1.6 EXERCÍCIOS

Nos Exercícios 1-6, determine se os vetores são linearmente dependentes. Justifique cada resposta.

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7-12, determine se as colunas da matriz dada formam um conjunto linearmente dependente.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & -7 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ -2 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 13-14, (a) para que valores de h tem $\mathbf{v}_3$ em Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, e (b) para que valores de h temos $\{\mathbf{v}$ $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linearmente dependentes?

13. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$

Seção 1.6

Justifique suas respostas nos Exercícios 1 a 6 e 19 a 24.

1. Lin. indep.	3. Lin. dep.	5. Lin. indep.
7. Lin. dep.	9. Lin. indep.	11. Lin. dep.
13. a. Não.	b. Todos os h.	15. $h = -7$.

1.7 Introdução às Transformadas Lineares

A diferença entre a equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e a equação vetorial associada $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ é um mera questão de notação. No entanto, a equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode surgir, na álgebra linear (e em aplicações com computação gráfica e processamento de sinais), de modo que não esteja diretament ligada a uma combinação linear de vetores. Isso acontece quando pensamos na matriz A como um objeto que "age" sobre um vetor, por multiplicação, produzindo um novo vetor chamado $A\mathbf{x}$.

Por exemplo, as equações

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A}}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{x}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{b}}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{u}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{0}}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

dizem que a multiplicação por A transforma $\mathbf{x}$ em $\mathbf{b}$ e transforma $\mathbf{u}$ no vetor nulo. Veja a Fig. 1.

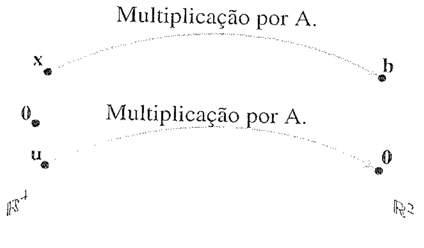


Fig. 1 Transformando vetores via multiplicação de matriz.

Sob esse novo ponto de vista, resolver a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ significa determinar todos os vetores $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^4$ que são transformados no vetor $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^2$ sob a "ação" da multiplicação por A.

A correspondência de $\mathbf{x}$ para $A\mathbf{x}$ é uma *função* de um conjunto de vetores para outro. Esse conceito generaliza a noção usual de função que é uma regra que transforma um número real em outro.

Uma **transformação** (ou **transformada**, ou **função**, ou **aplicação**) T do $\mathbb{R}^n$ no $\mathbb{R}^m$ é uma regra que associa a cada vetor $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^n$ um vetor $T(\mathbf{x})$ do $\mathbb{R}^m$. O conjunto $\mathbb{R}^n$ é chamado de **domínio** de T, e $\mathbb{R}^m$ é chamado de **contradomínio** de T. A notação $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ indica que o domínio de T é o $\mathbb{R}^n$, e o contradomínio é o $\mathbb{R}^m$. Para $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^n$, o vetor $T(\mathbf{x})$ do $\mathbb{R}^m$ é chamado de **imagem** de $\mathbf{x}$ (sob a ação de T). O conjunto de todas as imagens $T(\mathbf{x})$ é chamado de **imagem** de T. Veja a Fig. 2.

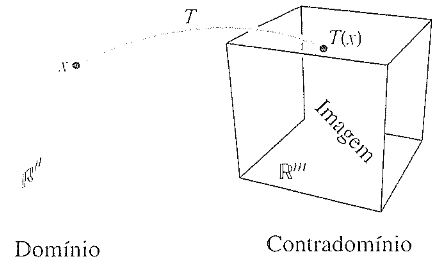


Fig. 2 Domínio, contradomínio e imagem de $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

A nova terminologia desta seção é importante porque uma visão dinâmica da multiplicação de matriz por vetor é a chave para a compreensão de diversos conceitos da álgebra linear e para a construção de modelos matemáticos de sistemas físicos que evoluem com o tempo. Esses *sistemas dinâmicos* serão discutidos nas Seções 1.9, 4.8, 4.9 e ao longo do Cap. 5.

Transformadas Matriciais

O restante desta seção trata de aplicações associadas a multiplicação de matriz. Para cada $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x})$ é dado por $A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz $m \times n$. Para simplificar, muitas vezes denotamos essa *transformação* (ou *transformada*) *matricial* por $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Observe que o domínio de T é o $\mathbb{R}^n$ quando A tem n colunas, e o contradomínio de T é o $\mathbb{R}^m$ quando cada coluna de A tem m elementos.

