Seção 3: Equações Separáveis

Definição. Uma EDO de 1ª ordem é dita *separável* se for da forma

$$y' = f(x)\, g(y),$$

onde $f(x)$ e $g(y)$ são funções de uma variável. Ou seja, é o caso de equação em forma normal $y' = F(x, y)$ em que $F(x, y)$ é do tipo particular $F(x, y) = f(x)\, g(y)$.

Exemplos: 1. A equação $y' = \dfrac{2x}{1+2y}$ é separável, com $f(x) = 2x$ e $g(y) = \dfrac{1}{1+2y}$.

2. A equação $y' = y + 3x$ não é separável.

Método de Resolução. As equações separáveis são aquelas em que se pode separar as varáveis, passando para um lado da igualdade os termos contendo y e dy e para o outro lado os termos contendo x e dx. Já resolvemos equações separáveis pelo método de separação de variáveis em vários exemplos das seções anteriores. Vamos apenas comentar que

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \tag{1}$$

equivale a

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \qquad \text{ou} \qquad g(y) = 0.$$

Se y_0 é tal que $g(y_0) = 0$, é fácil verificar que a função constante $y(x) = y_0$ é uma solução da EDO (1). As demais são obtidas por integração

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx\, .$$

Admitindo que se consiga calcular as integrais acima, vamos obter a solução geral da EDO separável (1) na forma

$$\psi(y) = \varphi(x) + C\, , \tag{2}$$

onde $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ são certas funções de uma variável. O que queremos observar aqui é a forma como vamos encontrar a solução geral (2). Dado um x, não está dito quanto vale o y correspondente. Só é dada uma equação relacionando x e y. Em resumo, *ao resolvermos uma equação separável pelo método de separação de variáveis, vamos encontrar a solução geral* (2) *definida implicitamente. Em alguns exemplos conseguimos resolver a equação* (2)*, explicitando* y *como função de* x*. Em outros exemplos, isto pode ser muito difícil ou mesmo impossível. Pode ainda existir uma ou mais soluções não incluídas na solução geral. Estas serão da forma* $y = y_0$*, onde* y_0 *um zero da função* $g(y)$.

Exemplo 3. Resolver a EDO

$$xy' + y - y^2 = 0\, . \tag{3}$$

Esta equação é separável,

$$x\, \frac{dy}{dx} = y^2 - y\, ,$$

que é equivalente a

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x} \qquad \text{ou} \qquad y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = 1\, .$$

Verificamos que as funções constantes $y = 0$ e $y = 1$ são soluções da EDO (3). Ficamos com a integral

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Decompondo em frações parciais

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\,,$$

obtemos

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + \ln C\,.$$

A solução geral em forma implícita é

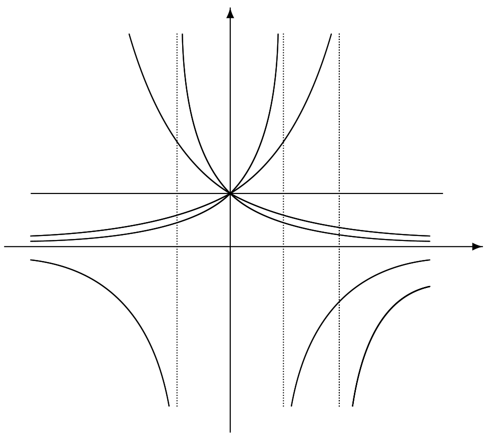
$$\frac{|y-1|}{|y|} = C|x|\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \frac{y-1}{y} = \pm Cx$$

ou ainda (permitindo que C assuma valores positivos e negativos), simplesmente,

$$\frac{y-1}{y} = Cx\,.$$

Neste exemplo, é simples obter y explicitamente isolando

$$1 - \frac{1}{y} = Cx \quad , \quad 1 - Cx = \frac{1}{y} \quad , \quad y = \frac{1}{1-Cx}\,.$$



Finalmente as soluções da EDO (3) são

$$y = \frac{1}{1-Cx} \quad , \qquad y = 0\,.$$

Note que aqui a solução particular $y = 1$ fica incluída na solução geral, para $C = 0$ e, por isto, não precisamos insistir nela. Mas a solução particular $y = 0$ não estão contida na solução geral para nenhum valor da constante C.

Ao lado está um esboço da família das soluções da EDO (3). Todas as curvas passam pelo ponto $(0, 1)$. As soluções preenchem o plano todo exceto os pontos $(0, y)$ sobre o eixo dos Y com $y \neq 0$, pelos quais não passa nenhuma solução. Isto só não contradiz o Teorema de Existência e Unicidade da Seção 2 porque, embora a EDO (3) faça sentido em todo o plano, ela só pode ser colocada em forma normal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - y}{x}$$

para $x \neq 0$, ou seja, fora do eixo Y.

