UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FLAVIO HENRIQUE DE CARVALHO

JUROS CONTÍNUOS: UMA APLICAÇÃO DO USO DO NÚMERO DE EULER

CURITIBA

2024

FLAVIO HENRIQUE DE CARVALHO

JUROS CONTÍNUOS: UMA APLICAÇÃO DO USO DO NÚMERO DE EULER

Trabalho apresentado como requisito parcial à aprovação na disciplina MA22 - Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres

CURITIBA

2024

RESUMO

Neste trabalho é realizado um estudo sobre a evolução do conteúdo de juros envolvendo o ensino fundamental, ensino médio, disicplina de cálculo, análise real e aplicação em economia com o desenvolvimento de juros compostos com capitalização contínua e o uso do número de Euler.

Palavras-chaves: Matemática financeira. Número de Euler. Juros contínuos.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É evidente o aumento da preocupação da população e, consequentemente, dos poderes públicos em relação à educação financeira dos jovens brasileiros. O estado do Paraná por meio de sua Secretaria de Educação (SEED) oferta a disciplina tanto no ensino técnico como no ensino regular durante os três anos de ensino médio.

Um tópico que comumente era oferecido na disciplina de matemática foi absorvida pela educação financeira que é o entendimento e cálculo de juros. O grande problema, se é que podemos chamar assim, é a utilização apenas dos juros simples e compostos, sem que os alunos entendam completamente como funcionam os juros na vida real.

Com esse trabalho podemos ensinar a matemática financeira utilizando e demonstrando tópicos de matemática pura, englobando a aplicação e utilização da matemática bem como a sua beleza da matemática pela matemática.

2 JUROS NO ENSINO BÁSICO

2.1 JUROS SIMPLES

No regime de juros simples, os juros são calculados apenas sobre o capital inicial, resultando em crescimento linear. A fórmula para os juros simples é:

$$J = C \cdot i \cdot t, \tag{2.1}$$

onde:

J é o valor dos juros,

C é o capital inicial,

i é a taxa de juros (em decimal ou fração),

t é o tempo

O montante final M é dado por:

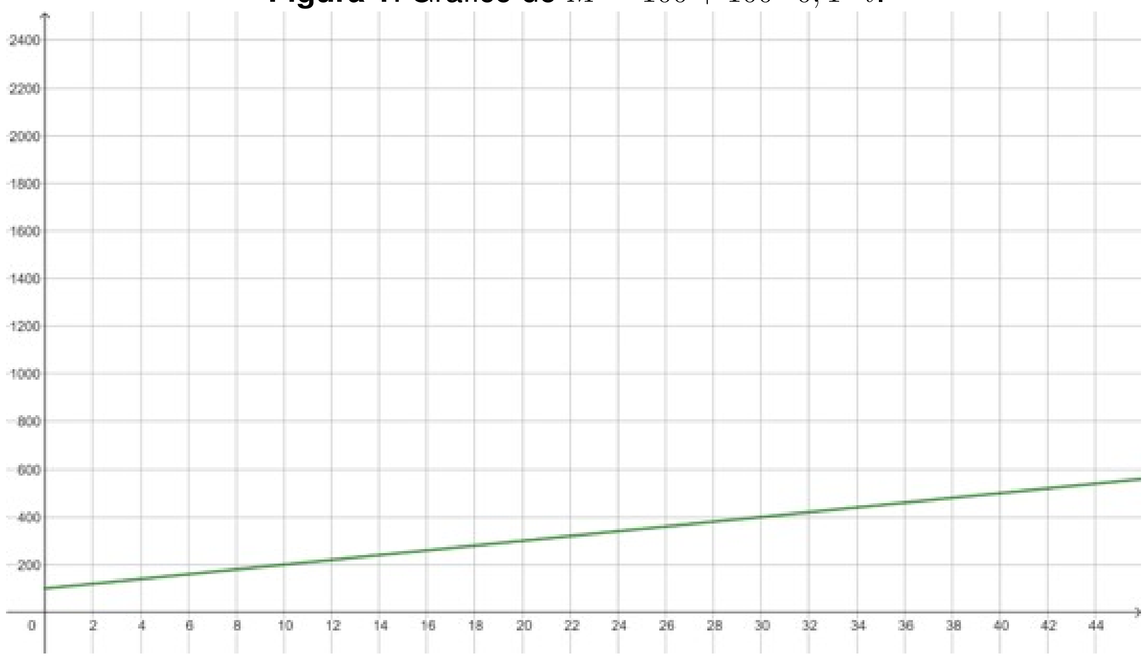
$$M = C + J \tag{2.2}$$

Utilizando (2.1) em (2.2), temos

$$M = C + C \cdot i \cdot t \tag{2.3}$$

Exemplo 01: Um capital de $C = 100$ reais, aplicado a uma taxa $i = 5\%$ ao ano temos o seguinte gráfico:

Figura 1: Gráfico de $M = 100 + 100 \cdot 0,1 \cdot t$.



