4 POSIÇÕES RELATIVAS

Nosso objetivo nesta seção é entender a posição relativa entre duas retas, dois planos e ou uma reta e um plano, isto é, se estes se interseccionam, se são paralelos, etc.

4.1 POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE RETAS

4.1.1 Posição Relativas entre Retas no Plano

Começaremos com o estudo da posição relativa de duas retas no plano. Lembremos primeiro que duas retas **em um mesmo plano** podem ser:

- coincidentes, i.e., são a mesma reta;
- paralelas;
- concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto.

Tomemos então duas retas dadas em forma vetorial como $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}t$.

Como a direção de uma reta é dada pelo seu vetor direcional, temos que as retas r e s são paralelas se seus vetores diretores v e u são paralelos, ou seja, se um é múltiplo do outro.

Duas retas coincidentes r e s são coincidentes se possuem o mesmo lugar geométrico, isto é, o mesmos pontos. Assim, um primeiro requisito para coincidência é, claramente, paralelismo. Uma vez estabelecido o paralelismo basta agora que localizemos um ponto comum as duas retas. Podemos, por exemplo, verificar se o ponto inicial de r (ponto A) pertence à reta s. Caso as retas não possuam pontos em comum, então elas serão paralelas não coincidentes.

Como as retas estão em um mesmo plano, uma vez que não sejam paralelas e ou coincidentes elas claramente só podem possuir um ponto em comum.

Resumindo,

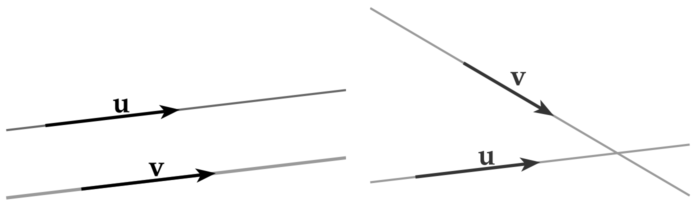
Proposição 4.1 *Duas retas em um mesmo plano são:*

- *Paralelas se e somente se seus vetores diretores são múltiplos um do outro.*

Neste caso elas podem ser:

- *Coincidentes: se o lugar geométrico de r e de s são o mesmo. Neste casos as retas são paralelas e passam pelo mesmo ponto. Para verificar se suas retas paralelas são coincidentes é suficiente verificar se elas possuem um ponto em comum. Por exemplo se o ponto B pertence a reta r.*
- *Paralelas não coincidentes, se não possuem pontos em comum.*

■ *Concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto. Neste caso os vetores diretores não são paralelos.*



Exemplo 4.2 Determine a posição relativa entre as retas:

1. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (4, 1) + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})t$
2. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (2, 2) + (1, -\frac{1}{3})t$
3. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (2, 2) + (0, 1)t$

Solução:

1. Coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto $(4, 1)$ pertence a r.
2. Paralelas não coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto $(2, 2)$ pertence a r.
3. Concorrente, pois os vetores diretores não são paralelos.

□

As condições acima valem apenas para equações vetoriais, e consequentemente para equações paramétricas. Mas no caso bidimensional as equações ficam mais simples e podemos representar uma reta através de uma única equação linear. Seria interessante então que tivéssemos uma maneira de comparar equações nesta forma.

Tome então duas retas $r : ax + by + c = 0$ e $s : a'x + b'y + c' = 0$. Vamos supor por um instante que $b \neq 0$ e $b' \neq 0$ (r e s não são paralelas ao eixo y). Não é difícil se convencer que r e s são paralelas se, e só se, seus coeficientes angulares forem os mesmos. Ou seja, precisamos que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Mas isto é equivalente a dizer que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Observe que se ambas forem paralelas ao eixo y, então $b = b' = 0$ e a mesma condição vale.

Se r e s forem coincidentes então, pela condição dada acima, temos que

$$0 = a'x + b'y + c' = \lambda(ax + by) + c' = \lambda(ax + by + c) - \lambda c + c' = -\lambda c + c',$$

e portanto $c' = \lambda c$.

