1

Coordenadas e vetores no plano

Sumário

1.1 Introdução 2

1.2 Coordenadas e distância na reta 3

1.3 Coordenadas e distância no plano 6

1.4 Distância entre pontos do plano 8

1.5 Equipolência de segmentos orientados 14

1.6 Vetores no plano 16

1.7 Textos Complementares 22

1.1 Introdução

Nesse capítulo, introduziremos coordenadas na reta e no plano, para representar pontos por meio de números reais. A linguagem básica que utilizaremos continua com a apresentação dos vetores no plano e de suas principais propriedades. A representação dos pontos por suas coordenadas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos, e o uso de vetores permite o estudo de vários conceitos geométricos de forma mais simples e direta.

Para isso, admitiremos que o leitor tenha conhecimento dos axiomas e dos principais resultados da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, relativos aos seus elementos básicos: pontos, retas e planos. A partir desses elementos e dos axiomas de ordem, podemos definir dois conceitos fundamentais.

Sejam A e B dois pontos distintos. O **segmento de reta** AB é o conjunto formado pelos pontos A e B e pelos pontos C *entre* A e B, e a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto formado pelo segmento AB e por todos os pontos D tais que B está *entre* A e D.

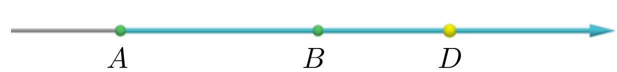


Figura 1.1: Ponto D na semirreta $\overrightarrow{AB}$

Vamos rever alguns axiomas e resultados da Geometria Euclidiana que serão úteis na construção da Geometria Analítica:

- por dois pontos distintos passa uma, e somente uma única reta (**axioma de incidência**);
- dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, existe uma, e somente uma reta paralela à reta r que passa por P (**axioma das paralelas**);
- dados um ponto P e uma reta r, existe apenas uma reta perpendicular a r que passa por P;
- por três pontos do espaço não situados numa mesma reta passa um, e somente um plano (**axioma de incidência**).

Além desses, utilizaremos vários outros resultados da Geometria Euclidiana, como o **Teorema de Pitágoras**, a **Lei dos Cossenos**, os casos de congruência entre triângulos etc.

Para iniciarmos nosso estudo, devemos lembrar que, na Geometria Euclidiana Real, fixada uma unidade de comprimento, a cada par de pontos A e B corresponde um número real, denominado **distância** entre os pontos A e B ou **comprimento** do segmento AB, e designado por $d(A, B)$ ou $|AB|$, respectivamente, que satisfaz às seguintes propriedades:

1. $d(A, B) \geq 0$;
2. $d(A, B) = 0 \iff A = B$;
3. $d(A, B) = d(B, A)$;
4. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (**desigualdade triangular**);
5. $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \iff A,\ B,$ e C são colineares e C está entre A e B.

Finalmente, precisamos lembrar que dados uma semirreta $\overrightarrow{CD}$ e um número real $\lambda > 0$, existe um único ponto $F \in \overrightarrow{CD}$ tal que $|CF| = \lambda$.

1.2 Coordenadas e distância na reta

Sejam r uma reta e $\overrightarrow{OA}$ uma semirreta de r com origem num ponto escolhido O de r.

Seja B um ponto de r tal que O está entre B e A. A semirreta $\overrightarrow{OB}$ é dita **oposta** à semirreta $\overrightarrow{OA}$

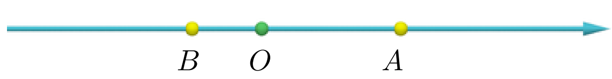


Figura 1.2: A reta r se corresponde com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais

A reta r é posta em correspondência com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ da seguinte maneira:

- à origem O faz-se corresponder o número 0 (zero);
- a cada ponto $X \neq O$, da semirreta $\overrightarrow{OA}$ corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$;

- a cada ponto X, $X \neq O$, da semirreta $\overrightarrow{OB}$ corresponde o número real negativo $x = -d(O, X)$.

A correspondência

$$r \longleftrightarrow \mathbb{R}$$

acima descrita é biunívoca (exercício).

Definição 1 O número real x que corresponde ao ponto X segundo a correspondência acima estabelecida é denominada a **coordenada** do ponto X.

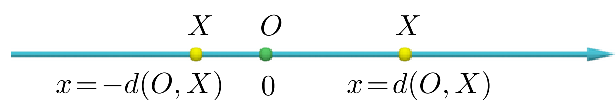


Figura 1.3: Coordenadas dos pontos na reta r

Definição 2 Sejam X e Y pontos da reta r com coordenadas x e y, respectivamente. Dizemos que o ponto Y está **à direita** do ponto X (ou que o ponto X está **à esquerda** do ponto Y) se, e somente se, $x < y$.

Dessa forma, os pontos da semirreta $\overrightarrow{OA}$ distintos de O estão à direita de O e os pontos da semirreta oposta a $\overrightarrow{OA}$ estão à esquerda de O.

Assim, semirreta $\overrightarrow{OA}$ estabelece um **sentido de percurso** na reta r.

Uma reta sobre a qual foi escolhida uma semirreta $\overrightarrow{OA}$ denominada **eixo** E de origem O e direção induzida pela semirreta $\overrightarrow{OA}$.

Proposição 3 Se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo E, respectivamente, então

$$d(X, Y) = |x - y|.$$

Demonstração É fácil verificar o resultado quando $X = Y$ ou $X = O$ ou $Y = O$.

Suponhamos que X, Y e O sejam três pontos distintos. Sem perda de generalidade, suponhamos que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$. Temos então três casos a considerar:

Caso 1. X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

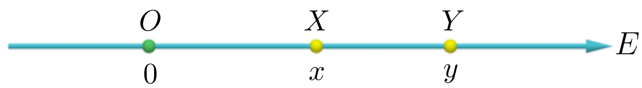


Figura 1.4: Caso 1. $0 < x < y$

Neste caso, X está entre O e Y, pois, caso contrário, Y estaria entre O e X e $d(O,Y) = y$ seria menor que $d(O,X) = x$. Logo,

$$\begin{aligned} d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y) &\iff y = x + d(X,Y) \\ &\iff d(X,Y) = y - x = |y - x|. \end{aligned}$$

Caso 2. X está à esquerda de O e Y está à direita de O. Isto é, $x < y < 0$.

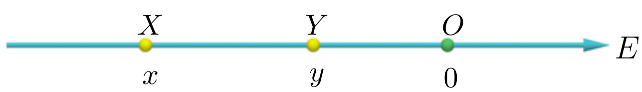


Figura 1.5: Caso 2. $x < y < 0$

De maneira análoga ao caso anterior, verificamos que Y está entre X e O. Assim,

$$\begin{aligned} d(X,O) = d(X,Y) + d(Y,O) &\iff -x = d(X,Y) - y \\ &\iff d(X,Y) = y - x = |y - x|. \end{aligned}$$

Caso 3. X está à esquerda de O e Y está à direita de O. Isto é, $x < 0 < y$.