Fonte: Imagem produzida pelo autor

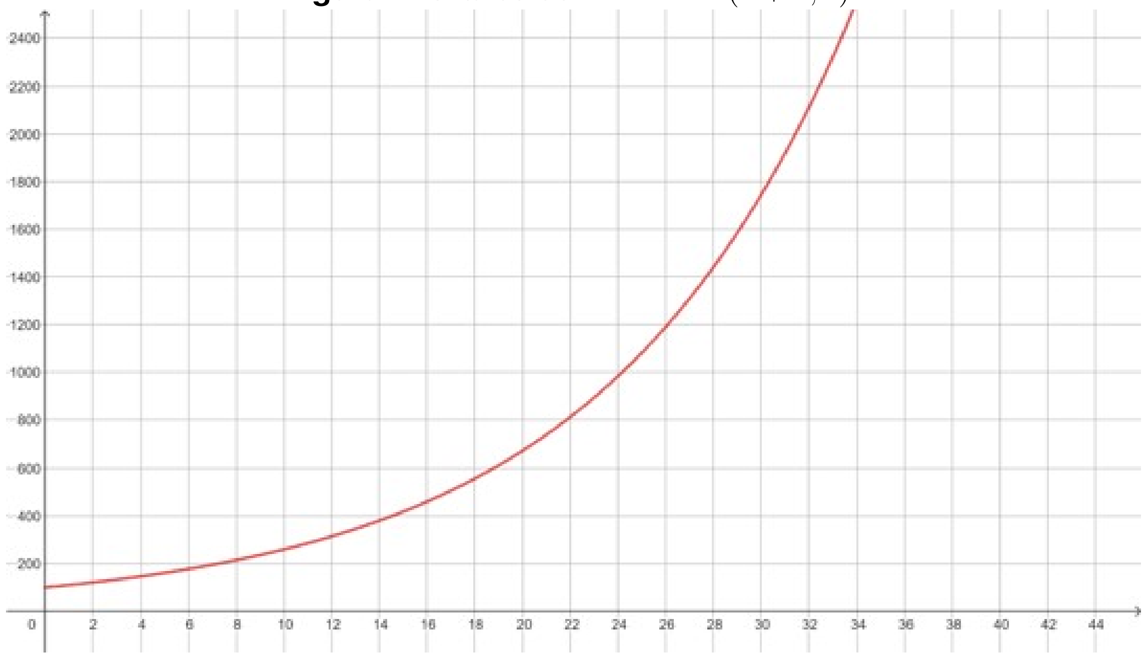
2.2 JUROS COMPOSTOS

No regime de juros compostos, os juros são acumulados sobre o capital inicial e os juros anteriores. A fórmula para o montante é:

$$M = C \cdot (1+i)^t, \tag{2.4}$$

Exemplo 02: Um capital de $C = 100$ reais, aplicado a uma taxa $i = 5\%$ ao ano temos o seguinte gráfico:

Figura 1: Gráfico de $M = 100 \cdot (1+0,1)^t$.



Fonte: Imagem produzida pelo autor

2.3 JUROS COMPOSTOS COM REPARTIÇÕES

No sistema de juros compostos mostrado a capitalização ocorre para os períodos determinados, no exemplo dado de $i = 10\%$ ao ano a capitalização está ocorrendo a cada ano.

Podemos pensar em mais capitalizações durante esse período, então pensando em ano semestres, devemos dividir a taxa de juros i por 2 e o tempo será multiplicado por 2 pois em um ano há dois semestres. A fórmula para essa repartição fica