EXEMPLO 1 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, e defina a transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, de modo que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

a. Determine $T(\mathbf{u})$, a imagem de $\mathbf{u}$ pela transformação T.
b. Determine um $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^2$ cuja imagem por T é $\mathbf{b}$.
c. Existe mais de um $\mathbf{x}$ cuja imagem por T é $\mathbf{b}$?
d. Determine se $\mathbf{c}$ está na imagem da transformação T.

Solução

a. Calcule

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

b. Resolva $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ para $\mathbf{x}$. Isto é, resolva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Usando o método da Seção 1.4, escalone a matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = -0{,}5$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$. A imagem de $\mathbf{x}$ por T é o vetor dado $\mathbf{b}$.

c. Todo $\mathbf{x}$ cuja imagem por T é $\mathbf{b}$ tem que satisfazer (1). De (2), fica claro que a equação (1) tem u única solução. Portanto, existe exatamente um $\mathbf{x}$ cuja imagem é $\mathbf{b}$.

d. O vetor $\mathbf{c}$ está na imagem de T se $\mathbf{c}$ for a imagem de algum $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^2$, isto é, se $\mathbf{c} = T(\mathbf{x})$ para algu $\mathbf{x}$. Isso é uma outra forma de perguntar se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ é possível. Para determinar a respos escalone a matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

A terceira equação, $0 = -35$, mostra que o sistema é impossível. Portanto, $\mathbf{c}$ *não* está na image de T.

A pergunta do Exemplo 1(c) é um problema de *unicidade* para um sistema de equações lineares, tr duzido, agora, para a linguagem de transformação matricial: $\mathbf{b}$ é a imagem de um *único* $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^n$? An logamente, o Exemplo 1(d) é um problema de *existência*: *existe* um $\mathbf{x}$ cuja imagem é $\mathbf{c}$?

As próximas duas transformações matriciais podem ser visualizadas geometricamente. Elas refo çam a abordagem dinâmica de uma matriz como sendo um objeto que transforma vetores em outr vetores. A Seção 2.8 contém outros exemplos interessantes ligados à computação gráfica.

EXEMPLO 2 Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então a transformação $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ *projeta* pontos do $\mathbb{R}^3$ no plano x_1

pois

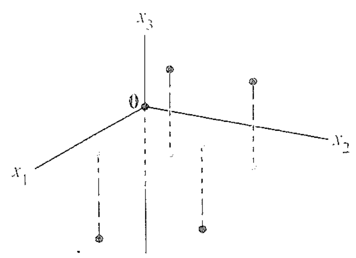
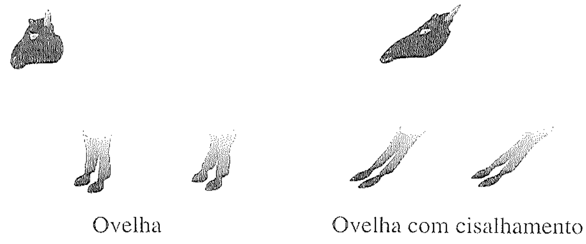


Fig. 3 Uma projeção.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Veja a Fig. 3.

EXEMPLO 3 Seja $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A transformada $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ é chamada de uma transformação de **cisalhamento**. Pode ser mostrado que, se T for aplicado sobre cada ponto do quadrado 2×2 mostrado na Fig. 4, então o conjunto das imagens forma o paralelogramo sombreado. A idéia-chave é mostrar que T transforma segmentos de reta em segmentos de reta (como é mostrado no Exercício 27) e, depois, verificar que os vértices do quadrado são transformados nos vértices do paralelogramo. Por exemplo, a imagem do ponto $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ é $T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, e a imagem de $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. T deforma o quadrado transladando a base superior para a direita e mantendo a inferior fixa. Transformações de cisalhamento aparecem na física, na geologia e em cristalografia.



Ovelha

Ovelha com cisalhamento

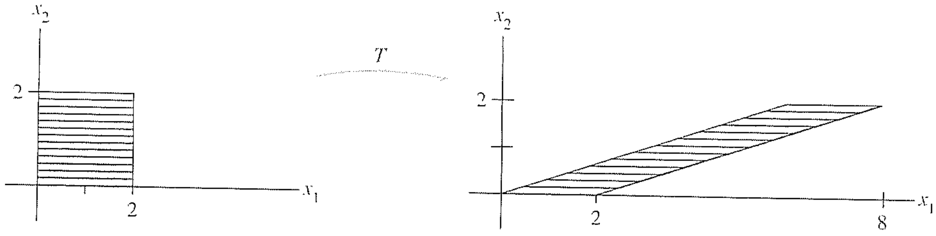


Fig. 4 Uma transformação de cisalhamento.