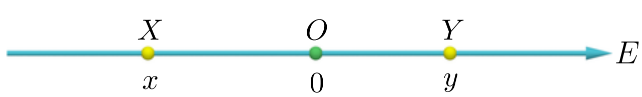


Figura 1.6: Caso 3. $x < 0 < y$

Neste caso, Y está na semirreta $\overrightarrow{OA}$ e X está na semirreta oposta a $\overrightarrow{OA}$. Portanto, O está entre X e Y e

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= d(X,O) + d(O,Y) \\ \iff d(X,Y) &= -x + y = y - x = |y - x|. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3 temos que, se CD é um segmento do eixo E tal que C está à esquerda de D, então o ponto X pertence ao segmento CD se, e só se, $c \leq x \leq d$, onde c, d e x são as coordenadas de C, D e X, respectivamente. Isto é, há uma correspondência biunívoca entre os pontos do segmento CD e os números reais do intervalo $[c,d]$:

$$CD \longleftrightarrow [c,d]$$

EXEMPLO 1

Sejam X e Y pontos de coordenadas x e y no eixo E. Então, a coordenada do ponto médio M do segmento XY é $m = \dfrac{x+y}{2}$.

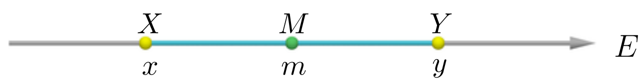


Figura 1.7: Sendo M o ponto médio do segmento XY, tem-se: $d(M,X) = d(M,Y)$

Solução. De fato, suponhamos que X está à esquerda de Y (o caso em que Y está à esquerda de X se trata de forma análoga). Como o ponto médio M está entre X e Y, temos $x < m < y$. Logo,

$$\begin{aligned} d(M,X) = d(M,Y) &\iff |x-m| = |y-m| \\ &\iff m - x = y - m \\ &\iff 2m = x + y \\ &\iff m = \frac{x+y}{2}. \end{aligned}$$

1.3 Coordenadas e distância no plano

Sistema de eixos ortogonais num plano. Seja π um plano e sejam dois eixos contidos em π, com unidades de medida de comprimento igual, que se intersectam perpendicularmente no ponto O do plano π que é origem comum deles. Para facilitar a visualização, convencionamos que:

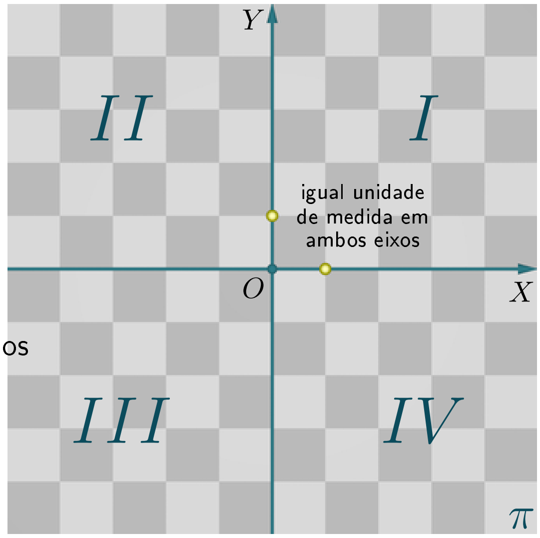


Figura 1.8: Sistema de eixos ortogonais OXY no plano

• um dos eixos, denominado *eixo-OX*, é horizontal, orientado para a direita e sua coordenada é a *primeira coordenada* ou *abscissa*;

• o outro eixo, denominado *eixo-OY*, é vertical, orientado para cima e a coordenada nesse eixo é a *segunda coordenada* ou *ordenada*.

Em todo o seguinte, faremos referência a essa configuração como *sistema de eixos ortogonais OXY* ou, brevemente, *sistema OXY*.

Uma vez escolhido um sistema de eixos OXY no plano π, o complementar dos eixos no plano consiste de quatro partes denominadas *quadrantes* e numeradas como na Figura 1.8: *primeiro quadrante* (I), *segundo quadrante* (II), *terceiro quadrante* (III) e *quarto quadrante* (IV), respectivamente.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ da seguinte maneira:

Ao ponto $P \in \pi$ fazemos corresponder o par ordenado (a, b) se P não está sobre os eixos, a é a abscissa do pé da perpendicular ao eixo-OX por P e b é a ordenada do pé da perpendicular ao eixo-OY por P.

Os números $a, b \in \mathbb{R}$ do par ordenado (a, b) associado ao ponto P são as *coordenadas cartesianas* do ponto P, a é a *abscissa* ou *primeira coordenada* de P e b é a *ordenada* ou *segunda coordanada* de P.

Na Figura 1.9 ilustramos alguns pontos do plano π com suas coordenadas em relação ao sistema OXY.

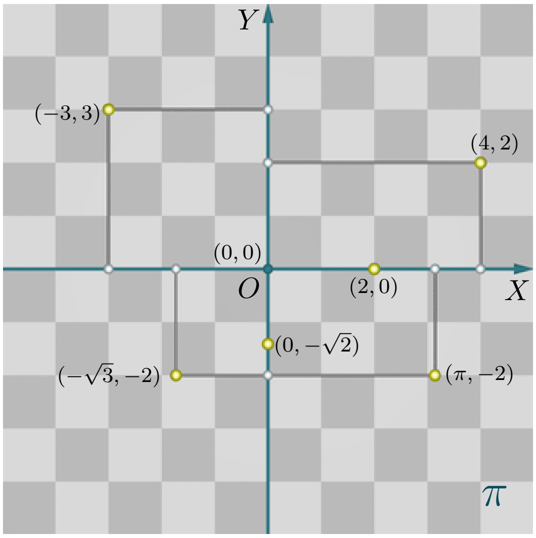


Figura 1.9: Pontos no plano π

Reciprocamente, ao par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ associamos o ponto P do plano π dado pela interseção da perpendicular ao eixo-OX que passa pelo ponto de abscissa a, com a perpendicular ao eixo-OY que passa pelo ponto de ordenada b.

Sabendo que $(a, b) = (a', b')$ em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $a = a'$ e $b = b'$, é simples verificar que a correspondência

$$\text{ponto do plano } \pi \longleftrightarrow \text{par ordenado de } \mathbb{R}^2$$

é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca.

Notação: Se $P \in \pi$ corresponde a $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (a, b)$.

Observe que os pontos do eixo-OX têm coordenadas $(x, 0)$ e os pontos do eixo-OY tem coordenadas $(0, y)$.

☞ Para Saber Mais - Sistemas de Coordenadas - Clique para ler

1.4 Distância entre pontos do plano

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos no plano π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY dado.

Seja $R = (c, b)$ (Figura 1.11). A distância de P a Q, que designamos $d(P, Q)$, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo $\triangle PQR$ de catetos PR e QR. Sendo a distância entre dois pontos de um eixo medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente, $|PR| = |a - c|$ e $|QR| = |b - d|$. Do teorema de Pitágoras, obtemos:

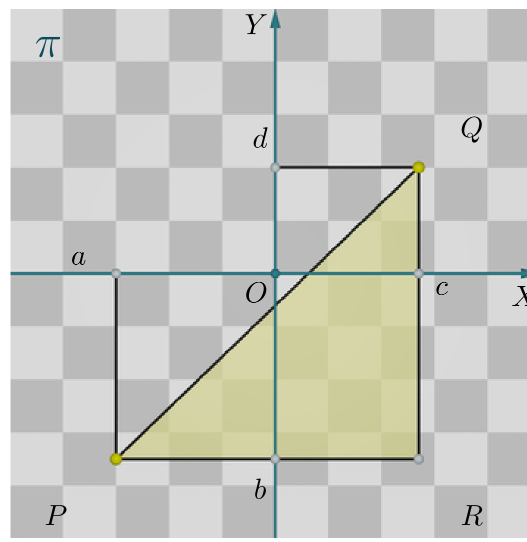


Figura 1.10: Distância entre pontos no plano π

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \qquad (1.1)$$

Assim, a distância de $P = (a, b)$ a $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

Exemplo 2

Calcule a distância do ponto $A = (-1, 2)$ ao ponto $B = (2, -3)$.