Resumindo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.3 *Dadas duas retas no plano descritas pelas equações $r : ax + by + c = 0$ e $s : a'x + b'y + c' = 0$, então:*

1. *Se o vetor (a, b, c) é múltiplo de (a', b', c') as retas são coincidentes.*
2. *Se o vetor (a, b) é múltiplo de (a', b'), ou equivalentemente os coeficientes angulares são iguais então as retas são paralelas.*
3. *Se o vetor (a, b) não é múltiplo de (a', b'), ou equivalentemente os coeficientes angulares são distintos então as retas são paralelas.*

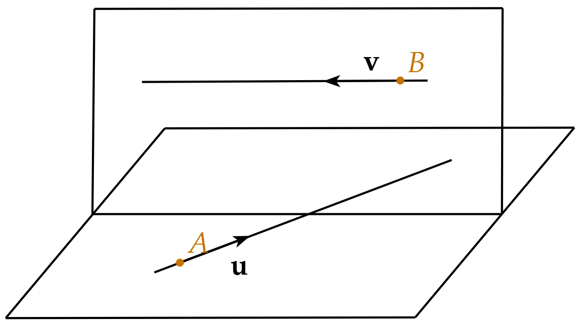


Figure 4.1: Retas Reversas

4.1.2 Posição Relativas entre Retas no Espaço

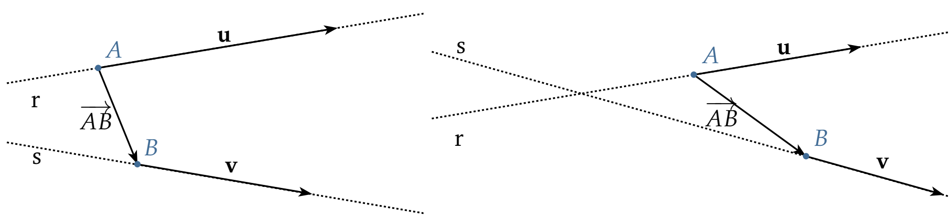
Passemos agora para a análise do caso espacial. Quando consideramos duas retas no espaço elas podem estar ou não num mesmo plano. Caso elas estejam num um mesmo plano serão ditas **retas coplanares**, e podemos para essas retas aplicar a análise de posição relativa que fizemos na seção anterior. Ressaltamos que se duas retas são paralelas elas são necessariamente coplanares. Por outro lado, retas não coplanares recebem o nome de **reversas**. Em resumo, duas retas no espaço podem ser

- Reversas, se as duas retas não estiverem contidas num mesmo plano.
- Coplanares, se as duas retas estiverem contidas num mesmo plano. Neste caso, valem as classificações vistas até agora, e as retas podem ser:
  - Coincidentes;
  - Paralelas;
  - Concorrentes.

Precisamos então encontrar um critério para determinar se duas retas são ou não coplanares. Para tanto, considere duas retas $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}s$, com $A \neq B$. Se r e s forem coplanares, então necessariamente o vetor $\overrightarrow{AB}$ deve ser coplanar aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ou seja, os vetores $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente dependentes. Do mesmo modo, se $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem coplanares então a reta s está contida no mesmo plano determinado pela reta r e pelo ponto B. Isso nos dá o seguinte resultado.

Teorema 4.4 *Duas retas $r : A + \mathbf{v}t$ e $s : B + \mathbf{u}s$ são coplanares se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ forem linearmente dependentes, ou seja se:*

$$\left|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\right| = 0.$$



Exemplo 4.5 Determine a posição relativa entre as seguintes retas:

a) $r : (1,2,0) + t(2,2,2)$ e $s : (1,3,3) + t(2,2,3)$

b) $r : (1,0,0) + t(2,2,2)$ e $s : (2,3,0) + t(1,-1,2)$

c) $r : (1,0,0) + t(1,1,1)$ e $s : (2,3,0) + t(1,1,1)$

d) $r : (1,0,0) + t(1,1,1)$ e $s : (2,1,1) + t(1,1,1)$

Solução:

a) Para determinar se r e s são coplanares precisamos estudar a dependência linear dos vetores $(2,2,2)$, $(2,2,3)$ e $(0,1,3) = (1,3,3) - (1,2,0)$. Como o determinante formado pelas coordenadas destes vetores vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

concluímos que as retas não são coplanares, sendo portanto reversas.