Exemplo 4. Vamos formar problemas de valor inicial, acrescentando alguma condição inicial à mesma EDO considerada no Exemplo 3.

– Resolva o PVI abaixo, encontrando o intervalo máximo de definição da solução

$$\begin{cases} xy' + y - y^2 = 0 \\ y(-1) = 2 \end{cases} \tag{4}$$

Tomamos a solução geral encontrada acima e substituímos $x = -1$ e $y = 2$. Isto nos dá

$$2 = \frac{1}{1+C}\,.$$

Obtemos $C = -\dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}x} = \dfrac{2}{x+2}$. Esta solução não está definida para $x = -2$ e na EDO não tem nenhuma restrição adicional. Retirando do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais o elemento $x = -2$, sobram 2 intervalos, $(-\infty,-2)$ e $(-2,+\infty)$. Mas para cumprir a condição inicial, nossa solução precisa estar definida no ponto $x = -1$. Dentre os 2 intervalos, tomamos aquele que contém o ponto $x = -1$, ou seja $(-2,+\infty)$.

Conclusão: A solução do PVI (4) é a função $y = \dfrac{2}{x+2}$, definida o intervalo $I = (-2,+\infty)$.

– Resolva o PVI abaixo, encontrando o intervalo máximo de definição da solução

$$\begin{cases} xy' + y - y^2 = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Se substituirmos na solução geral $x = 2$ e $y = 0$, encontraremos uma condição impossível de ser cumprida. Isto se deve ao fato que a solução do PVI (5) não está incluída na solução geral da EDO, mas é precisamente a solução $y(x) = 0$. O intervalo de definição desta função é todo $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 5. Resolva o PVI abaixo, encontrando o intervalo máximo de definição da solução

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{1+2y} \\ y(2) = -1 \end{cases} \tag{6}$$

Denotando y' por $\dfrac{dy}{dx}$, separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y} \qquad , \quad \big(1+2y\big)dy = 2x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int \big(1+2y\big)dy = \int 2x\,dx\,.$$

Calculando as integrais, encontramos a solução geral em forma implícita: $y + y^2 = x^2 + C$.

Substituindo $x = 2$ e $y = -1$, encontramos $C = -4$. Portanto, a solução do PVI (6) em forma implícita é

$$y + y^2 = x^2 - 4\,.$$

Usando a fórmula de Bhaskara, podemos isolar y e encontramos

$$y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}}\,.$$

Para determinar qual é o sinal que serve, fazemos novamente $x = 2$ e $y = -1$. Temos

$$-1 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{4 - \frac{15}{4}}\,,$$

isto é,

$$-\frac{1}{2} = \pm\sqrt{4 - \frac{15}{4}}\,.$$

Portanto, o sinal que serve é o de menos. Logo, a solução do PVI (6) em forma explícita é

$$y = -\frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}}\ .$$

Vamos agora determinar o domínio da solução. É preciso que $x^2 - \frac{15}{4} \geq 0$, ou seja, $\frac{15}{4} \leq x^2$. Devemos ter

$$x \geq \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad \text{ou} \qquad x \leq -\frac{\sqrt{15}}{2}\ .$$

Os intervalos de definição de soluções de EDO's são tomados sempre abertos. Isto porque a EDO envolve derivada. No Cálculo, define-se derivada de uma função em um ponto interior do intervalo. Por isto, ficamos com $I = \big(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{2}\big)$ ou $I = \big(\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty\big)$. Mas o intervalo de definição da solução deve conter o x da condição inicial. Logo $I = \big(\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty\big)$.

<u>Observação</u>: Outra maneira de ver que o intervalo de definição não poderia ser fechado é notar que x nem poderia assumir o valor $\frac{\sqrt{15}}{2}$ por uma outra razão. Se $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$, então $y = -\frac{1}{2}$, anulando o denominador do lado direito da EDO.

A questão original está resolvida, mas é interessante voltar à solução geral $y + y^2 = x^2 + C$ da EDO e fazer uma análise geométrica. Por ser uma equação algébrica de grau 2, a solução geral é uma família de cônicas. Para ter uma idéia melhor, completamos os quadrados

$$y^2 + y + \frac{1}{4} = x^2 + C + \frac{1}{4}\ .$$

Incorporamos a fração do lado direito à constante, obtendo

$$x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = C\ ,$$

que é uma família de hipérboles (em alguns casos só metades de ramos de hipérboles).