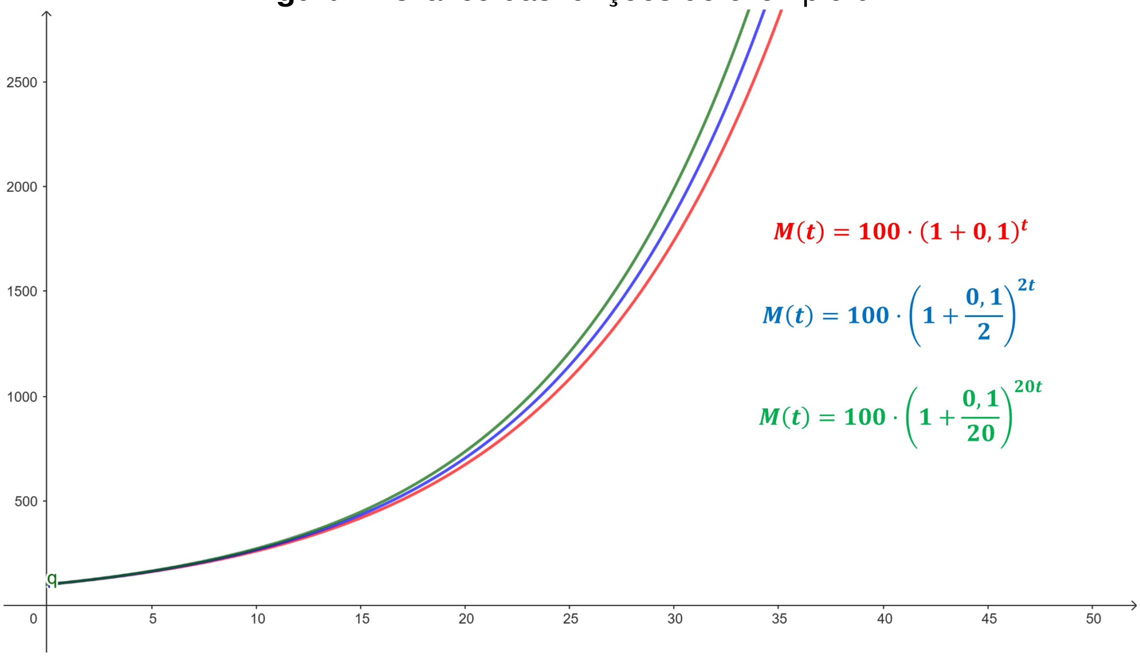
$$M = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2t}. \tag{2.5}$$

Analogamente, podemos realizar a função com o tempo com 20 capitalizações no período. Dessa forma, temos a fórmula

$$M = C \cdot \left(1 + \frac{i}{20}\right)^{20t}. \qquad (2.6)$$

Exemplo 03: Na Figura abaixo temos o gráfico das funções (2.4), (2.5) e (2.6) para os mesmos parâmetros do Exemplo 02:

Figura 2: Gráfico das funções do exemplo 02.



Fonte: Imagem produzida pelo autor

3 JUROS CONTÍNUOS

Se as capitalizações forem contínuas, teremos o número k de repartições tendendo ao infinito, ou seja, $k \to \infty$, dessa forma, o montante será um limite, como na fórmula abaixo:

$$M = \lim_{k\to\infty} C \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt}. \tag{3.1}$$

Como C é uma constante, podemos retirar do limite, logo,

$$M = C \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt}. \tag{3.2}$$

Fazendo uma mudança de variável conveniente

$$n = \frac{k}{i}, \tag{3.3}$$

implica em

$$\frac{i}{k} = \frac{1}{n} \tag{3.4}$$

e

$$k = n \cdot i. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.4) e (3.5) na expressão (3.2) e utilizando o fato que se $k \to \infty$, então $n \to \infty$, temos

$$M = C \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{i \cdot n \cdot t}. \tag{3.6}$$

que podemos reescrever como

$$M = C \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{i \cdot t}. \tag{3.7}$$

Como

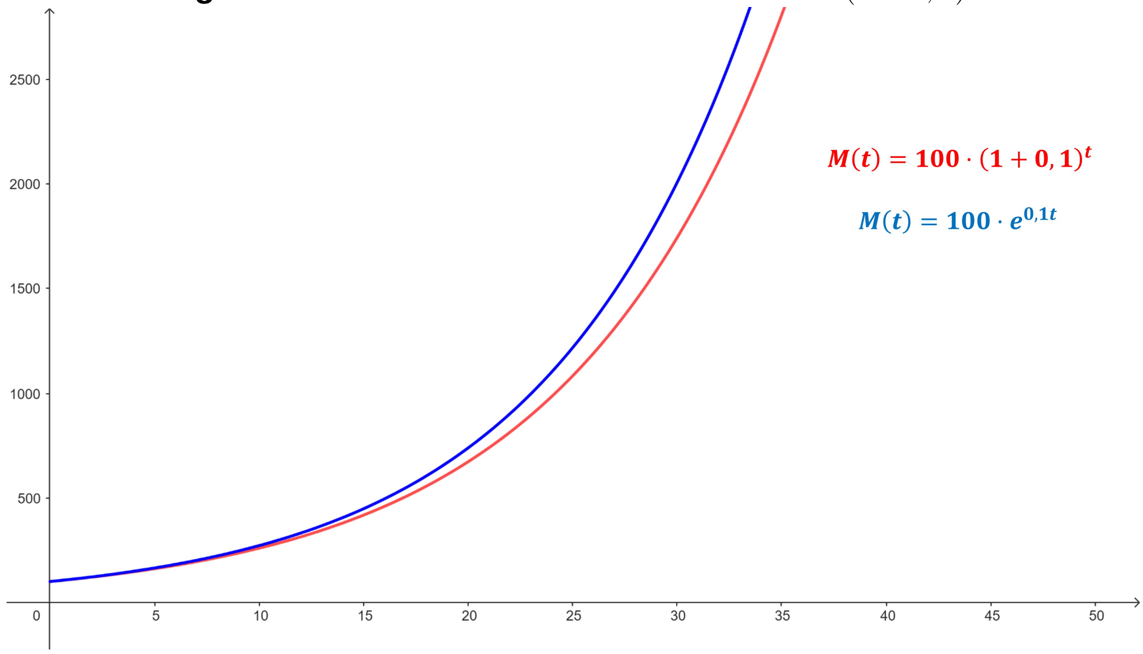
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e, \tag{3.8}$$