Transformadas Lineares

O Teorema 5 da Seção 1.4 mostra que se A é $m \times n$, então a transformação $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ tem as propriedades

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \quad \text{e} \quad A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$$

para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$ e todos os escalares c. Essas propriedades, reescritas em notação de funções, identificam a classe mais importante de transformações em álgebra linear.

DEFINIÇÃO

Uma transformada (ou aplicação) T é **linear** se:

i. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ no domínio de T;
ii. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}$ e todo escalar c.

Toda transformada matricial é transformada linear. Exemplos importantes de transformadas lineares que não são transformadas matriciais serão discutidos nos Caps. 4 e 5.

As transformadas lineares *preservam as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar.* A propriedade (i) diz que o resultado de $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, que primeiro soma $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no $\mathbb{R}^n$ e depois aplica T, é o mesmo que aplicar T primeiro a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$ e, depois, somar $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ no $\mathbb{R}^m$. Essas duas propriedades levam, facilmente, aos seguinte fatos úteis.

Se T é uma transformada linear, então

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

e

$$T(c\mathbf{v} + d\mathbf{u}) = cT(\mathbf{v}) + dT(\mathbf{u}) \tag{4}$$

para todos os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ no domínio de T e todos os escalares c, d.

A propriedade (3) segue de (ii), pois $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. A propriedade (4) requer tanto (i) e (ii):

$$T(c\mathbf{v} + d\mathbf{u}) = T(c\mathbf{v}) + T(d\mathbf{u}) = cT(\mathbf{v}) + dT(\mathbf{u})$$

Observe que *se a transformada satisfaz* (4) *para todo* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* c, d, *então ela tem que ser linear.* (Considere $c = d = 1$ para a preservação da soma, e $d = 0$ para a preservação da multiplicação por escalar.) Aplicações seguidas de (4) produzem a seguinte generalização, que é útil:

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_pT(\mathbf{v}_p) \tag{5}$$

Na engenharia e na física, a equação (5) é conhecida como *princípio da superposição.* Pense em $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_p$ como sendo sinais que chegam a um sistema ou processo, e em $T(\mathbf{v}_1),...,T(\mathbf{v}_p)$ como as respostas do sistema aos sinais. O sistema satisfaz o princípio da superposição quando, sempre que a entrada for representada como uma combinação linear desses sinais, a resposta do sistema é representada pela *mesma* combinação linear das respostas dos sinais individuais. Voltaremos a essa idéia no Cap. 4.

EXEMPLO 4 Dado um escalar r, defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = r\mathbf{x}$. T é chamada de uma **contração** quando $0 \leq r < 1$ e de uma **dilatação** quando $r > 1$. Seja $r = 3$ e mostre que T é uma transformada linear.

Solução Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ no $\mathbb{R}^2$ e c, d escalares. Então

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{v} + d\mathbf{u}) &= 3(c\mathbf{v} + d\mathbf{u}) && \text{Definição de } T \\ &\left.\begin{aligned} &= 3c\mathbf{v} + 3d\mathbf{u} \\ &= c(3\mathbf{v}) + d(3\mathbf{u}) \end{aligned}\right\} && \text{Aritmética vetorial} \\ &= cT(\mathbf{v}) + dT(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformada linear porque satisfaz (4). Veja a Fig. 5. ∎

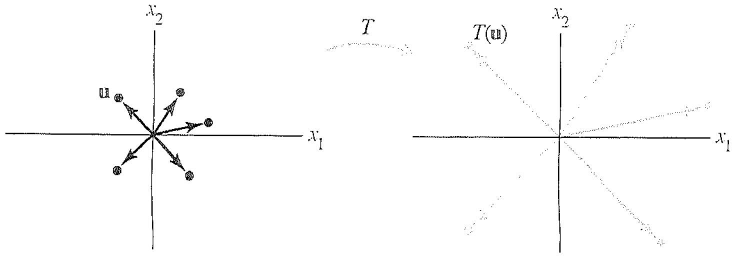


Fig. 5 Uma dilatação.

EXEMPLO 5 Defina uma transformada linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Determine as imagens por T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solução

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Observe que $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ é obviamente igual a $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. Fica aparente, da Fig. 6, que T gira $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ no sentido anti-horário em 90°. Na verdade, T transforma todo o paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no paralelogramo determinado por $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$. (Veja o Exercício 28.)

O último exemplo não é geométrico; ao contrário, ele mostra como uma aplicação linear pode transformar um tipo de dados em outro.

