

Robótica - utilização, programação, modelagem e controle de robôs industriais

RESOLUÇÃO DA SÉRIE DE EXERCÍCIOS 16

MODELAGEM CINEMÁTICA DE UM MANIPULADOR COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE

Exercício 16.1

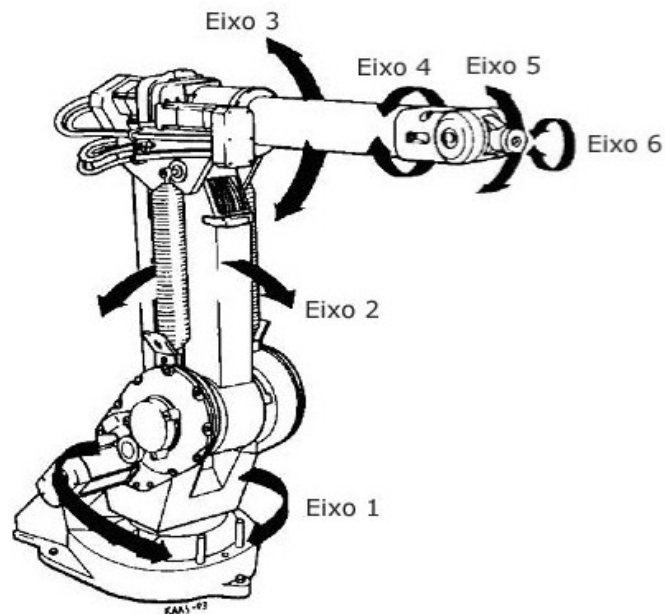


Figura-solução 16.1 Robô ABB IRB-1400.

Exercício 16.1 (a)

O modelo cinemático será implementado a partir do sistema de transformadas locais (baseado no robô ABB da Figura-solução 16.1).

Vetores de translação

$$\vec{V}_1(O_0 - O_1) = [0 \quad 0 \quad 75] \quad \vec{V}_2(O_1 - O_2) = [170 \quad 0 \quad 400]$$

$$\vec{V}_3(O_2 - O_3) = [0 \quad 0 \quad 600] \quad \vec{V}_4(O_3 - O_4) = [600 \quad 0 \quad 120]$$

$$\vec{V}_5(O_4 - O_5) = [120 \quad 0 \quad 0] \quad \vec{V}_6(O_5 - O_6) = [85 \quad 0 \quad 0]$$

Matrizes de rotação

$$R_1(O_0 - O_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2(O_1 - O_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \text{sen}\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$R_3(O_2 - O_3) = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \text{sen}\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad R_4(O_3 - O_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_4 & -\text{sen}\theta_4 \\ 0 & \text{sen}\theta_4 & \cos\theta_4 \end{bmatrix}$$

$$R_5(O_4 - O_5) = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 \end{bmatrix} \quad R_6(O_5 - O_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 \\ 0 & \sin \theta_6 & \cos \theta_6 \end{bmatrix}$$

Consideraremos que os erros de posição e orientação são nulos, resultando em:

$$V_{\text{erro}} = [0 \quad 0 \quad 0] \quad R_{\text{erro}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo V_{erro} o vetor de correção de posição e R_{erro} a matriz de correção de orientação.

Definindo então as matrizes de transformação $MT(i)$ [4x4], associadas a cada junta do robô, teremos:

$$\begin{aligned} MT(1) &= MV \cdot R_{\text{erro}} & MT(2) &= MT(1) \cdot R_1 & MT(3) &= MT(2) \cdot R_2 = MT(1) \cdot R_1 \cdot R_2 \\ MT(4) &= MT(3) \cdot R_3 = MT(1) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 & MT(5) &= MT(4) \cdot R_4 = MT(1) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \\ & & MT(6) &= MT(5) \cdot R_5 = MT(1) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \\ & & MT(7) &= MT(6) \cdot R_6 = MT(1) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 \end{aligned}$$

onde MV é a matriz de orientação que define o ângulo de visualização num caso computacional, e que será definida como:

$$MV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina-se a posição dos pontos de interesse, que correspondem aos eixos de rotação, em relação ao referencial inercial, de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \vec{O}(0) &= MT(1) \cdot V_{\text{erro}} & \vec{O}(1) &= \vec{O}(0) + MT(2) \cdot \vec{V}_1 \\ \vec{O}(2) &= \vec{O}(1) + MT(3) \cdot \vec{V}_2 & \vec{O}(3) &= \vec{O}(2) + MT(4) \cdot \vec{V}_3 \\ \vec{O}(4) &= \vec{O}(3) + MT(5) \cdot \vec{V}_4 & \vec{O}(5) &= \vec{O}(4) + MT(6) \cdot \vec{V}_5 & \vec{O}(6) &= \vec{O}(5) + MT(7) \cdot \vec{V}_6 \end{aligned}$$