b) Como o determinante formado pelas coordenadas dos vetores $(2,2,2)$, $(1,-1,2)$ e $(1,3,0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

as retas são coplanares. Como os vetores diretores não são múltiplos, as retas são concorrentes.

c) As retas acima possuem o mesmo vetor diretor, de onde concluímos que são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1,0,0)$ não pertence a s, as retas são paralelas e não coincidentes.

d) Assim como no item anterior, as retas são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1,0,0)$ pertence a reta s (basta fazer $t = -1$ na equação de s) obtemos que r e s são de fato coincidentes.

□

Exercícios

Ex. 1.1 — Sejam r a reta representada parametricamente por $x = at + b$ e $y = ct + d$ e s a reta cuja equação é $\alpha x + \beta y = c$.

a) Quando r intercepta s?

b) Se r interceptar s determine o ponto P de intersecção entre as duas retas:

Ex. 1.2 — Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de intersecção.

a) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$; $s : X = (2, 3, 3) + \mu(3, 2, 1)$.

b) $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$

c) $r : \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases}$, $s : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = z.$

d) $r : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = z$, $s : \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{2}.$

Ex. 1.3 — A altura e a mediana relativas ao vértice B do triângulo ABC estão contidas, respectivamente, em $r : X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0)$ e $s : X = (0, 0, 3) + \mu(3, -2, 0)$. Sendo $C = (4, -1, 3)$, determine A e B.

Ex. 1.4 — Mostre que duas retas

$$r : \left\{ \; x = mz + ay = nz = b \right.$$

e

$$s : \left\{ \; x = m'z + a'y = n'z = b' \right.$$

se interceptam se e somente se $(a - a')(n - n') = (b - b')(m - m')$

Ex. 1.5 — Estude a posição relativa das retas r e s.

a) $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$ e $s : (2, 5, 1) + (2, 4, 6)t$

b) $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$ e $s : (2, 5, 1) + (1, 4, 1)t$

c) $r : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ e $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$.

d) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ e $s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$;

e) $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \dfrac{z-1}{4}$

f) $r : x + 3 = \dfrac{2y-4}{4} = \dfrac{z-1}{3}$ e $s : X = (0,2,2) + \lambda(1,1,-1)$.

Ex. 1.6 — Sejam $r : X = (1,0,2) + \lambda(2,1,3)$ e $s : X = (0,1,-1) + \lambda(1,m,2m)$. Estude, segundo os valores de m, a posição relativa de r e s.

Ex. 1.7 — Dadas as retas $r : X = (0,1,0) + \lambda(1,0,0)$ e $s : X = (-1,2,-7) + \lambda(2,1,-3)$, obtenha uma equação vetorial da reta t, concorrente com r e s e paralela a $\vec{u} = (1,-5,-1)$.

Ex. 1.8 — Determine o ponto de intersecção entre a reta que passa pelos pontos $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$ e a reta que passa pelos pontos $(2,1,1)$ e $(1,2,1)$.

Ex. 1.9 — Determine a, b de modo que as retas sejam paralelas:

$$r : \begin{cases} ax + 3y - 7z - 1 = 0 \\ 5x + 6y - bz = 0 \end{cases}$$

e

$$s : \begin{cases} ax + by = 5 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

4.2 POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE RETAS E PLANOS

Passemos agora para o estudo da posição de uma reta e um plano. Dado um plano π e uma reta r temos três possibilidades:

- a intersecção de r e π é vazia. Nesse caso a reta r é dita paralela a π.
- a intersecção de π e r é um único ponto. Nesse caso dizemos que a reta r é transversal a π.
- a intersecção de π e r tem pelo menos dois pontos. Nesse caso temos que todos os pontos da reta r pertencem ao plano π e dizemos que a reta r está contida em π.