EXEMPLO 6 Uma empresa fabrica dois produtos, B e C. Usando os dados do Exemplo 7 da Seção 1.3, construímos uma matriz de "custo unitário", $U = [\mathbf{b}\ \mathbf{c}]$, cujas colunas descrevem o "custo por dólar de produção" para os produtos:

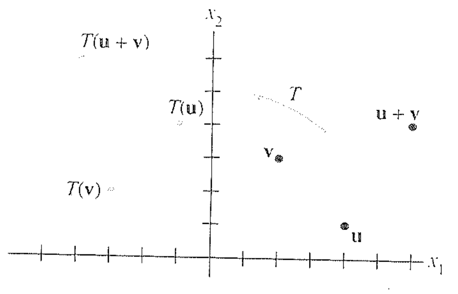


Fig. 6 Uma rotação.

$$\begin{array}{cc} & \text{Produto} \\ & \begin{array}{cc} \text{B} & \text{C} \end{array} \\ U = & \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}15 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Insumos} \\ \text{Mão-de-obra} \\ \text{Custos adicionais} \end{array}$$

Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ um vetor de "produção", correspondendo a x_1 dólares do produto B e x_2 dólares do produto C, e defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por

$$T(\mathbf{x}) = U\mathbf{x} = x_1\begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}25 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}35 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Total do custo de insumos} \\ \text{Total do custo de mão-de-obra} \\ \text{Total do custos adicionais} \end{bmatrix}$$

A aplicação T transforma a lista de quantidades produzidas (medidas em dólares) numa lista de custo total. A linearidade dessa aplicação é refletida de duas formas:

1. Se a produção for aumentada de um fator, digamos, 4, de $\mathbf{x}$ para $4\mathbf{x}$, então os custos aumentarão pelo mesmo fator, de $T(\mathbf{x})$ para $4T(\mathbf{x})$.
2. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores de produção, então o vetor de custo total associado à produção $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ é precisamente a soma dos vetores de custo $T(\mathbf{x})$ e $T(\mathbf{y})$.

Problemas Resolvidos

1. Suponha que $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ e $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para uma matriz A e cada $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^5$. Quantas linhas e quantas colunas tem a matriz A?
2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Dê uma descrição geométrica da transformada $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.
3. O segmento de reta de $\mathbf{0}$ ao vetor $\mathbf{u}$ é o conjunto dos pontos da forma $t\mathbf{u}$, onde $0 \le t \le 1$. Mostre que uma transformada linear T leva esse segmento de reta no segmento de $\mathbf{0}$ a $T(\mathbf{u})$.

1.7 Exercícios

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, e defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Determine as imagens por T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},\ \text{e}\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
Defina $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Calcule $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$.

Nos Exercícios 3-6, com T definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, encontre um $\mathbf{x}$ cuja imagem por T é $\mathbf{b}$, e determine se este $\mathbf{x}$ é único.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$

7. Seja A uma matriz 7×5. Quais os valores de a e b de modo que $T: \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ possa ser definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$?

8. Quantas linhas e colunas é preciso que a matriz A tenha de modo que se possa definir uma aplicação do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^4$ pela regra $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$?

Nos Exercícios 9 e 10, encontre todos os $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^4$ que são aplicados no vetor nulo pela transformada $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

11. Sejam $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ e A a matriz do Exercício 9. O vetor $\mathbf{b}$ está na imagem da transformada linear $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$?

14. Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \text{e}\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
Seja $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^2$.
    a. Num sistema de coordenadas retangulares, represente graficamente os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$.
    b. Dê uma descrição geométrica do efeito da aplicação de T num vetor do $\mathbb{R}^2$.

Nos Exercícios 15-18, use um sistema de coordenadas retangulares para representar graficamente $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ e suas imagens pela transformada T. (Faça uma figura diferente para cada exercício.) Dê uma descrição geométrica do efeito da aplicação de T num vetor do $\mathbb{R}^2$.

15. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

16. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

17. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

18. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

19. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformada linear que leva $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ em $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ em $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Use o fato de que T é linear para determinar as imagens por T de $2\mathbf{u}$, $3\mathbf{v}$ e $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

20. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que aplica $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ em $\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e aplica $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ em $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Use o fato de que T é linear para determinar as imagens por T de $3\mathbf{u}$, $-2\mathbf{v}$ e $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

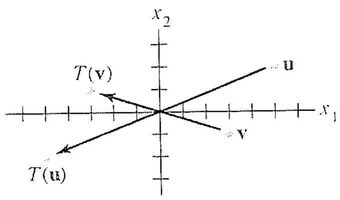
Seção 1.7

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ -3 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, sim

5. $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, não **7.** $a = 5, b = 7$

9. $x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **11.** Não

13. **a.**



b. Uma reflexão em relação à origem.