A partir da matriz de orientação e do vetor de translação, associados ao elemento terminal do robô, apresentados acima, podemos chegar a uma matriz de transformação que indica a orientação e a posição do elemento terminal em relação ao referencial inercial (base), que é:

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} MT(7)_{3 \times 3} & \vec{O}(6)_{1 \times 3} \\ \vec{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo as equações, temos:

$$MT(1) = MV \cdot R_{\text{erro}} \quad MT(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad MT(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo as equações, temos:

$$MT(7) = MT(1) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_6$$

$$MT(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \text{sen}\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \text{sen}\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_4 & -\text{sen}\theta_4 \\ 0 & \text{sen}\theta_4 & \cos\theta_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \text{sen}\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_5 & 0 & \cos\theta_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_6 & -\text{sen}\theta_6 \\ 0 & \text{sen}\theta_6 & \cos\theta_6 \end{bmatrix}$$

onde: $c_i = \cos \theta_i$ e $s_i = \text{sen} \theta_i$ para $i = 1, 2, \dots, 6$.

Substituindo, obtemos:

$$MT(7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & -s_4 \\ 0 & s_4 & c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & -s_6 \\ 0 & s_6 & c_6 \end{bmatrix}$$

Exercício 16.1(b)

O modelo de Denavit-Hartenberg resulta na obtenção de matrizes de transformação 4x4, que representam cada sistema de coordenadas do link na junta em relação ao sistema de coordenadas do link anterior. A representação de Denavit-Hartenberg depende de parâmetros θ_i , d_i , α_i e a_i , que, no caso de robôs comerciais como o ABB IRB-1400, são fornecidos pelo fabricante.

Tabela-solução 16.1 Parâmetros θ , d , α e a do robô ABB IRB-1400

Juntas	θ (graus)	d (mm)	α (graus)	a (mm)	Limite máximo das juntas (graus)
1	θ_1	475	- 90	0	± 170
2	θ_2	0	0	360	± 70
3	θ_3	0	90	0	- 65 / +70
4	θ_4	720	- 90	0	± 150
5	θ_5	0	90	0	± 115
6	θ_6	85	0	0	± 300

A matriz de transformação homogênea $A_{0,6}$ [4x4] é:

$$A_{0,6} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

Para o caso com juntas rotacionais, como as do ABB IRB-1400, podemos generalizar a matriz de transformação homogênea $A_{i-1,i}$ [4x4], tal que:

$$A_{i-1,i} = T_{z,d} \cdot T_{z,\theta} \cdot T_{x,a} \cdot T_{x,\alpha}$$

onde $T_{z,d}$, $T_{z,\theta}$, $T_{x,a}$, e $T_{x,\alpha}$ são quatro matrizes homogêneas de rotação-translação [4x4].

Desenvolvendo:

$$A_{i-1,i} = T_{z,d} \cdot T_{z,\theta} \cdot T_{x,a} \cdot T_{x,\alpha}$$

$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\text{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \cdot \text{sen}\theta_i & \text{sen}\alpha_i \cdot \text{sen}\theta_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cdot \cos\theta_i & -\text{sen}\alpha_i \cdot \cos\theta_i & a_i \cdot \text{sen}\theta_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para o caso de um robô com juntas rotacionais, como o ABB IRB-1400, os parâmetros d_i , α_i e a_i são os parâmetros constantes que descrevem a junta, enquanto θ_i é a variável do problema: a rotação na junta.

Substituindo os dados da tabela acima na equação, temos:

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 475 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{1,2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & 0 & 360 \cdot \cos\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 360 \cdot \text{sen}\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \text{sen}\theta_3 & 0 \\ \text{sen}\theta_3 & 0 & -\cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{3,4} = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\text{sen}\theta_4 & 0 \\ \text{sen}\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{4,5} = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \text{sen}\theta_5 & 0 \\ \text{sen}\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{5,6} = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\text{sen}\theta_6 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 16.1(c)

Considerando $c_i = \cos \theta_i$ e $s_i = \text{sen} \theta_i$ para $i = 1, 2, \dots, 6$. Substituindo esses valores nas equações obtidas anteriormente temos:

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 475 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{1,2} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 360 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 360 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{3,4} = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{4,5} = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{5,6} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo as equações, temos:

$$A_{0,6} = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} \cdot A_{3,4} \cdot A_{4,5} \cdot A_{5,6}$$

$$A_{0,6} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 475 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 360 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 360 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 16.1(d)

Cálculo da posição final: obtido diretamente pela matriz resultante da multiplicação das matrizes de passagem obtidas a partir dos vetores locais ou parâmetros de Denavit-Hartenberg (quarta coluna).

