução que passa pelo ponto $(1,1)$? Mais precisamente, qual é a declividade da reta tangente à solução passando pelo ponto $(1,1)$, nesse ponto? A própria equação nos diz que essa declividade vale $y' = 1^2 + 1^2 = 2$. Desenhando, então, um pequeno segmento de reta centrado no ponto $(1,1)$ e com declividade 2, sabemos que este pequeno segmento tangencia a solução no ponto $(1,1)$. Fazemos o mesmo procedimento com um número grande de pontos: para cada um destes pontos $P = (x,y)$ calculamos o valor do coeficiente angular $y' = F(x,y) = x^2 + y^2$ e desenhamos um pequeno segmento de reta com esta declividade, centrado no ponto $P = (x,y)$. Fica determinado assim um campo de direções, a cada ponto corresponde uma direção. As soluções da equação diferencial são precisamente as curvas que podem ser traçadas tangenciando em cada um de seus pontos o campo de direções. É importante que a equação esteja em forma normal, para que, dado qualquer ponto (x,y) possamos facilmente calcular o valor $F(x,y)$ da declividade neste ponto. Existem programas de computador para desenhar campos de direções, mas quando se usa um processo mais manual, para tornar a tarefa exeqüível, é conveniente organizar o trabalho da seguinte forma: desenhar de uma vez todos os pequenos segmentos do campo de direções que tenham uma mesma inclinação. Em nosso exemplo, da EDO $y' = x^2 + y^2$, podemos começar desenhando todos os segmentos de inclinação 1. O que facilita é que eles são todos paralelos entre si. Mas em que pontos devemos centrá-los? Nos pontos que satisfazem $x^2+y^2 = 1$ (um círculo). A seguir podemos desenhar os vários pequenos segmentos de inclinação 1/2.

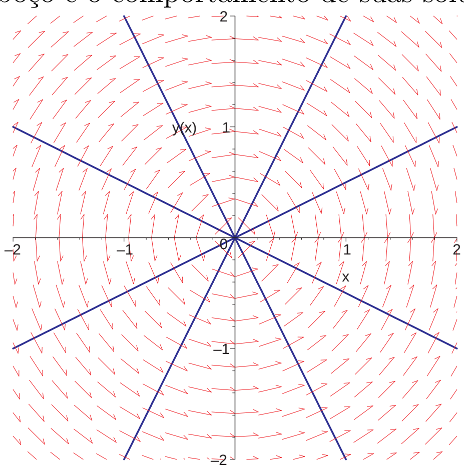


Eles estão centrados nos pontos que satisfazem $F(x,y) = x^2 + y^2 = 1/2$ (um círculo interno ao anterior). E vamos continuando este processo. Para diversos valores de k vamos desenhando, de uma vez, todos os segmentos de inclinação k. Precisamos descobrir onde estes segmentos estão centrados. No presente exemplo são em pontos sobre um círculo, mas, no caso geral, são os pontos cujas coordenadas satisfazem a equação $F(x,y) = k$. Estas equações $F(x,y) = k$ determinam uma família de curvas no plano, chamadas de *isóclinas*. Esta palavra significa mesma inclinação, lembre que *iso=igual*. No presente exemplo, todas as isóclinas são círculos, exceto aquela que corresponde à inclinação $k = 0$, que se reduz à origem. Uma vez tendo o esboço do campo de direções, podemos tentar esboçar as curvas que tangenciam o campo. Elas são as soluções da EDO. Assim mesmo sem saber resolver a equação, podemos ter uma idéia do comportamento de suas soluções. É claro que quanto mais preciso for o esboço do campo de direções, melhor será esta idéia sobre o comportamento das soluções.