15. Uma contração (pelo fator 1/2).

17. Uma reflexão em relação à reta $x_1 = x_2$.

19. $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -5x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$

1.8 A Matriz de uma Transformada Linear

Sempre que uma transformada linear aparece geometricamente ou é descrita em palavras, geralmente queremos uma "fórmula" para $T(\mathbf{x})$. A discussão que se segue mostra que toda transformada linear do $\mathbb{R}^n$ para o $\mathbb{R}^m$ é, na verdade, uma transformada matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ e que propriedades importantes da T estão intimamente relacionadas a propriedades conhecidas de A. A chave para se determinar A é observar que T fica completamente determinada pela sua ação nas colunas da matriz identidade $n \times n$, I_n.

EXEMPLO 1 As colunas de $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Suponha que T seja uma transformada linear do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sem qualquer informação adicional, determine uma fórmula para a imagem de um $\mathbf{x}$ arbitrário do $\mathbb{R}^2$.

Solução Escreva

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \tag{1}$$

Como T é uma transformação *linear*,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) \\ &= x_1\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

O passo de (1) para (2) explica por que o conhecimento de $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$ é suficiente para determinar $T(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$. Mais ainda, como (2) expressa $T(\mathbf{x})$ como uma combinação linear de vetores, podemos colocar esses vetores nas colunas de uma matriz A e escrever (2) como

$$T(\mathbf{x}) = [\,T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2)\,]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

TEOREMA 10

Seja T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformada linear. Então existe uma única matriz A tal que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ no R}^n$$

De fato, A é a matriz $m \times n$ cuja j-ésima coluna é o vetor $T(\mathbf{e}_j)$, onde $\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna da matriz identidade no $\mathbb{R}^n$.

$$A = [\,T(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)\,] \tag{3}$$

Demonstração Escreva $\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]\,\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, e use a linearidade de T pa calcular

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) \\ &= [\,T(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)\,]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

A unicidade de A será feita no Exercício 33.

A matriz A em (3) é chamada de **matriz canônica para a transformada linear** T.

Agora sabemos que toda transformada linear do $\mathbb{R}^n$ para o $\mathbb{R}^m$ é uma transformada matricial, e vice versa. O termo *transformada linear* focaliza uma propriedade da aplicação, enquanto *transformad matricial* descreve como essa aplicação é implementada, como ilustra o próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Determine a matriz canônica A para a dilatação $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ no $\mathbb{R}^2$.

Solução Escreva

$$T(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 3 Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação que aplica uma rotação de um ângulo φ em cad ponto do $\mathbb{R}^2$; ângulos positivos representam rotações no sentido anti-horário. Poderíamos mostra geometricamente, que essa transformação é linear. (Veja a Fig. 6 da Seção 1.7.) Determine a matr canônica A para essa transformação.

Solução O vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é girado até $\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é girado até $\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$. Veja a Fig. 1. Pelo Teore ma 10,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

O Exemplo 5 da Seção 1.7 é um caso especial dessa transformação, com $\varphi = \pi/2$.

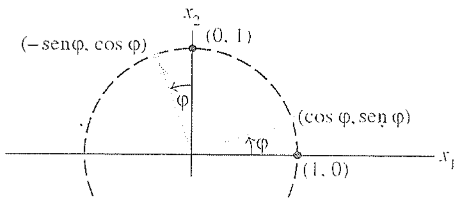


Fig. 1 Uma rotação.

Transformadas Lineares Geométricas do $\mathbb{R}^2$

Os Exemplos 2 e 3 ilustram transformadas lineares descritas geometricamente. As Tabelas 1-4 ilustram outras transformadas lineares geométricas do plano. Como as transformações são lineares, elas são completamente determinadas pela sua ação nas colunas de I_2. Em vez de mostrar apenas as imagens de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, as tabelas mostram a ação da transformada sobre o quadrado unitário (Fig. 2).

Outras transformadas podem ser construídas a partir daquelas apresentadas nas Tabelas 1 a 4, aplicando uma transformada após outra. Por exemplo, um cisalhamento horizontal pode ser seguido de uma reflexão no eixo-x_2. A Seção 2.1 vai mostrar que uma *composição* de transformadas lineares é linear. (Veja, também, o Exercício 36.)

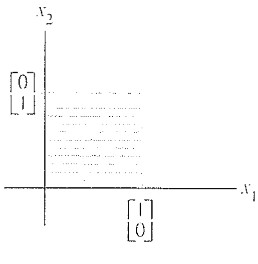
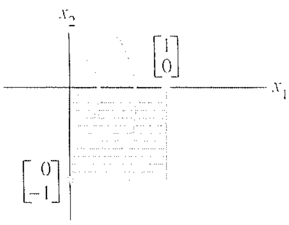


Fig. 2 O quadrado unitário.