Cálculo da orientação final: a partir do cálculo dos ângulos de Euler, cujo procedimento é apresentado a seguir

Para obtenção dos três ângulos de orientação da ferramenta de um robô, podemos utilizar suas representações mostradas na Tabela-solução 16.2.

Tabela-solução 16.2 Representações mais usadas dos ângulos de Euler ϕ , θ e ψ

	Sistema I	Sistema II (roll, pitch e yaw)
Seqüência de rotações	ϕ sobre o eixo OZ	ψ sobre o eixo OX
	θ sobre o eixo OU	θ sobre o eixo OU
	ψ sobre o eixo OW	ϕ sobre o eixo OZ

PROBLEMA DIRETO

Obtenção da matriz de orientação a partir de rotações angulares elementares

Ângulos de Euler – Sistema I

A representação do Sistema I é associada a rotações elementares em torno dos eixos de referência (conforme se vê na Figura-solução 16.2):

- rotação de ϕ sobre o eixo OZ ($R_{z,\phi}$);
- rotação de θ sobre o eixo rotacionado OU ($R_{u,\theta}$);
- rotação de ψ sobre o eixo rotacionado OW ($R_{w,\psi}$).

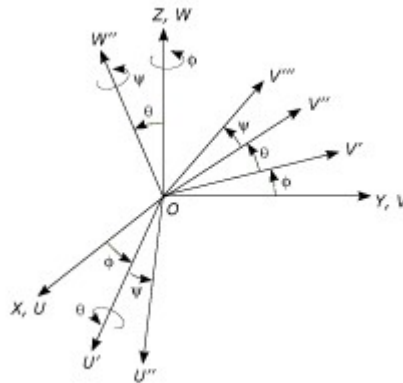


Figura-solução 16.2 Sequência de rotações para o Sistema I dos ângulos de Euler.

A matriz resultante dessas rotações é:

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} \cdot R_{u,\theta} \cdot R_{w,\psi}$$

$$R_{\phi,\theta,\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\phi,\theta,\psi} = \begin{bmatrix} c\phi \cdot c\psi - s\phi \cdot c\theta \cdot s\psi & c\phi \cdot s\psi - s\phi \cdot c\theta \cdot c\psi & s\phi \cdot s\theta \\ s\phi \cdot c\psi - c\phi \cdot c\theta \cdot s\psi & s\phi \cdot s\psi - c\phi \cdot c\theta \cdot c\psi & -c\phi \cdot s\theta \\ s\theta \cdot s\psi & s\theta \cdot c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação $R_{\phi,\theta,\psi}$ também pode ser especificada em termos da rotação dos eixos principais do sistema de coordenadas inercial:

- rotação de ψ sobre o eixo OZ , seguida de
- rotação de θ sobre o eixo OX , seguida de
- rotação de ϕ sobre o eixo OZ .

PROBLEMA INVERSO

Obtenção dos ângulos de orientação a partir da matriz de orientação

Dada a matriz de rotação $R_{\phi,\theta,\psi}$ obtida anteriormente:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi} \cdot R_{u,\theta} \cdot R_{w,\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver esse problema, podemos adotar duas abordagens:

- pré-multiplicando por $R_{z,\phi}^{-1}$;
- pós-multiplicando por $R_{w,\psi}^{-1}$.

Usaremos a primeira abordagem, pré-multiplicando por $R_{z,\phi}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y & c\phi \cdot s_x + s\phi \cdot s_y & c\phi \cdot a_x + s\phi \cdot a_y \\ -s\phi \cdot n_x + c\phi \cdot n_y & -s\phi \cdot s_x + c\phi \cdot s_y & -s\phi \cdot a_x + c\phi \cdot a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ c\theta \cdot s\psi & c\theta \cdot c\psi & -s\theta \\ s\theta \cdot s\psi & s\theta \cdot c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

Tomando a equação formada pelos elementos (1,3) das matrizes, temos:

$$c\phi \cdot a_x + s\phi \cdot a_y = 0 \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_x}{-a_y}\right) = a \tan(a_x, -a_y)$$

Tomando as equações formadas pelos elementos (1,1) e (1,2) das matrizes, temos:

$$c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y = c\psi \quad c\phi \cdot s_x + s\phi \cdot s_y = -s\psi$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{s\psi}{c\psi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-c\phi \cdot s_x - s\phi \cdot s_y}{c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y}\right) = a \tan(-c\phi \cdot s_x - s\phi \cdot s_y, c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y)$$

Tomando as equações formadas pelos elementos (2,3) e (3,3) das matrizes, obtemos:

$$s\phi \cdot a_x + c\phi \cdot a_y = s\theta \quad a_z = c\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{s\theta}{c\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{s\phi \cdot a_x + c\phi \cdot a_y}{a_z}\right) = a \tan(s\phi \cdot a_x + c\phi \cdot a_y, a_z)$$