Não é difícil ver que uma reta r é transversal ao plano π se, e somente se, o vetor diretor dessa reta não é paralelo ao plano π. Ou, equivalentemente, se o vetor diretor dessa reta não é ortogonal ao vetor normal ao plano.

Colocando em coordenadas, obtemos que o plano π de equação geral $ax + by + cz = d$ e a reta r de equação paramétrica

$$(x, y, z) = (x_0, y_0 + z_0) + (v_1, v_2, v_3)t$$

são transversais se, e somente se,

$$(a, b, c) \cdot (v_1, v_2, v_3 \neq 0),$$

ou seja, num sistema de coordenadas ortogonais:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0.$$

Reescrevendo esta condição utilizando o vetor normal ao plano $\mathbf{n} = (a, b, c)$ e o vetor diretor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ obtemos o seguinte critério.

Proposição 4.6 *A reta $r : X = P + \mathbf{v}t$ é transversal ao plano π de vetor normal $\mathbf{n}$ se, e somente se,*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0.$$

Caso a reta r não seja transversal ao plano π, nos restam duas opções: ou r é paralela disjuntas ou está contida em π. Para decidirmos qual é o caso basta tomarmos um ponto qualquer da reta e verificarmos se este pertence ao plano. Se isso ocorrer a reta está contida no plano, caso contrário a reta é paralela.

Exemplo 4.7 Determine a posição relativa entre o plano

$$\pi : X = (1, 2, 1) + (1, -1, 1)t_1 + (0, 1, 2)t_2$$

e a reta

$$r : X = (1, 3, 4) + (1, 1, 1)s.$$

Solução: O vetor normal ao plano é dado por:

$$(1, -1, 1) \times (0, 1, 2) = (-3, -2, 1)$$

E como $(-3, -2, 1) \cdot (1, 1, 1) = -4 \neq 0$, a reta é transversal ao plano.

O ponto de intersecção ocorre quando:

$$(1,2,1) + (1,-1,1)t_1 + (0,1,2)t_2 = (1,3,4) + (1,1,1)s$$

cuja solução é $s = \frac{1}{4}, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{3}{2}$.

Substituindo $s = \frac{1}{4}$ na equação da reta obtemos o ponto $(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4})$, que é portanto o ponto de intersecção de r com π. □

Exercícios

Ex. 2.1 — Mostre que a reta

$$x = 3t - 2, y = -4t + 1, z = 4t - 5$$

é paralelo ao plano $4x - 3y - 6z - 5 = 0$

Ex. 2.2 — Determine a equação do plano contendo a reta

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

e paralela a reta $x = -\frac{y}{6} = \frac{z}{7}$

Ex. 2.3 — Mostre que a reta

$$\frac{1}{3}(x-7) = -(y+3) = z - 4$$

intersecciona os planos $\pi_1 : 6x + 4y - 5z = 4$ e $\pi_2 : x - 5y + 2z = 12$ no mesmo ponto. Conclua que essa reta é coplanar com a reta determinada pela intersecção desses planos.

Ex. 2.4 — Encontre o ponto de intersecção da reta dada com o plano dado:

a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, \qquad 2x + 3y + z - 1 = 0$

b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \qquad x - 2y + z - 15 = 0$

c) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \qquad x + 2y + 2z + 6 = 0$

Ex. 2.5 — Escreva as equações do plano que passa por $(1, 2, -3)$ e é paralelo as retas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \qquad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$$

Ex. 2.6 — Mostre que as equações do plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralelo as retas:

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{l_2} = \frac{z-c_1}{l_3}, \qquad \frac{x-a_2}{m_1} = \frac{y-b2}{m_2} = \frac{z-c_2}{m_3}$$

pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex. 2.7 — Mostre que a equação do plano que passa pelos pontos (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_1, z_1) e é paralelo a reta:

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{l_2} = \frac{z-c_1}{l_3}$$

pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex. 2.8 — Prove que as retas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (3t-7, 2t+2, -2t+1)$$

são coplanares e determine a equação desse plano.