TABELA 1 Reflexões

Transformada	Imagem do Quadrado Unitário	Matriz Canônica
Reflexão no eixo x_1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

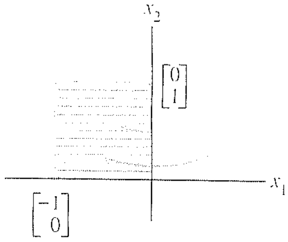
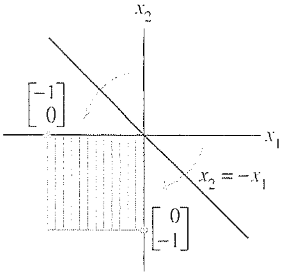
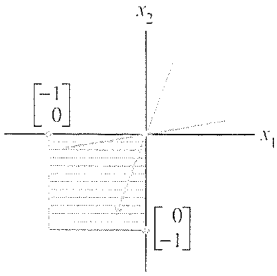
Transformada	Imagem do Quadrado Unitário	Matriz Canônica
Reflexão no eixo x_2		$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
Reflexão na reta $x_2 = -x_1$		$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$
Reflexão na origem		$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

TABELA 2 Expansões e Contrações

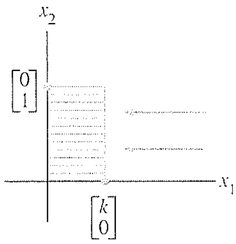
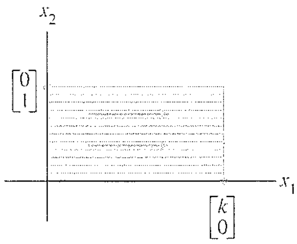
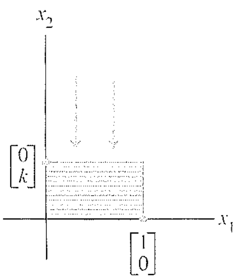
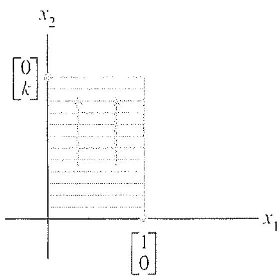
Transformada	Imagem do Quadrado Unitário		Matriz Canônica
Expansão ou contração horizontal	 $0 < k < 1$	 $k > 1$	$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
Expansão ou contração vertical	 $0 < k < 1$	 $k > 1$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$

TABELA 3 Cisalhamentos

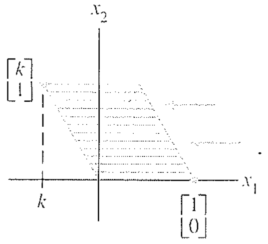
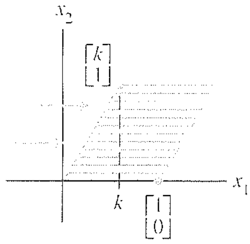
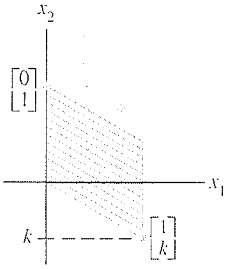
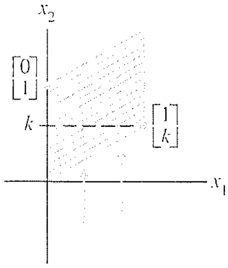
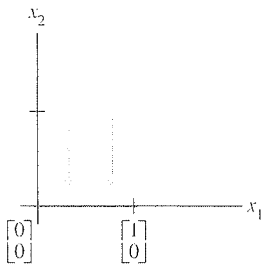
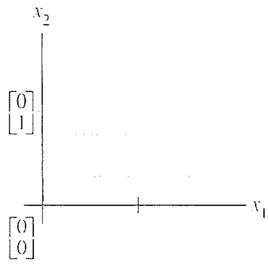
Transformada	Imagem do Quadrado Unitário		Matriz Canônica
Cisalhamento horizontal	 $k < 0$	 $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Cisalhamento vertical	 $k < 0$	 $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

TABELA 4 Projeções

Transformada	Imagem do Quadrado Unitário	Matriz Canônica
Projeção no eixo x_1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção no eixo x_2		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

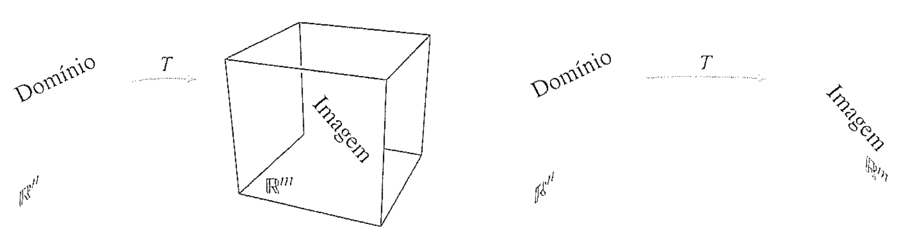
Problemas de Existência e Unicidade

O conceito de transformada linear fornece uma nova forma de compreender as questões de existência e unicidade apresentadas anteriormente. As próximas duas definições apresentam a terminologia apropriada para transformações.