Solução. Temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

Exemplo 3

Determine $m \in \mathbb{R}$ para que os pontos $P = (m, 1)$ e $Q = (2m, -m)$ estejam a distância 1.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(2m-m)^2 + (-m-1)^2} \\ &= \sqrt{2m^2+2m+1} = 1 \\ \iff & \quad 2m^2+2m+1 = 1 \\ \iff & \quad m(m+1) = 0 \\ \iff & \quad m = 0 \ \text{ ou } \ m = -1. \end{aligned}$$

Exemplo 4

Se $A = (1,3)$, determine os pontos P do eixo-OX tais que $d(P,A) = 5$.

Solução. O ponto P é da forma $(x,0)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} d(A,P) &= \sqrt{(x-1)^2 + (0-3)^2} = 5 \\ \iff & \quad (x-1)^2 + 9 = 25 \iff (x-1)^2 = 16 \\ \iff & \quad x - 1 = \pm 4 \iff x = 5 \ \text{ ou } \ x = -3 \\ \iff & \quad P = (5,0) \ \text{ ou } \ P = (-3,0). \end{aligned}$$

O cálculo de distâncias permite obter uma caracterização algébrica do círculo no plano, do ponto médio e da mediatriz de um segmento no plano.

Definição 4

O **círculo $\mathcal{C}$ de centro no ponto $A \in \pi$ e raio $r > 0$** é o conjunto que consiste dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:

$$\mathcal{C} = \{P \in \pi \,|\, d(P,A) = r\}.$$

Se $A = (a,b)$ num sistema de eixos ortogonais OXY no plano π,

$$\begin{aligned} & P = (x,y) \in \mathcal{C} \\ \iff & d(P,A) = r \\ \iff & d(P,A)^2 = r^2 \\ \iff & (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Assim, associamos ao círculo $\mathcal{C}$ a *equação* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Propriedades geométricas do círculo são deduzidas por métodos algébricos estudando sua equação.

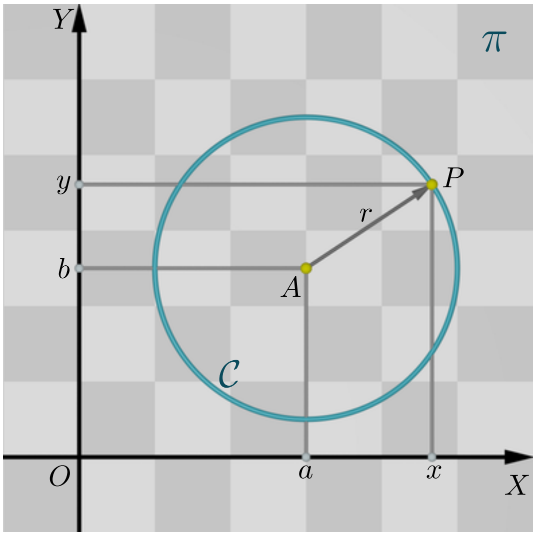


Figura 1.11: Círculo $\mathcal{C}$ de centro A e raio r

Exemplo 5

Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação:

(a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

(b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$.

Solução. **(a)** *Completando os quadrados*, obtemos:

$$\begin{aligned} &x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0 \\ &(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0 + 4 + 9 \\ &(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13. \end{aligned}$$

Portanto, o círculo $\mathcal{C}$ tem centro no ponto $A = (2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

(b) *Completando os quadrados*, obtemos:

$$\begin{aligned} &x^2 + 3x + y^2 - 5y = -1 \\ &\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\ &\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{C}$ é o círculo de centro no ponto $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

No seguinte exemplo veremos que as coordenadas do ponto médio M de um segmento AB no plano π são os valores médios das respectivas coordenadas dos pontos A e B.

Exemplo 6

Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos no plano π representados pelas suas coordenadas em relação um sistema de eixos ortogonais OXY, então,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

é o **ponto médio** do segmento AB.

Solução. Sejam $M = (x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento AB, $C = (x_M, y_1)$ e $D = (x_M, y_2)$.

Como $\triangle AMC$ e $\triangle BMD$ são triângulos congruentes (AAL),

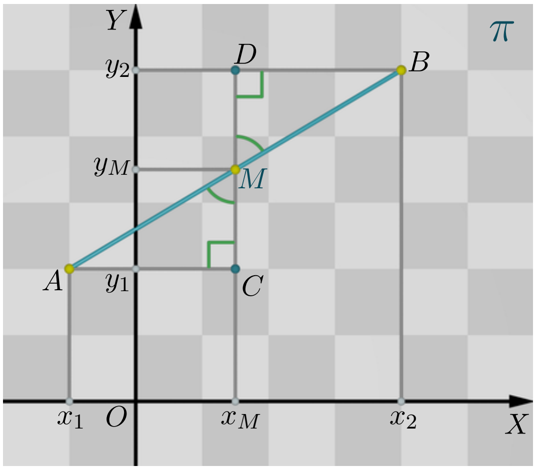


Figura 1.12: M é o ponto médio do segmento AB

- $d(A, C) = d(B, D)$

$\Longrightarrow |x_M - x_1| = |x_2 - x_M|$

$\Longrightarrow x_M =$ valor médio entre x_1 e x_2

$\Longrightarrow x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

- $d(C, M) = d(D, M)$

$\Longrightarrow |y_M - y_1| = |y_2 - y_M|$

$\Longrightarrow y_M =$ valor médio entre y_1 e y_2 $\Longrightarrow y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

No seguinte exemplo vamos usar coordenadas e a distância no plano para dar uma caracterização algébrica dos pontos que pertencem à mediatriz de um segmento dado.

Exemplo 7

Seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos pontos equidistantes dos pontos A e B no plano π:

$$\mathcal{R} = \{P \in \pi \,|\, d(P, A) = d(P, B)\}.$$

Mostre, algebricamente, que $\mathcal{R}$ é a **mediatriz do segmento** AB, isto é, $\mathcal{R}$ é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo seu ponto médio M.

Solução. Consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY de modo que o eixo$-OX$ seja a reta que passa pelos pontos A e B, com origem no ponto médio M do segmento AB e orientada de modo que A esteja à esquerda de B (figura 1.14).