4.3 POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE PLANOS

Queremos agora estudar a posição de dois planos no espaço. Para começar analisemos quais as possíveis posições relativas, para depois determinar condições algébricas que as determinem. Dados então dois planos π_1 e π_2 temos três possibilidades:

- a intersecção de π_1 e π_2 é vazia. Nesse caso, os planos são ditos **paralelos distintos**.
- a intersecção de π_1 e π_2 é não vazia, e dois sub-casos são possíveis:
  - a intersecção de π_1 e π_2 é uma reta, e os planos são ditos **transversais**.
  - π_1 e π_2 são **coincidentes**.

Assim como no caso reta×plano, para estudar a posição relativa entre dois planos utilizaremos intensamente os vetores normais a estes planos. Para dois planos serem paralelos, por exemplo, precisamos que seus vetores normais sejam paralelos entre si.

A seguinte proposição caracteriza a posição relativa de dois planos. Sua demonstração é simples e fica como exercício para o leitor.

Proposição 4.8 *Sejam π_1 e π_2 dois planos de equações $a_1x + b_1y + c_1 = d_1$ e $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ respectivamente. então:*

- *Os planos π_1 e π_2 são paralelos se os seus vetores normais forem paralelos, isto é, se*

$$(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_1, b_1, c_1).$$

  Nesse caso se:
  - *(a_1, b_1, c_1, d_1) for proporcional a (a_2, b_2, c_2, d_2), então os planos são coincidentes*
  - *(a_1, b_1, c_1, d_1) não for proporcional a (a_2, b_2, c_2, d_2), então os planos são paralelos distintos.*
- *Os planos π_1 e π_2 são transversais se os seus vetores normais não forem paralelos, isto é, se (a_1, b_1, c_1) e (a_1, b_1, c_1) não são proporcionais.*

É interessante observar que se π_1 e π_2 forem transversais, então a reta r determinada pela interseção dos dois planos deve ser perpendicular aos vetores normais $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, e podemos tomar o vetor $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ como vetor diretor de r. Assim, escolhendo um ponto P qualquer na interseção de π_1 e π_2, obtemos

$$r : X = P + (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)t.$$

Exemplos 4.9

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 6x + 2y + 2x = 3$ são transversais. E assim a sua intersecção, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 6x + 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

determina uma reta.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8x = 2$ são paralelos e não coincidentes. E assim a sua intersecção é o conjunto vazio.Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 6x + 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

não possui soluções.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8x = 10$ são coincidentes. E assim a sua intersecção é o plano $\pi_1 = \pi_2$. Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 4x + 6y + 8x = 10 \end{cases}$$

tem como solução um plano.

Exemplo 4.10 A reta r é dada como intersecção de dois planos

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} . \tag{4.1}$$

Escreva as equações paramétricas para essa reta.

Solução: Um modo de obter as equações paramétricas da reta é escolher uma das variáveis é faze-la igual ao parâmetro t. Assim por exemplo, fazendo $z = t$. A equação $x - z = 1$, nos diz que $x = 1 + t$. Substituindo esse valores na equação $x + y + 2z = 0$, temos $y = -1 - t$. E assim obtemos que as equações paramétricas da reta são:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

Outro modo de obter a equação vetorial é encontrando dois pontos que satisfazem a equação. Assim por exemplo tomando $z = 0$, o sistema de equações 4.1 fica

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} .$$

Cuja solução é o ponto $(1, -1, 0)$, que pertence a reta determinada pela intersecção dos dois planos. Similarmente tomando $z = -1$, temos que o ponto $(0, 2, -1)$ pertence a reta.

De posse dos pontos podemos escrever a equação vetorial dos planos:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

□

Exercícios

Ex. 3.1 — Mostre que os planos $bx - ay = n$, $cy - bz = 1$ e $az - cx = m$ se interceptam numa reta se e somente se $al + bm + cn = 0$.

Ex. 3.2 — Mostre que a reta:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

está contida no plano $4x + 3y + 7z - 7$.

Ex. 3.3 — Determine os valores de a e b de modo que os planos $x + 2y + z = b$ e $3x - 5y + 3z = 1$ e $2x + 7y + az = 8$ se interceptem:

a) um ponto

b) uma reta

c) três retas distintas e paralelas