então temos a expressão

$$M = C \cdot e^{i \cdot t}. \tag{3.9}$$

A expressão (3.9) é a fórmula para o cálculo do montante M de um capital C aplicada a uma taxa i por um período t no sistema de capitalização contínua.

Figura 4: Gráfico de $M = 100 \cdot e^{0,1t}$ e $M = 100 \cdot (1 + 0,1)^t$.



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Com a Figura 3 e a Figura 4 é possível perceber que a função (2.6) é uma boa aproximação de (3.9) para os parâmetros utilizados nos exemplos.

3.1 A COMPARAÇÃO ENTRE JUROS CONTÍNUOS E JUROS COMPOSTOS

Pelos gráficos utilizados, é possível imaginar que juros contínuos serão maiores que juros compostos para qualquer taxa i, então é intuitivo querer demonstrar isso, dessa forma, podemos escrever as duas expressões, juros compostos e contínuos, como funções em relação à taxa i:

$$M_1(i) = C \cdot (1 + i)^t. \tag{3.10}$$

$$M_2(i) = C \cdot \left(e^i\right)^t. \tag{3.11}$$

Se os juros contínuos são maiores que juros compostos, temos $M_2 - M_1 > 0$ para todo $i > 0$, ou seja, temos

$$M_2(i) - M_2(i) = C\left(\left(e^i\right)^t - (1+i)^t\right). \tag{3.12}$$

Como $C > 0$, $1 + i > 1$ e $e^i > 1$, então temos $M_2 > M_1$ se $f(i) > 0$ para todo $i > 0$ com

$$f(i) = e^i - (1+i). \tag{3.13}$$

Derivando a função f, temos

$$f'(i) = e^i - 1, \tag{3.14}$$

analisando $f(i) = 0$ para encontrar os pontos críticos, temos

$$e^i - 1 = 0 \Rightarrow i = 0, \tag{3.15}$$

portanto, $i = 0$ é um ponto crítico, podendo ser ponto de máximo ou ponto de mínimo. Realizando a derivada segunda, temos

$$f''(i) = e^i, \tag{3.16}$$

portanto, $i = 0$ é um ponto de mínimo pois a $f''(i) > 0\ \forall i > 0$ e, consequentemente, $f(i)$ é uma função crescente para todo $i > 0$

Dessa forma, podemos concluir que juros contínuos é maior que os juros compostos para qualquer taxa de juros positiva.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi mostrar uma aplicação de alguns conteúdos da disciplina de cálculo diferencial e integral em um leve aprofundamento em um tópico visto no ensino básico e, com isso, verificar que é possível aplicar cálculo no ensino básico ao simplificar e omitir algumas informações como já é feito ao utilizar diversas fórmulas na álgebra e geometria.

REFERÊNCIAS

[1] BOYCE, W. E.;DIPRIMA, R.C.; MEADE, D.B.urari, I.T.C. *Equações Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 11 Ed. LTC, 2020.

[2] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo* Vol. 1. 6 Ed. LTC, 2019.

[3] GEOGEBRA. Disponível em <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em 24 de Novembro de 2024.

[4] VILLANI, N. N. R. *O número de Euler no Ensino Médio: propostas de abordagens com aplicações*. Dissertação de mestrado, UNESP, 2017. Disponível em <https://repositorio.unesp.br/items/ccf55743-b5b0-44c3-8969-3facbfa17475>