Neste sistema de eixos, A e B têm coordenadas $(-x_0, 0)$ e $(x_0, 0)$, respectivamente, para algum número real $x_0 > 0$. Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{R} &\iff d(P, A) = d(P, B) \iff d(P, A)^2 = d(P, B)^2 \\ &\iff (x - (-x_0))^2 + (y - 0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - 0)^2 \\ &\iff (x + x_0))^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 \\ &\iff 2xx_0 = -2xx_0 \iff 4xx_0 = 0 \\ &\iff x = 0 \iff P \in \text{eixo} - OY\,. \end{aligned}$$

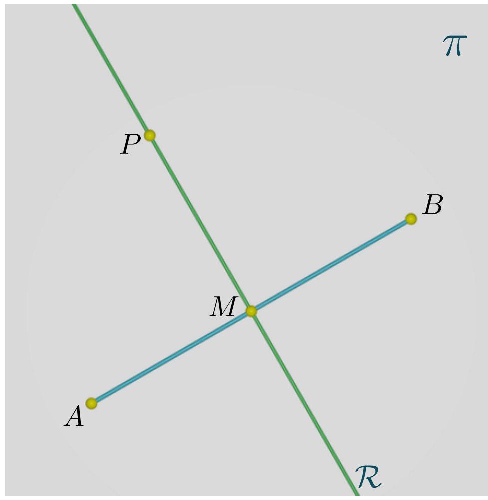


Figura 1.13: Mediatriz e ponto médio de AB

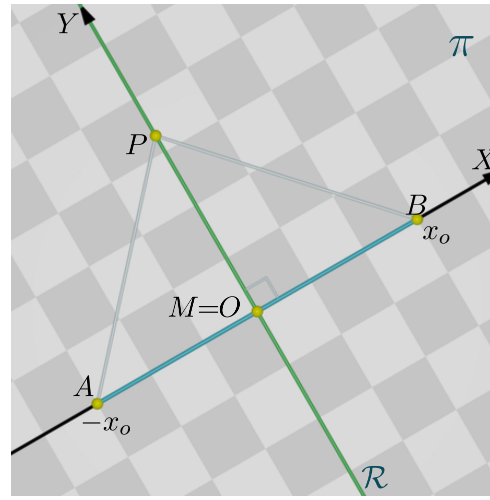


Figura 1.14: Escolha do sistema de eixos ortogonais

Portanto, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\}$ = eixo $-$ OY corresponde, geometricamente, à reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio M do segmento AB.

No seguinte exemplo vamos caracterizar, em termos de coordenadas, os pontos obtidos a partir de um ponto dado aplicando uma rotação de $90°$ com respeito à origem.

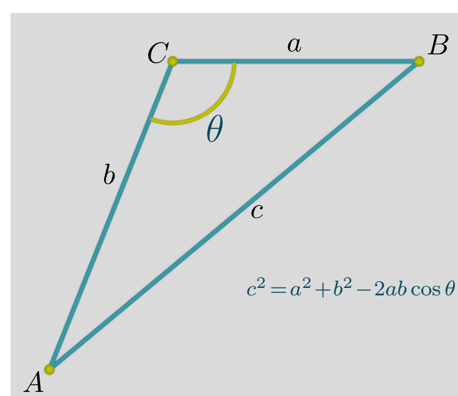


Figura 1.15: Lei dos Cossenos

Para isso precisamos lembrar do seguinte resultado (Figura 1.15):

Lei dos Cossenos: Se $\triangle ABC$ é um triângulo, $\theta = \widehat{ACB}$ é o ângulo no vértice C e a, b e c são os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente, então: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.

Exemplo 8

Seja $P = (x, y) \neq O$ um ponto do plano π. Então, os pontos $P' = (-y, x)$ e $P'' = (y, -x)$ são obtidos a partir do ponto P rotacionando de $90°$ o segmento OP em torno da origem.

Convenção: a rotação de 90° que leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (-y, x)$ tem *sentido positivo* e a rotação de 90° que leva o ponto P no ponto $P'' = (y, -x)$ tem *sentido negativo*.

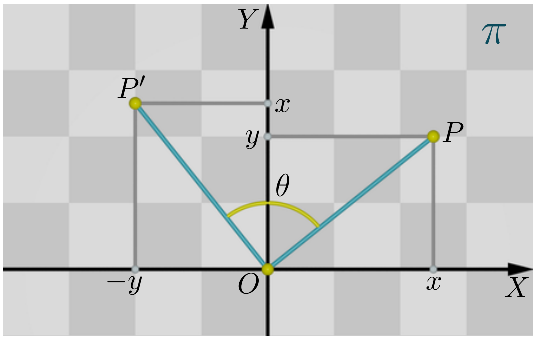


Figura 1.16: Posição dos pontos P e P'

Solução. Como

$$d(P,O)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2$$

$$d(P',O)^2 = (-y-0)^2 + (x-0)^2 = y^2 + x^2,$$

o triângulo $\triangle POP'$ é isósceles.

Além disso,

$$\begin{aligned} d(P,P')^2 &= (-y-x)^2 + (y-x)^2 \\ &= y^2 + 2xy + x^2 + x^2 - 2xy + y^2 \\ &= 2(x^2+y^2) = (x^2+y^2) + (x^2+y^2) = d(P,O)^2 + d(P',O)^2. \end{aligned}$$

Pela Lei dos Cossenos, se $\theta = \widehat{POP'}$ (Figura 1.16),

$$d(P,P')^2 = d(P,O)^2 + d(P',O)^2 - 2d(P,O)\,d(P',O)\cos\theta,$$

logo, $\cos\theta = 0$ e o triângulo $\triangle POP'$ é retângulo em O.

Isso significa que o ponto P' é obtido a partir do ponto P rotacionando o segmento OP de 90° em torno da origem (Figura 1.17).

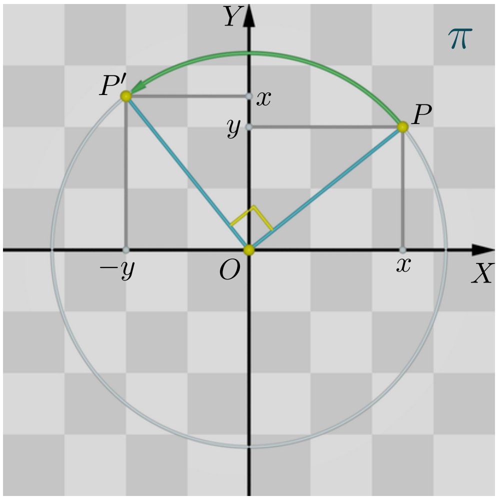


Figura 1.17: P' obtido rotacionando P de 90°

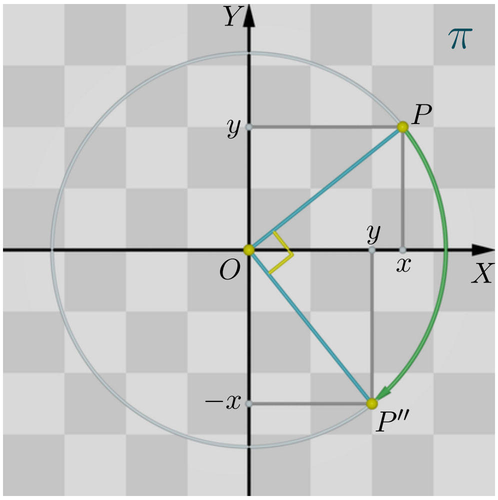


Figura 1.18: P'' obtido rotacionando P de -90°

Análogamente, se prova que o ponto $P'' = (y, -x)$ é obtido a partir do ponto P rotacionando o segmento OP de 90° em torno da origem no sentido negativo (Figura 1.14)

☞ Para Saber Mais - Fermat e Descartes - Clique para ler

1.5 Equipolência de segmentos orientados

Os métodos algébricos da Geometria cartesiana de Fermat e Descartes influenciaram enormemente a matemática ao longo de quase 200 anos até que foram necessários metodos mais diretos e livres de coordenadas na geometria.