DEFINIÇÃO

> Uma aplicação T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é chamada **sobrejetora** (ou **sobre o** $\mathbb{R}^m$) se cada $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^m$ é a imagem de *pelo menos um* $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^n$.

De forma equivalente, T é sobrejetora se para cada $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^m$ existe pelo menos uma solução de $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. A pergunta "$T$, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, é sobrejetora?" é um problema de existência. A aplicação T *não* é sobrejetora quando existe algum $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^m$ tal que a equação $T(x) = \mathbf{b}$ não tem solução. Veja a Fig. 3.



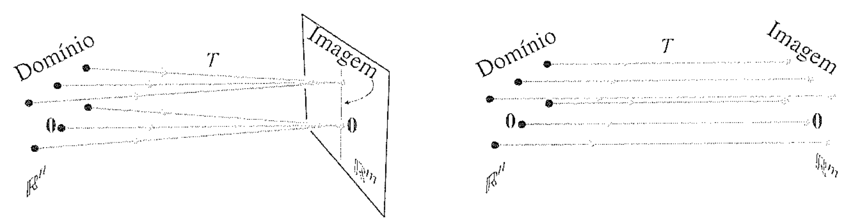
T não é sobrejetora — *T é* sobrejetora

Fig. 3 A imagem de T é todo o $\mathbb{R}^m$?

DEFINIÇÃO

> Uma aplicação T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é chamada **injetora** (ou **um a um**) se cada $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^m$ é a imagem de *no máximo um* $\mathbf{x}$ do $\mathbb{R}^n$.

De modo equivalente, T é injetora se para cada $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^m$ a equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tem uma única solução ou nenhuma solução. A pergunta "T é injetora?" é um problema de unicidade. A aplicação T *não* é injetora quando algum $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^m$ é a imagem de mais de um vetor do $\mathbb{R}^n$. Se não existe um $\mathbf{b}$ nessas condições, então T é injetora. Veja a Fig. 4.



T não é injetora — *T é injetora*

Fig. 4 Todo $\mathbf{b}$ é a imagem de no máximo um vetor?

A propriedade de uma função ser injetora ou sobrejetora está relacionada aos conceitos desenvolvidos anteriormente neste capítulo.

EXEMPLO 4 Seja T uma transformada linear cuja matriz canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

T é sobrejetora? T é injetora?

Solução Como A está em forma escalonada, podemos ver imediatamente que A tem posição pivô em cada linha. Pelo Teorema 4 da Seção 1.4, para cada $\mathbf{b}$ do $\mathbb{R}^3$ a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível. Em outras palavras, a transformada linear T aplica o $\mathbb{R}^4$ (seu domínio) sobre o $\mathbb{R}^3$. No entanto, como a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma variável livre (porque existem quatro variáveis e apenas três variáveis dependentes), cada $\mathbf{b}$ é a imagem de mais de um $\mathbf{x}$. Ou seja, T *não* é injetora. ∎

TEOREMA 11

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformada linear. Então T é injetora se e somente se a equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial.

Demonstração Como T é linear, $T(0) = \mathbf{0}$. Se T é injetora, então a equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tem, no máximo, uma solução e, portanto, apenas a solução trivial. Se T não é injetora, então existe um $\mathbf{b}$ que é a imagem de pelo menos dois vetores distintos do $\mathbb{R}^n$ — digamos, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Isto é, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$ e $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$. Mas, como T é linear, então

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

O vetor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ não é nulo, já que $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Portanto, a equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tem mais de uma solução. Assim, ou as duas condições do teorema são ambas verdadeiras ou são ambas falsas. ∎

TEOREMA 12

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformada linear e seja A a matriz canônica para T. Então:

a. T é sobrejetora se e somente se as colunas de A geram o $\mathbb{R}^m$.

b. T é injetora se e somente se as colunas de A são linearmente independentes.

