Instituto de Matemática - UFBA

Disciplina: Geometria Analítica - Mat A 01

1^a **Lista - Cônicas**

1. Em cada um dos seguintes itens, determine uma equação da parábola a partir dos elementos dados:

   (a) foco F (3, 4) e diretriz $d : x - 1 = 0$;

   (b) foco F(-1, 1) e vértice V (0, 0);

   (c) vértice V (1, 2), eixo focal paralelo a OX e P (-1, 6) é um ponto de seu gráfico;

   (d) eixo focal paralelo a OY e os pontos P(0, 0), Q(1, -3) e R(-4, -8) pertencem a seu gráfico;

   (e) eixo focal e.f.: $y - 5 = 0$, diretriz $d : x - 3 = 0$ e vértices sobre a reta $r : y = 2x + 3$;

   (f) vértice V (1, 1) e foco F(0, 2);

   (g) eixo focal OY e o ponto L(2, 2) é uma das extremidades do latus rectum.

2. Dadas as equações das parábolas:

   (a) $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$

   (b) $y^2 - 2xy + x^2 + 16x + 16y = 0$,

   Determine para cada uma delas os seguintes itens:

   i. as coordenadas do vértice e do foco;

   ii. as equações da diretriz e do eixo focal;

   iii. o comprimento do latus rectum.

3. Uma parábola P tem equação $y'^2 = -8x'$ em relação ao sistema $x'O'y'$ indicado na figura 1.
   Determine:

   (a) o esboço gráfico de P;

   (b) as coordenadas do foco e a equação da diretriz de P em relação ao sistema $x'O'y'$;

   (c) uma equação de P, em relação ao sistema xOy.

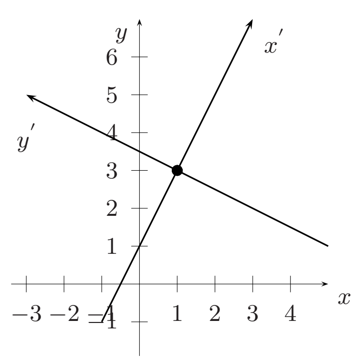

Figura 1

4. Identifique o lugar geométrico de um ponto que se desloca de modo que a sua distância ao ponto P(-2, 3) é igual à sua distância à reta $r : x + 6 = 0$. Em seguida determine uma equação deste lugar geométrico.

5. Determine o comprimento da corda focal da parábola $x^2 + 8y = 0$ que é paralela à reta $r : 3x + 4y - 7 = 0$.

6. Um cometa se desloca numa órbita parabólica tendo o Sol como o foco. Quando o cometa está a 4.10^7 km do sol (figura 2), a reta que os une forma um ângulo de 60^o com o eixo da órbita. Determine a menor distância que o cometa se encontra do Sol.

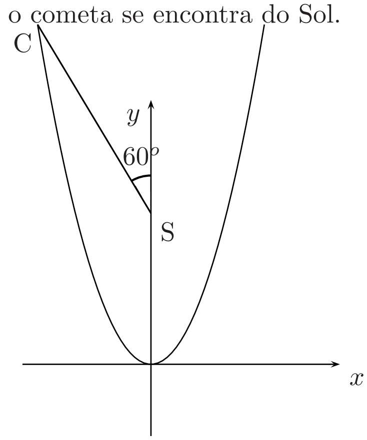

Figura 2

7. Em cada um dos seguintes itens, determine uma equação da elipse, a partir dos elementos dados;

   (a) focos $F_1(3, 8)$ e $F_2(3, 2)$, e comprimento do eixo maior igual a 10;

   (b) vértices $V_1(5, -1)$ e $V_2(-3, -1)$, e excentricidade $e = \frac{3}{4}$;

   (c) Centro $C(-1, -1)$, vértice $V(5, -1)$ e excentricidade $e = \frac{2}{3}$;

   (d) Centro $C(1, 2)$, foco $F(6, 2)$ e $P(4, 6)$ é um ponto da elipse;

   (e) $F(-4, -2)$ e $F(-4, -6)$, e med(LR) $= 6$;

   (f) vértice $V(3, -3)$ e extremos do eixo menor $B_1(2, 2)$ e $B_2(-2, -2)$;

   (g) o centro sobre a reta $r : y = 2$, foco $F(3, 4)$, excentrencidade $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e os seus eixos são paralelos aos eixos coordenados.

8. Dadas as equações das elipses:

   (a) $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$

   (b) $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$,

   determine para cada uma os seguintes itens:

      i. as coordenadas dos vértices e focos;

      ii. a excentricidade e o comprimento do latus rectum;

iii. as equações dos eixos focal e normal;

iv. comprimentos dos eixos maior e menor.