Figura 1.19: Bellavitis (1803-1880)

Em 1832 **Giusto Bellavitis** publica um trabalho onde é apresentado o conceito de *equipolência* entre segmentos que é, basicamente, a noção de *vetor* que conhecemos e que foi formalizada em 1844 por **Hermann Grassmann** no seu *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (Teoria de Extensão Linear, um novo ramo da Matemática)

☞ Para Saber Mais - Sobre paralelogramos. - Clique para ler

Seja AB um **segmento orientado** de origem A e extremidade B. Isto é, no segmento AB estabelecemos um **sentido de percurso** (orientação) de A para B. Nessa situação, dizemos que o segmento BA está orientado com o **sentido de percurso oposto** ao do segmento AB (Figura 1.20). Bellavitis classificou os segmentos orientados do plano a partir da relação de **equipolência**:

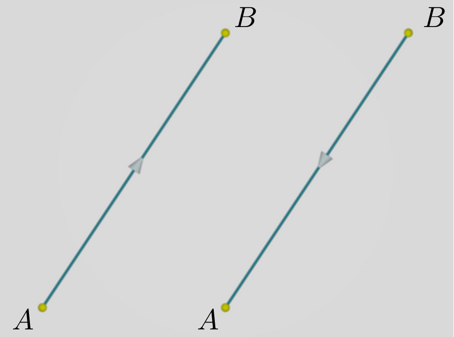


Figura 1.20: Segmentos com sentidos opostos

Definição 5

Dizemos que os segmentos orientados AB e CD são **equipolentes**, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem às seguintes três propriedades:

(a) têm o mesmo comprimento;

(b) são paralelos ou colineares;

(a) têm o mesmo sentido

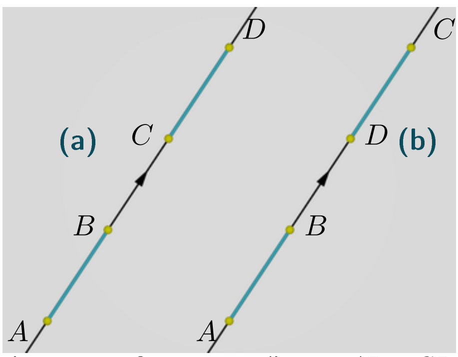


Figura 1.21: Segmentos colineares AB e CD com (a) o mesmo sentido (b) sentidos opostos

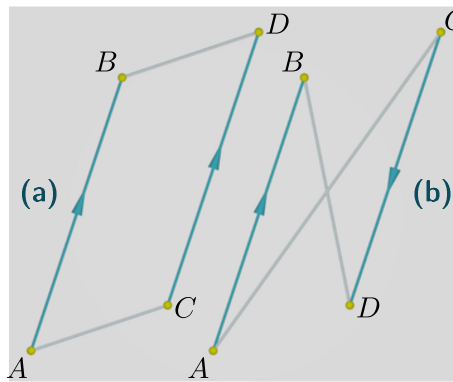


Figura 1.22: (a) $AB \equiv CD$ (b) $AB \not\equiv CD$

Note que dois segmentos colineares AB e CD (Figura 1.21) têm o mesmo sentido quando induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contêm.

Se AB e CD são segmentos paralelos e de comprimento igual, então AB e CD têm o mesmo sentido quando $ABDC$ é um paralelogramo.

Assim, na Figura 1.22 (a), $AB \equiv CD$, porque $ABDC$ é um paralelogramo e, na Figura 1.22 (b), $AB \not\equiv CD$, porque $ABDC$ não é um paralelogramo.

A seguinte proposição fornece um critério para verificar quando dois segmentos são equipolentes.

Proposição 6

$AB \equiv CD \iff$ ponto médio de $AD =$ ponto médio de BC.

☞ Para Saber Mais - Prova da proposição 6. - Clique para ler

Da Proposição 6 resulta que, se A, B, C e D são pontos no plano, então:

$$AB \equiv CD \iff AC \equiv BD.$$

A seguinte proposição nos diz que qualquer ponto do plano é a extremidade inicial de um segmento orientado equipolente a um segmento orientado dado.

Proposição 7 Dados os pontos A, B e C, existe um único ponto D tal que $AB \equiv CD$.

☞ Para Saber Mais - Prova da Proposição 7. - Clique para ler

Vamos caracterizar a equipolência em termos de coordenadas. Para isso, consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam

$$A = (a_1, a_2);\ B = (b_1, b_2);\ C = (c_1, c_2) \text{ e } D = (d_1, d_2)$$

pontos do plano expressos em coordenadas com relação ao sistema dado.

Proposição 8

$$AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

Demonstração Pela Proposição 6,

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\iff \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC \\ &\iff \left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right) \\ &\iff (a_1+d_1, a_2+d_2) = (b_1+c_1, b_2+c_2) \\ &\iff a_1+d_1 = b_1+c_1 \text{ e } a_2+d_2 = b_2+c_2 \\ &\iff b_1-a_1 = d_1-c_1 \text{ e } b_2-a_2 = d_2-c_2. \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 9 Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, -2)$ e $C = (-2, 0)$, determine as coordenadas do ponto $D = (x, y)$ de modo que $AB \equiv CD$.

Solução. Pela proposição 8, temos

$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\iff 3 - 2 = x - (-2) \quad \text{e} \quad -2 - 2 = y - 0 \\ &\iff x = -1 \text{ e } y = -4 \iff D = (-1, -4). \end{aligned}$$

☞ Para Saber Mais - Relação de equivalência - Clique para ler

1.6 Vetores no plano

A relação de equipolência permite classificar os segmentos orientados do plano mediante a seguinte definição.

Definição 9

Sejam A e B pontos no plano. O **vetor** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Cada segmento equipolente a AB é um **representante** do vetor $\overrightarrow{AB}$ (Figura 1.23).

Observação 10

(a) Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, representam o mesmo vetor. Isto é,

$$AB \equiv CD \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

(b) Dado um ponto A no plano, o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$ é o **vetor nulo**. Note que $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BB}$, qualquer que seja o ponto B no plano.

(c) Pela Proposição 7, dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

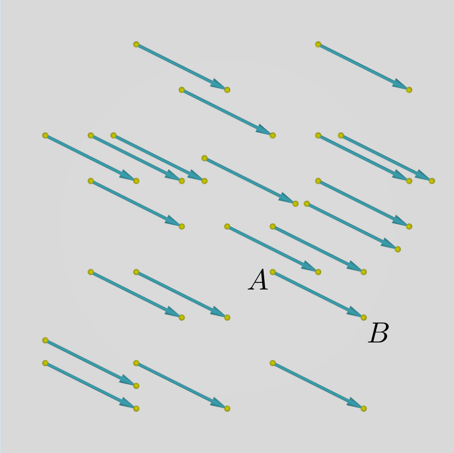


Figura 1.23: Representantes de $\overrightarrow{AB}$

Isto é, *qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor* $\overrightarrow{v}$.