Demonstração

a. Pelo Teorema 4 da Seção 1.4, as colunas de A geram o $\mathbb{R}^m$ se e somente se, para cada $\mathbf{b}$, a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível — em outras palavras, se e somente se, para todo $\mathbf{b}$, a equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tem pelo menos uma solução. Isso é verdade se e somente se T é sobrejetora.

b. As equações $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ são iguais, com exceção da notação. Então, pelo Teorema 11, T é injetora se e somente se $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem apenas a solução trivial. Isso acontece se e somente se as colunas de A são linearmente independentes, como já foi observado na afirmação (3) da Seção 1.6. ∎

No próximo exemplo e nos exercícios que se seguem, vamos escrever os vetores coluna na forma de linhas, usando parênteses e vírgulas. Também, quando aplicarmos uma transformada linear T a um vetor — digamos, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1, x_2)$ — escreveremos $T(x_1, x_2)$ em vez da notação mais formal $T((x_1, x_2))$.

EXEMPLO 5 Seja $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 7x_2, x_1 + 3x_2)$. Mostre que T é uma transformada line injetora. E T é sobrejetora?

Solução Quando escrevemos $\mathbf{x}$ e $T(\mathbf{x})$ como vetores coluna, é fácil ver que T é descrita pela equaçã

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} \quad (4$$

de modo que T é realmente uma transformação linear, com sua matriz canônica A dada por (4). A colunas de A são linearmente independentes porque uma não é múltiplo da outra. Pelo Teorema 12(b T é injetora. Para decidir se T é sobrejetora, examinamos o espaço gerado pelas colunas de A. Como é 3×2, as colunas de A geram o $\mathbb{R}^3$ se e somente se A tem 3 posições pivôs, pelo Teorema 4. Isso impossível, já que A tem apenas 2 colunas. Portanto, as colunas de A não geram o $\mathbb{R}^3$ e a transforma linear associada não é sobrejetora.

PROBLEMA RESOLVIDO

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformada que primeiro realiza um cisalhamento horizontal, aplicando $\mathbf{e}_2$ em $\mathbf{e}_2 - 0{,}5\mathbf{e}_1$ (mas mantendo $\mathbf{e}_1$ inalterado) e, depois, reflete o resultado no eixo x_2. Supondo que T se linear, determine sua matriz canônica. [*Sugestão:* Determine a posição final das imagens de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$

1.8 EXERCÍCIOS

Nos Exercícios 1-14, suponha que T seja uma transformada linear. Determine a matriz canônica de T.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(1, 0) = (4, -1, 2)$ e $T(0, 1) = (-5, 3, -6)$.
2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(1, 0) = (3, 3)$ e $T(0, 1) = (-2, 5)$.
3. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{e}_1) = (1, 4)$, $T(\mathbf{e}_2) = (-2, 9)$ e $T(\mathbf{e}_3) = (3, -8)$, onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são as colunas da matriz identidade 3×3.
4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $T(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 0, 5)$ e $T(\mathbf{e}_2) = (3, -6, 1, 0)$, onde $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são as colunas da matriz identidade 2×2.
5. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz uma rotação de pontos, no sentido horário, de π radianos.
6. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz uma rotação de pontos, no sentido horário, de $\pi/2$ radianos.
7. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um "cisalhamento vertical" que aplica $\mathbf{e}_1$ em $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, mas deixa o vetor $\mathbf{e}_2$ inalterado.
8. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um "cisalhamento horizontal" que aplica $\mathbf{e}_2$ em $\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1$ mas deixa o vetor $\mathbf{e}_1$ inalterado.
9. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projeta cada ponto (x_1, x_2, x_3) verticalmente no plano-x_1x_2 (onde $x_3 = 0$).
10. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projeta cada ponto (x_1, x_2, x_3) verticalmente no plano-x_2x_3 (onde $x_1 = 0$).
11. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primeiro realiza um cisalhamento vertical, aplicando $\mathbf{e}_1$ em $\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$ (deixando $\mathbf{e}_2$ inalterada) e, depois, faz uma reflexão do resultado no eixo x_2.
12. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma reflexão com respeito à reta $x_2 = x_1$, seguida por uma reflexão no eixo x_1.
13. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz uma rotação de pontos, no sentido anti-horário, de $\pi/4$ radianos e, depois, faz uma reflexão no eixo x_2.
14. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz uma reflexão com respeito à origem e, depois, uma rotação de pontos, no sentido horário, de $\pi/2$ radianos.

Nos Exercícios 15 e 16, preencha os elementos incompletos da matriz, supondo que a equação é válida para todos os valores das variáveis.

15. $\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 6x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 17-20, mostre que T é uma transformada linear determinando a matriz que implementa a transformação. Observe que $x_1, x_2, \ldots$ não são vetores e, sim, componentes de vetores.

Seção 1.8

1. $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$