9. Um ponto P(x, y) se desloca de modo a soma de suas distâncias aos pontos A(3, 1) e B(-5, 1) é 10. Diga qual a curva descrita por P e em seguida determine sua equação.

10. Determine o comprimento dos raios focais do ponto $P(3, \frac{7}{4})$ sobre a elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

11. Determine uma equação da cônica com centro na reta $r : x - 3 = 0$, eixo focal paralelo ao eixo OX, um dos vértices V(7, 0) e $e = \frac{1}{2}$.

12. Em cada um dos itens, determine uma equação da hipérbole a partir dos elementos dados:

    (a) focos $F_1(-1, 3)$, $F_2(-7, 3)$ e comprimento do eixo transverso igual a 4;

    (b) vértices $V_1(5, 4)$, $V_2(1, 4)$ e comprimento do latus rectum igual a 5;

    (c) focos $F_1(2, 13)$, $F_2(2, -13)$ e comprimento do eixo conjugado igual a 24;

    (d) centro C(0, 0), um dos focos F(4, 4) e um dos vértices $V(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$;

    (e) assíntotas $r : 4x + y - 11 = 0$ e $s : 4x - y - 13 = 0$e um dos vértices V(3, 1);

    (f) um dos focos $F(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, eixo normal: $y = -x$ e excentricidade $e = \frac{3}{2}$;

    (g) eixo normal:$y = 2$, uma das assíntotas $r : 2x - y - 4 = 0$ e comprimento do latus rectum igual a 3.

13. Dada a equação $xy - 3x + 4y - 13 = 0$, identifique a cônica e determine as coordenadas dos vértices e focos, as equações dos eixos focal e normal, a excentricidade e o comprimento do latus rectum.

14. Uma hipérbole em relação ao sistema $x'Oy'$ (figura 3) tem equação $\frac{(x'-2)^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$.
    Determine, em relação ao sistema xOy:

    (a) as coordenadas dos vértices e focos;

    (b) as equações das assíntotas;

    (c) a sua equação.

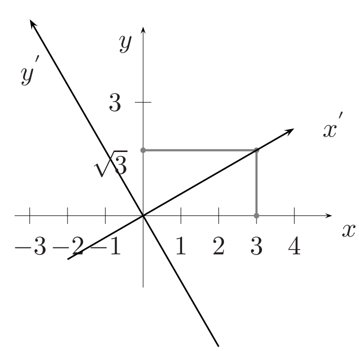

Figura 3

15. Determine o lugar geométrico descrito por um ponto que se desloca de modo que o módulo da diferença de suas distâncias aos pontos $P_1(-6, -4)$ e $P_2(2, -4)$ é igual a 6.

16. Escreva uma equação da hipérbole conjugada da hipérbole de equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Determine, para cada curva, as coordenadas dos focos e as equações das assíntotas.

17. Determine uma equação da hipérbole equilátera de focos nos pontos $F_1(1, 6)$ e $F_2(1, -2)$.

18. Determine uma equação da elipse com excentricidade $e = \frac{1}{3}$ e cujos focos coicidem com os vértices da hipérbole H:$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

19. Determine uma equação da parábola cujo vértice coincide com o centro da hipérbole H: $2x^2 - 7y^2 - 4x + 14y - 19 = 0$, e sua diretriz coincide com o eixo focal da elipse E:$\frac{(x-1)^2}{4} + (y + 2)^2 = 1$.

20. Determine uma equação da elipse de excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e com eixo maior coincidindo com o latus rectum da parábola de equação $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

21. Determine e identifique uma equação do lugar geométrico dos pontos do plano cujas abcissas e coordenadas são respectivamente iguais as abcissas e às metades das ordenadas dos pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.

22. Considere os pontos $A(-1, 0)$ e $B(2, 0)$. Determine uma equação do lugar geométrico dos pontos M do plano não pertencentes à reta AB e tais que o ângulo B do triângulo AMB seja sempre o dobro do ângulo A do mesmo triângulo. Esboce a curva.

23. Dois vértices de um triângulo são os pontos A(1, 0) e B(5, 0). Determine uma equação do terceiro vértice C, se este se move de tal forma que a diferença entre os comprimentos AC e BC é sempre igual à metade do comprimento do lado AB.

24. Um matemático aceitou um cargo numa nova Universidade situada a 6 km da margem retilínea de um rio. O professor deseja construir uma casa que esteja a uma distância à Universidade igual a metade da distância até a margem do rio. Os possíveis locais satisfazendo esta condição pertencem a uma curva. Defina esta curva e determine sua equação em relação a algum sistema à sua escolha.

25. Um segmento AB de 12 unidades de comprimento(u.c), desloca-se de modo que A pecorre o eixo OX e B percorre o eixo OY. O ponto P(x, y) é interior ao segmento AB e fica situado a 8 u.c. de A. Estabeleça uma equação do lugar geométrico descrito pelo ponto P.