Na prática, os vetores são manipulados através das suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais dado.

Definição 11

Dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as **coordenadas do vetor** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Note que, se $AB \equiv CD$, então, pela Proposição 8,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Isto é, as coordenadas de um vetor são calculadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Exemplo 10

Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (4, 0)$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

Solução. Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (3-1, 1-2) = (2, -1)$.

Além disso, se $D = (d_1, d_2)$, segue que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\ &\iff (2,-1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\ &\iff 2 = d_1 - 4 \quad \text{e} \quad -1 = d_2 - 0 \\ &\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \quad \text{e} \quad d_2 = -1 + 0 = -1\,.\end{aligned}$$

Portanto, $D = (6,-1)$.

Da observação 10 (c), temos que se $\overrightarrow{v}$ é um vetor e AB é um dos seus representantes, então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} \equiv \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Assim, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (x, y)$:

$$AB \equiv OP \iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (x - 0, x - 0) = (x, y)$$

Ou seja, vale a seguinte proposição:

Proposição 12

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. Para todo vetor $\overrightarrow{v}$ existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.

Exemplo 11

Dados $A = (-1, 2)$ e $B = (4, 1)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solução. Pela Proposição 12 (Figura 1.24),

$$P = (4 - (-1), 1 - 2) = (4 + 1, -1) = (5, -1).$$

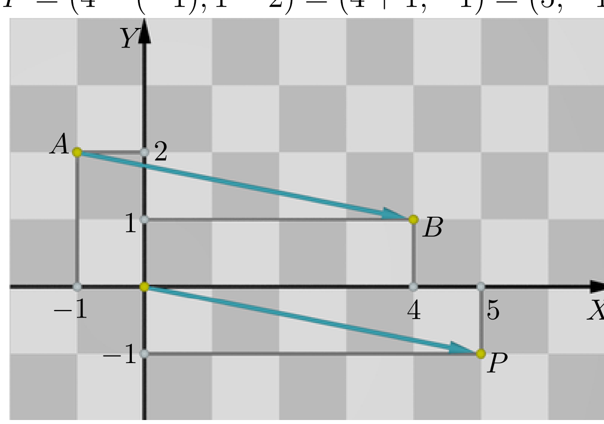


Figura 1.24: $AB \equiv OP$, Exemplo 11

Observação 13

É importante lembrar que a escolha de um sistema de eixos ortogonais nos permite identificar pontos do plano com pares ordenados de números reais em $\mathbb{R}^2$. A Proposição 12 nos permite estabelecer outra identificação em que a cada vetor do plano corresponde, também, um par ordenado em $\mathbb{R}^2$:

Ponto do plano	$\longleftrightarrow$	**Vetor do plano**	$\longleftrightarrow$	**Par ordenado em $\mathbb{R}^2$**
P	$\longleftrightarrow$	$\overrightarrow{OP}$	$\longleftrightarrow$	(p_1, p_2)

Exercícios

1. Verifique que a correspondência que a cada ponto de uma reta r faz corresponder a sua coordenada em $\mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca.

2. Usando apenas semirretas construa uma definição do conceito de "Y está à direita de X".

3. Sejam A e B dois pontos distintos do eixo E com coordenadas a e b, respectivamente. Determine as coordenadas dos pontos $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ do eixo E que dividem o segmento AB em n segmentos de igual comprimento.

4. Um ponto G divide o segmento AB do eixo E em **média e extrema razão** se $\dfrac{d(A,B)}{d(A,G)} = \dfrac{d(A,G)}{d(G,B)}$. Determine a coordenada g de G em termos das coordenadas a e b de A e B, respectivamente.

5. Mostre que o conjunto $A = \{P = (x,y) \,|\, x^3 + y^3 = 1\}$ não intersecta o terceiro quadrante do plano.

6. O círculo $\mathcal{C}$ de centro A e raio $r > 0$ divide o plano em três subconjuntos disjuntos, são estes

   - o conjunto dos pontos do próprio círculo $\mathcal{C}$: $P \in \mathcal{C} \iff d(A,P) = r$;
   - o conjunto $\mathcal{I}$ dos pontos **interiores** a $\mathcal{C}$: $P \in \mathcal{I} \iff d(A,P) < r$;
   - o conjunto $\mathcal{E}$ dos pontos **exteriores** a $\mathcal{C}$, $P \in \mathcal{E} \iff d(A,P) > r$.

   (a) Determine se os pontos $P = (1,1)$, $Q = (-3,2)$, $R = (-2,-2)$, $S = (4,-2)$ pertencem ao círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 8$, ao seu interior ou ao seu exterior.

   (b) Determine se o círculo $\mathcal{C}_1 : x^2 - x + y^2 - 1 = 0$ intersecta o círculo $\mathcal{C}$. Caso negativo, decida se C_1 está contido no interior ou no exterior de $\mathcal{C}$.

7. Um subconjunto A do plano é **limitado** se consiste de pontos interiores a um círculo.

   (a) Mostre que A é limitado se, e somente se, A consiste de pontos interiores a um círculo centrado na origem.

   (b) Um subconjunto A do plano é **ilimitado** quando não é limitado. Mostre que A é ilimitado se, e somente se, A possui pontos exteriores a qualquer círculo centrado na origem.

   (c) Mostre que o conjunto A do Exercício 5 é ilimitado.

8. Um subconjunto A do plano é

   - **simétrico em relação ao eixo-OX** se $(x,y) \in A \Longleftrightarrow (x,-y) \in A$;
   - **simétrico em relação ao eixo-OY** se $(x,y) \in A \Longleftrightarrow (-x,y) \in A$;
   - **simétrico em relação à origem**, se $(x,y) \in A \Longleftrightarrow (-x,-y) \in A$.

   (a) Mostre que o conjunto $A = \{P = (x,y) \,|\, x^4 + y^4 = 1\}$ é simétrico em relação aos eixos OX e OY e também em relação à origem.

   (b) Mostre que A é limitado.

9. Determine o centro e o raio dos círculos cujas equações são:

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 2x + 4y \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 4y - 8x.$$

   Verifique que os círculos se intersectam e determine as coordenadas dos pontos de interseção.

10. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo de hipotenusa BC. Calculando distâncias em coordenadas mostre que o comprimento da mediana relativa ao lado BC é a metade do comprimento do lado BC.

11. Seja AB um diâmetro do círculo $\mathcal{C}$ e seja C um ponto de $\mathcal{C}$ diferente de A e B. Usando a distância em coordenadas, mostre que o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo.

12. Determine o vértice C do triângulo equilátero $\triangle ABC$, sabendo que $A = (x,0)$ e $B = (-x,0)$.

13. Use o GeoGebra para localizar os pontos $A = (-2,2)$, $B = (1,1)$, $C = (1,3)$, $D = (3,4)$, $E = (3,2)$, $F = (6,1)$, $G = (3,1)$, $H = (1,0)$, $I = (0,4)$, $J = (-3,2)$, $K = (-1,1)$, $L = (-3,0)$, $M = (-2,-3)$, $N = (1,-1)$, $P = (5,0)$ e $Q = (3,1)$. Por mera inspeção, decida quais dos seguintes segmentos são equipolentes: AB, AC, CD, DF, EF, GH, EJ, IJ, KL, NM, MN, PQ.