Exemplo 2. Consideremos a equação diferencial

$$y' = -\frac{x}{y}\,. \tag{2}$$

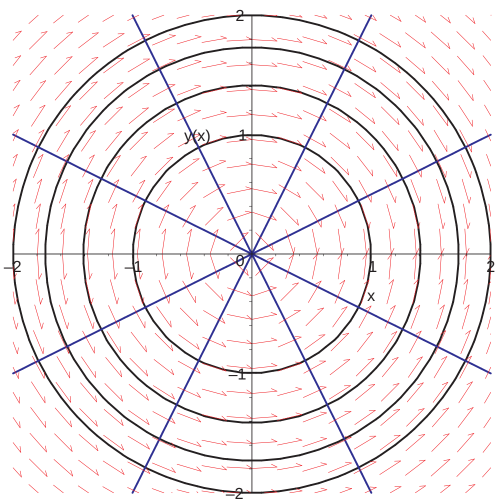
Novamente é uma EDO de 1ª ordem em forma normal. Esta equação pode ser facilmente resolvida separando as variáveis, como já foi feito na Sessão 1. Mesmo assim é interessante aplicar o método geométrico exposto acima para, antes mesmo de resolver a EDO, obter um esboço e o comportamento de suas soluções. Inicialmente, notemos que nossa EDO faz sentido



apenas para $y \neq 0$. Ou seja, para sermos bem precisos, devemos resolvê-la ou no semiplano superior $y > 0$, ou no semiplano inferior $y < 0$. O eixo dos X está fora de cogitação. As isóclinas da EDO são as curvas

$$-\frac{x}{y} = k,$$

que representa a família das retas passando pela origem. No entanto, como o eixo dos X está fora de cogitação, a origem também está. Concluímos que as isóclinas na verdade são as semi-retas não horizontais partindo da origem. Como vimos no exemplo 1, sobre cada uma destas semi-retas devemos desenhar pequenos segmentos de reta paralelos entre si, ou seja com mesma inclinação. Qual o valor dessa inclinação? Para descobrir isto, note que



a isóclina

$$f(x,y) = -\frac{x}{y} = k$$

é parte da reta de equação $y = -\dfrac{x}{k}$ que tem declividade $-\dfrac{1}{k}$. Desenhamos pequenos segmentos de declividade k centrados nos pontos da reta $y = -\frac{1}{k}\,x$. Note que os segmentos desenhados são todos perpendiculares à isóclina $y = -\frac{1}{k}\,x$ (segue do fato que duas retas são perpendiculares quando o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1). Agora fica muito fácil fazer o esboço do campo de direções. Primeiro traçamos as retas passando pela origem. Em seguida, para cada uma delas traçamos pequenos segmentos de retas ortogonais. Obtemos a figura mostrada acima, que sugere fortemente que as soluções são os círculos passando pela origem. Mas só vamos ter certeza de que são círculos e não, por exemplo, elipses, depois de resolvermos a EDO. Na verdade não são círculos completos pois a equação não faz sentido nos pontos do eixo X, são apenas os semicírculos que resultam de remover os pontos sobre o eixo X. Além disto, círculos não são gráficos de funções.

Para resolver a EDO, começamos reescrevendo na notação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\,.$$

A seguir, separamos as variáveis

$$y\,dy = -x\,dx$$

e integramos

$$\int y\,dy = -\int x\,dx.$$

Quando calculamos as integrais, como já foi explicado no Exemplo 1 da Sessão 1, só é necessário considerar constante de integração de um dos lados. Portanto,

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

É mais interessante escrever na forma

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Multiplicando por 2 e chamando $2C = K$, obtemos finalmente a solução geral em forma implícita

$$x^2 + y^2 = K,$$

comprovando que é uma família de círculos.

Observação importante. Geometricamente, resolver uma EDO (de 1ª ordem em forma normal) significa encontrar as curvas que tangenciam o campo de direções. Então, dado um ponto (x_0, y_0), a partir dele, começamos a nos deslocar na direção do campo. Mas, à medida que avançamos, a direção do campo muda. Devemos, então, constantemente ir corrigindo o rumo, a fim de acompanhar o campo de direções. Esta é a idéia intuitiva por traz do teorema abaixo. É importante ter consciência de que o argumento que acabamos de apresentar é puramente intuitivo, para que se comprenda como é natural o que o teorema afirma, mas não serve como o demonstração do mesmo. O teorema só pode ser realmente provado em um curso mais avançado.

Teorema de Existência e Unicidade. *Dada uma EDO de 1ª ordem em forma normal*

$$y' = F(x, y)\ ,$$

onde $F(x, y)$ é uma função de duas variáveis, tendo derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em uma região D do plano, então em cada ponto (x_0, y_0) da região D passa uma e somente uma solução da EDO. Em outras palavras, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução única, definida em um intervalo aberto contendo x_0.