RESPOSTAS

1.

a) $4(x-2)=(y-4)^2$	b)$x^2+2xy+y^2+8x-8y=0$
c) $-8(x-1)=(y-2)^2$	d)$-(y-1)=(x+1)^2$
e) $-8(x-1)=(y-5)^2$	f)$x^2+2xy+y^2+4x-12y+4=0$
g) $4(y-1)=x^2$	

2. (a)

i) $V(-2,\frac{5}{2})$; $F(1,\frac{5}{2})$	ii) diretriz: $x=-5$; eixo focal :$2y-5=0$
iii) med(LR) $=12$	

(b)

i) $V(0,0)$; $F(-2,-2)$	ii) diretriz: $y=-x+4$; eixo focal :$y=x$

3.

b) $(-2,0)$; diretriz: $x^{'}=2$
c) P: $4x^2-4xy+y^2+(4+8\sqrt{5})x+(16\sqrt{5}-2)y+(1-56\sqrt{5})=0$

4. parábola, $(y-3)^2=8(x+4)$

5. $\frac{25}{2}$

6. 10^7 km

7.

a) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$	b) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{7}=1$
c) $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$	d) $\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$
e) $\frac{(x+4)^2}{12}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$	$13x^2+10xy+13y^2-144=0$
g) $\frac{(x-3)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$	

8. (a)

i) $V_1(1,3)$; $V_2(-3,3)$; $F_1(-1+\sqrt{3},3)$; $F_2(-1-\sqrt{3},3)$
ii) $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$; med(LR) $=1$
iii) eixo focal: $y=3$; eixo normal: $x=-1$
iv) med(eixo maior) $=$ 4u.c.; med(eixo menor) $=$ 2 u.c.

(b)

i) $V_1(-2,4)$; $V_2(2,-4)$; $F_1(-\sqrt{3},2\sqrt{3})$; $F_2(\sqrt{3},-2\sqrt{3})$
ii) $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$; med(LR) $=\sqrt{5}$
iii) eixo focal: $y=-2x$; eixo normal: $y=\frac{x}{2}$
iv) med(eixo maior) $=4\sqrt{5}$u.c.; med(eixo menor) $=2\sqrt{5}$ u.c.

9. elipse, $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

10. $\frac{7}{4}$ e $\frac{25}{4}$

11. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y)^2}{12}=1$

12.

a) $\frac{(x+4)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$	b) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{5}=1$
c) $\frac{y^2}{25}-\frac{(x-2)^2}{144}=1$	d) $xy=8$
e) $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{\frac{1}{4}}=1$	$9x^2+162xy+9y^2-640=0$
g) $\frac{(y-2)^2}{36}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$	

13.

Hiprérbole; $F_1(-4-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$; $F_2(-4+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$; $V_1(-3,4)$; $V_2(-5,2)$
eixo focal: $y = x+7$; eixo normal: $y = -x-1$, e $e = \frac{2}{\sqrt{2}}$, med(LR) $= 2\sqrt{2}$

14.

a) $V_1(2\sqrt{3}, 2)$; $V_2(0,0)$; $F_1(\sqrt{3}(1+\sqrt{2}), 1+\sqrt{2})$; $F_2(\sqrt{3}(1-\sqrt{2}), 1-\sqrt{2})$
b) r: $(1-\sqrt{3})y + (1+\sqrt{3})x - 4 = 0$; s:$(1+\sqrt{3})y + (\sqrt{3}-1)x - 4 = 0$
c) $\frac{(\sqrt{3}x+y-4)^2}{16} - \frac{(\sqrt{3}y-x)^2}{16} = 1$

15. $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1$

16. Hipérbole conjugada:

    equação: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$; focos $F_1(0,5)$ e $F_2(0,-5)$; assíntotas:$y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

    Hipérbole dada:focos $F_1(5,0)$ e $F_2(-5,0)$; assíntotas: as mesmas da hipérbole conjugada

17. $\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{1} = 8$

18. $\frac{(x-2)^2}{128} + \frac{(y+1)^2}{144} = 1$

19. $(x-1)^2 = 12(y-1)$

20. $\frac{(y-2)^2}{16} + \frac{(x-5)^2}{4} = 1$

21. $x^2 + 4y^2 = 25$ (elipse)

22. Ramo direito da hipérbole $3x^2 - y^2 = 3$, excluindo o vértice.

23. $3x^2 - y^2 - 18x + 24 = 0$ (menos o vértice)

24. Elipse.

    Considerando o sistema xOy, onde o eixo Ox é a margem do rio e a Universidade se encontra no ponto Q(0, 6) sobre o eixo Oy, a equação da curva é $4x^2 + 3(y-8)^2 = 48$.

25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$