14. Em cada caso, determine o ponto D tal que $CD \equiv AB$, onde $A = (-1,-1)$, $B = (2,3)$ e C é o ponto:

(a) $(2,1)$; **(b)** $(-2,0)$; **(c)** $(1,3)$; **(d)** $(1,1)$; **(e)** $(2,3)$.

15. Determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, onde:

(a) $A = (1,-1)$ e $B = (1,1)$;

(b) $A = (-2,0)$ e $B = (1,3)$;

(c) $A = (-1,-3)$ e $B = (0,0)$;

(d) $A = (2,-2)$ e $B = (2,2)$.

16. Sejam $A = (1,-1)$ e $B = (4,1)$ vértices do paralelogramo $\mathcal{P} = ABDC$. Sabendo que as diagonais de $\mathcal{P}$ se cortam no ponto $M = (3,2)$, determine os vértices C e D.

17. Dados os pontos $A = (1,1)$, $B = (3,4)$ e $C = (4,2)$, determine os possíveis pontos D tais que A, B, C e D sejam os vértices de um paralelogramo.

18. Se $\overrightarrow{PQ} = (2,1)$, determine a equação que satisfazem as coordenadas do ponto $Q = (x,y)$, sabendo que P pertence ao círculo de centro na origem e raio 1.

◇

1.7 Textos Complementares

Para Saber Mais

Figura 1.25: Ptolomeu

Ao longo do tempo, com diversas motivações práticas, o ser humano se defrontou com a necessidade de localizar lugares e medir distâncias e áreas de regiões, valendo-se de *Sistemas de Coordenadas* para esses fins. Sabe-se que os sistemas de coordenadas são usados na Astronomia e na Geografia, ainda que não na forma que usamos atualmente, desde a época dos gregos como **Hiparco** por volta de 150 a.C., sendo um dos exemplos mais famosos e relevantes o do mapa do Mundo de **Claudio Ptolomeu** (85–165 d.C.).

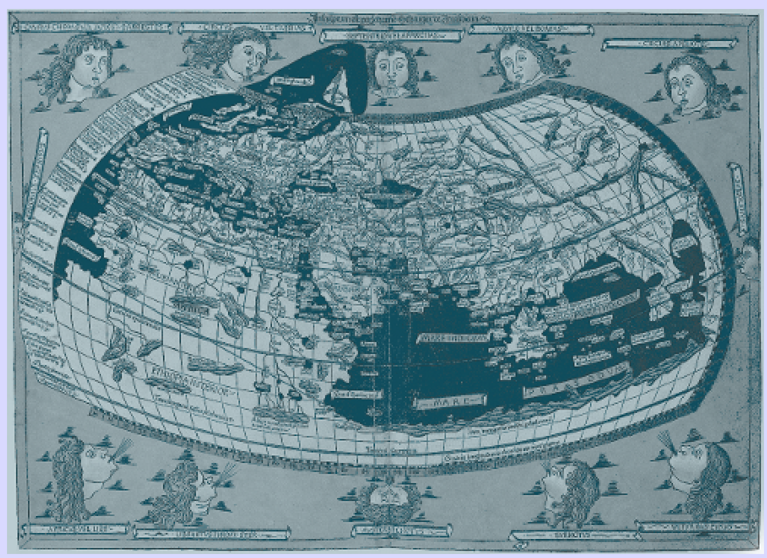


Figura 1.26: Reprodução de mapa de Ptolomeu por Johannes Schnitzer, 1482.

Figura 1.27: Oresme

Em sua obra *De configurationibus qualitatum et motuum*, **Nicole Oresme** (1323–1382) utiliza um sistema de coordenadas para elaborar um gráfico onde representa a variação de uma magnitude (velocidade) em termos de outra (tempo). A obra de Oresme foi reproduzida ao longo de 100 anos preservando sua forma original e nela aparecem pela primeira vez os termos *latitude* e *longitude*.

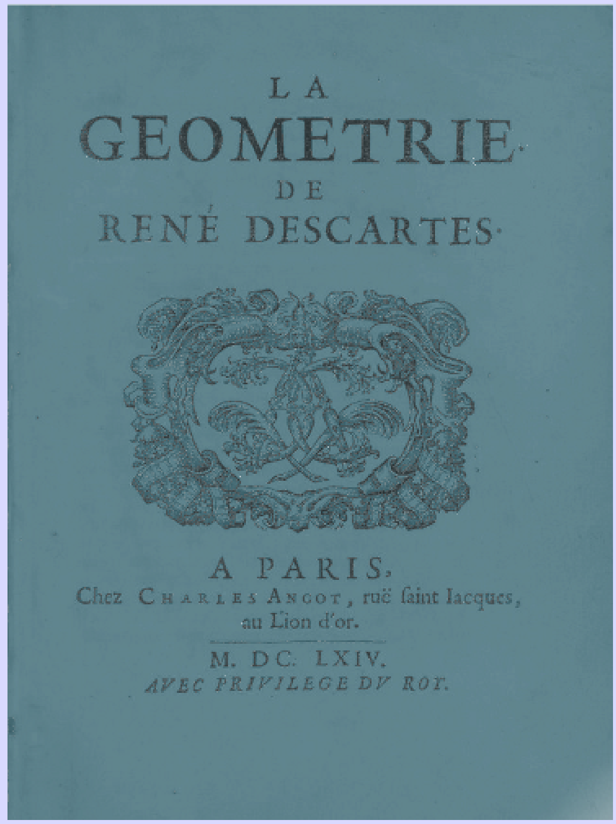
Para Saber Mais

A Geometria Analítica moderna foi descoberta de forma independente e quase simultânea por **Pierre de Fermat** em 1629 (num trabalho publicado apenas em 1679) e **René Descartes** em 1637 num trabalho denominado *La Géométrie* publicado em 1637 como apêndice da sua obra *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* – (Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências). O fato que permitiu a descoberta foi o grau de desenvolvimento em que se encontrava a Álgebra simbólica na época, o que permitiu manipular quantidades abstratas sem o caráter de medida da Geometria grega. A obra de Descartes consistia de três partes. Na primeira são postas as bases do que viria a ser a Geometria Algébrica, permitindo um avanço considerável em relação à matemática grega. Enquanto para os gregos uma variável x significava o comprimento de um segmento, um produto $x \cdot y$ a área de um retângulo e $x \cdot y \cdot z$ o volume de um paralelepípedo, para Descartes $x \cdot x = x^2$ era apenas o quarto termo da proporção $1 : x :: x : x^2$ (leia-se 1 está para x como x está para x^2).

Figura 1.28: Pierre de Fermat (1601-1665)

Figura 1.29: René Descartes (1596-1650)

Na segunda parte do *La Géométrie*, Descartes faz uma classificação de algumas curvas planas e descreve um método para construir tangentes a curvas (antes da invenção do Cálculo) e na terceira parte trata da resolução de equações de grau maior ou igual a 3. Deve-se a Descartes, também, o uso de expoentes para designar as potências.



LA

GEOMETRIE.

DE

RENÉ DESCARTES.

A PARIS,

Chez CHARLES ANGOT, ruë ſaint Iacques, au Lion d'or.