O Teorema acima faz duas afirmações. A primeira é que em cada ponto da região D passa uma solução da EDO (existência). A segunda é que passa uma só (unicidade). Decorre da unicidade que duas soluções não podem nunca se encontrar, nem se cruzar e nem se tangenciar. Isto, é claro, para as equações satisfazendo as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade. Vamos ver com exemplos que fora destas hipóteses já não se pode garantir que isto não aconteça.

Exemplo 3. Consideremos a EDO $xy' = 2y$.

Esta EDO pode ser resolvida por separação de variáveis.

$$x\,\frac{dy}{dx} = 2y \qquad , \qquad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \quad \text{ou} \quad y = 0\ .$$

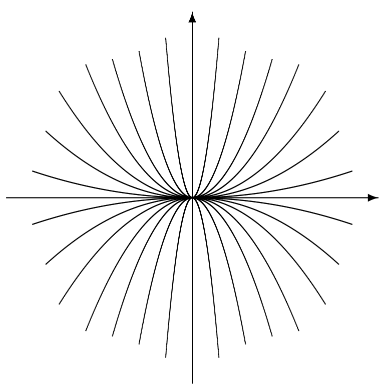
Uma solução particular é $y = 0$. As demais são econtradas integrando

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \qquad , \qquad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C\ .$$

Acima já escrevemos a constante de integração em forma de $\ln C$. Logo a solução geral é

$$y = Cx^2\ .$$

Note que a solução particular $y = 0$ está incluída na solução geral, para $C = 0$.



Ao lado estão mostradas as soluções da EDO. Note que a região D em que a equação faz sentido é o plano todo. Em **aparente** contradição com o Teorema de Existência e Unicidade, observamos:

– Pelo ponto $(0, 0)$ passa mais de uma solução (todas as soluções passam pela origem).

– Se $b \neq 0$, pelo ponto $(0, b)$ não passa nenhuma solução.

Na verdade não há aqui contradição alguma com o Teorema de Existência e Unicidade. A equação $xy' = 2y$ não está em forma normal e, portanto, o teorema nada afirma a respeito dela.

É interessante notar que se diminuirmos a região, tomando D como sendo, por exemplo, o semiplano da direita $x > 0$, nesta região menor a equação pode ser posta na forma normal,

$$y' = \frac{2y}{x}$$

e, em completo acordo com o Teorema de Existência e Unicidade, em cada ponto do semiplano $x > 0$ passa uma e uma só solução da EDO.

Exemplo 4. Dada a curva $y = x^3$, consideremos a família de todas as curvas dela obtidas por translação horizontal

$$y = (x - C)^3\ . \tag{3}$$

Consideremos agora a situação inversa de determinar uma EDO de primeira ordem da qual a família (3) seja a solução geral. Por derivação, econtramos

$$y' = 3(x - C)^2\ .$$

Mas de (3), segue que $x - C = y^{\frac{1}{3}}$ e, então,

$$y' = 3\,y^{\frac{2}{3}}\ . \tag{4}$$

Concluímos que a família (3) é solução da EDO (4). No entanto, é fácil verificar que a função constante $y = 0$ também é uma solução da EDO (4). Assim, pelo ponto $(0, 0)$ passa uma solução $y = x^3$, que faz parte da família (3), para $C = 0$, mas passa também uma outra solução, a função $y = 0$. Estamos, de fato, diante de uma EDO (3) em forma normal, para a qual passam duas soluções diferentes pelo ponto $(0,0)$. Cabe então perguntar porque isto não contradiz o Teorema de Existência e Unicidade. Notemos que (3) é uma EDO da forma $y' = F(x,y)$, onde $F(x,y) = 3\,y^{\frac{2}{3}}$. Mas no Teorema de Existência e Unicidade existe a **hipótese** de que função $F(x,y)$ deve ter derivadas parciais de primeira ordem contínuas. No presente exemplo,

$$F_y(x,y) = 2\,y^{-\frac{1}{3}}$$

e esta última expressão não está definida e muito menos é contínua para $y = 0$.