Tais transformações devem ser biunívocas. Para que isso ocorra, a definição dos valores de ϕ , θ e ψ deve ser realizada a partir da utilização da função $a \tan 2$, demonstrada a seguir:

$$\theta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \leq \theta \leq 90, & \text{com } +x, +y \\ 90 \leq \theta \leq 180, & \text{com } -x, +y \\ -180 \leq \theta \leq -90, & \text{com } -x, -y \\ -90 \leq \theta \leq 0, & \text{com } +x, -y \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler – Sistema I: roll, pitch e yaw (RPY)

A representação do Sistema II dos ângulos de Euler, também conhecida como RPY, é largamente usada na aeronáutica. Essa representação corresponde à seguinte seqüência de rotações:

- rotação de ψ sobre o eixo OX ($R_{x,\psi}$) (roll);
- rotação de θ sobre o eixo OY ($R_{y,\theta}$) (pitch);
- rotação de ϕ sobre o eixo OZ ($R_{z,\phi}$) (yaw).

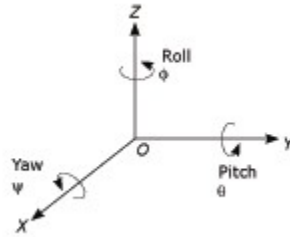


Figura-solução 16.3 Seqüência de rotações para o Sistema II dos ângulos de Euler (RPY)

A matriz resultante dessas rotações é:

$$R_{\phi,\theta,\psi} = R_{x,\psi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{z,\phi}$$

$$R_{\phi,\theta,\psi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

$$R_{\phi,\theta,\psi} = \begin{bmatrix} c\phi \cdot c\theta & c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\phi \cdot c\psi & c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - s\phi \cdot s\psi \\ s\phi \cdot c\theta & s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi - c\phi \cdot c\psi & s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\phi \cdot s\psi \\ -s\theta & c\theta \cdot s\psi & c\theta \cdot c\psi \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação $R_{\phi,\theta,\psi}$ também pode ser especificada em termos da rotação dos eixos principais do sistema de coordenadas inercial:

- rotação de ϕ sobre o eixo OZ , seguida de
- rotação de θ sobre o eixo rotacionado OV , seguida de
- rotação de ψ sobre o eixo rotacionado OU .

Dada a matriz de rotação obtida nos itens 1 ou 2:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_{\phi,\theta,\psi} = R_{x,\psi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

Para resolver esse problema, será usada a abordagem de pré-multiplicação por $R_{z,\phi}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y & c\phi \cdot s_x + s\phi \cdot s_y & c\phi \cdot a_x + s\phi \cdot a_y \\ -s\phi \cdot n_x + c\phi \cdot n_y & -s\phi \cdot s_x + c\phi \cdot s_y & -s\phi \cdot a_x + c\phi \cdot a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta \cdot s\psi & s\theta \cdot c\psi \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ -s\theta & s\theta \cdot s\psi & s\theta \cdot c\psi \end{bmatrix}$$

Tomando a equação formada pelos elementos (2,1) das matrizes, temos:

$$-s\phi \cdot n_x + c\phi \cdot n_y = 0 \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = a \tan(a_y, a_x)$$

Tomando as equações formadas pelos elementos (2,2) e (2,3) das matrizes, obtemos:

$$-s\phi \cdot s_x + c\phi \cdot s_y = c\psi \quad -s\phi \cdot a_x + c\phi \cdot a_y = -s\psi$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{s\psi}{c\psi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{s\phi \cdot a_x - c\phi \cdot a_y}{-s\phi \cdot s_x + c\phi \cdot s_y}\right) = a \tan(s\phi \cdot a_x - c\phi \cdot a_y, -s\phi \cdot s_x + c\phi \cdot s_y)$$

E tomando as equações formadas pelos elementos (1,1) e (3,1) das matrizes, vem:

$$-n_z = s\theta \quad c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y = c\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{s\theta}{c\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-n_z}{c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y}\right) = a \tan(-n_z, c\phi \cdot n_x + s\phi \cdot n_y)$$

Tais transformações devem ser biunívocas. Para que isso ocorra, a definição dos valores de ϕ , θ e ψ deve ser realizada a partir da utilização da função $a \tan 2$, demonstrada a seguir:

$$\theta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \leq \theta \leq 90, & \text{com } +x, +y \\ 90 \leq \theta \leq 180, & \text{com } -x, +y \\ -180 \leq \theta \leq -90, & \text{com } -x, -y \\ -90 \leq \theta \leq 0, & \text{com } +x, -y \end{bmatrix}$$