M. DC. LXIV.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Figura 1.30: *La Géométrie*, página de rosto

Para Saber Mais

Um **paralelogramo** é um quadrilátero com lados opostos paralelos (Figura 1.31). Dado o quadrilátero $ABDC$, usando congruência de triângulos prova-se que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) O quadrilátero é um paralelogramo;

(b) Seus lados opostos são congruentes;

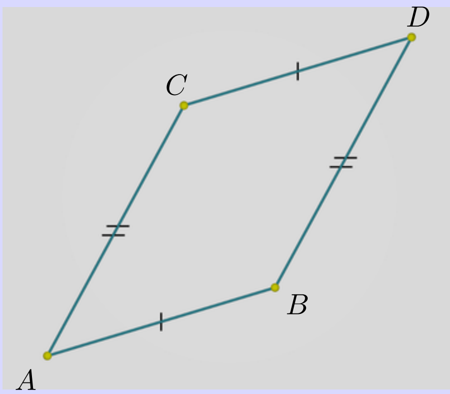


Figura 1.31: Paralelogramo $ABDC$, lados opostos congruentes e paralelos

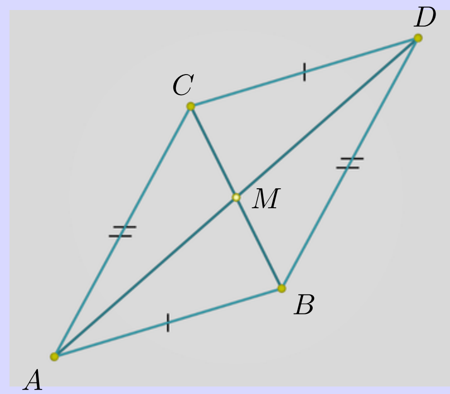


Figura 1.32: As diagonais de $ABDC$ se intersectam no ponto médio M

(c) Seus ângulos opostos são congruentes;

(d) Dois dos seus lados opostos são congruentes e paralelos;

(e) Suas diagonais se intersectam no ponto médio de ambas.

Para Saber Mais

Prova da proposição 6. Se $AB \parallel CD$, a equivalência é verdadeira, pois $ABDC$ é um paralelogramo e suas diagonais cortam-se ao meio.

Se AB e CD são colineares, seja r a reta que os contém provida de uma orientação e uma origem O escolhidas de modo que B esteja à direita de A (Figura 1.33). Sejam a, b, c e d as coordenadas de A, B, C e D na reta r em relação a uma unidade de medida escolhida.

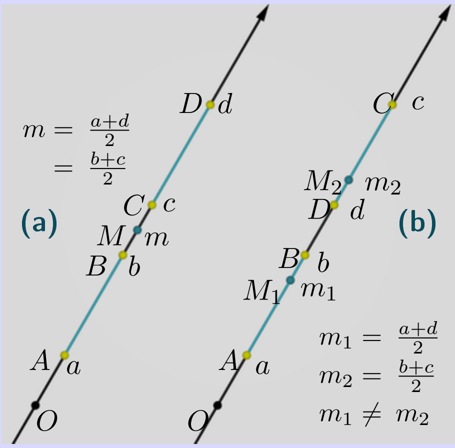


Figura 1.33: (a) $AB \equiv CD$ (b) $AB \not\equiv CD$

$(\Longrightarrow)$ Se $AB \equiv CD$, temos $a < b$ e $c < d$, pois AB e CD têm o mesmo sentido, e $b - a = d - c$, porque $|AB| = |CD|$. Logo,

$$\begin{aligned} b - a = d - c &\iff a + d = b + c \iff \frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2} \\ &\iff \text{ponto médio de } AD = \text{ ponto médio de } BC. \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Se ponto médio de $AD = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{b+c}{2} =$ ponto médio de BC, temos:

$$a + d = b + c \iff b - a = d - c\,.$$

Como $b - a$ e $d - c$ têm sinal e módulo iguais, os segmentos colineares AB e CD têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Portanto, $AB \equiv CD$.

Prova da Proposição 7 Temos dois casos, segundo os pontos A, B e C sejam ou não colineares.

(a) A, B e C colineares. O círculo de centro C e raio $|AB|$ intersecta a reta que contém os pontos A, B e C em exatamente dois pontos, mas apenas um deles, D na Figura 1.34(a), é tal que AB e CD têm o mesmo sentido.

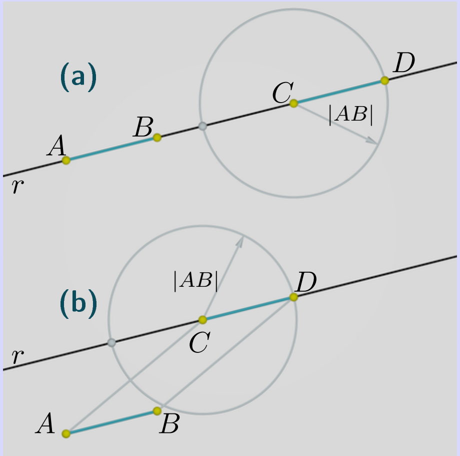


Figura 1.34: $AB \equiv CD$

(b) A, B e C não colineares. Seja r a reta que passa por C e é paralela à reta que contém A e B. O círculo de centro C e raio $|AB|$ intersecta a reta r em exatamente dois pontos, mas só um, D na Figura 1.34 (b), é tal que $ABDC$ é um paralelogramo. Ou seja, $AB \equiv CD$.

Para Saber Mais

Para Saber Mais

(a) Uma **relação de equivalência** $\sim$ entre os elementos de um conjunto A é uma relação tal que, para todos $a, b, c \in A$ valem as seguintes propriedades:

- **Reflexiva:** $a \sim a$;
- **Simétrica:** $a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$;
- **Transitiva:** Se $a \sim b$ e $b \sim c$ então $a \sim c$;

Uma relação de equivalência permite *classificar* os elementos de A, uma vez que ele fica subdividido de maneira natural em subconjuntos denominados **classes de equivalência** formadas por elementos que são relacionados, ou seja, *equivalentes entre si*.

(b) Da Proposição 8 segue que a relação de equipolência é uma relação de equivalência no conjunto de todos os segmentos orientados do plano.

Isto é:

- $AB \equiv AB$, para todo segmento AB;
- $AB \equiv CD \Longrightarrow CD \equiv AB$;
- A equipolência é transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv CD \\ \text{e} \\ CD \equiv EF \end{array}\right\} \Longrightarrow AB \equiv EF.$$

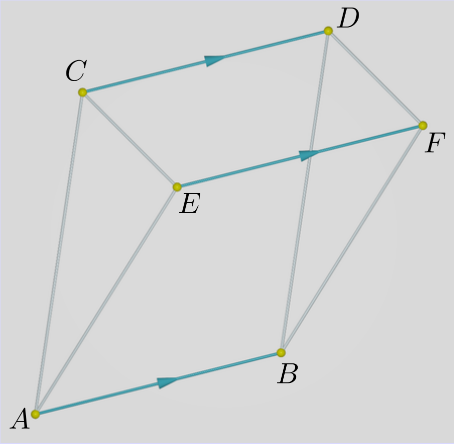


Figura 1.35: Transitividade da equipolência