2

Operações com vetores no plano

Sumário

2.1 Operações com vetores

Vamos definir duas operações no conjunto de vetores do plano, uma operação de *adição* e uma operação de *multiplicação de vetores por números reais*.

Definição 1

A operação de **adição de vetores** que a cada par de vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ associa um novo vetor, designado $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ e chamado **soma dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$**, se define como segue:

Se $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, seja C o único ponto tal que $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}$. O vetor **soma de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$** é o vetor $\overrightarrow{AC}$ (Figura 2.1):

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{A}C.$$

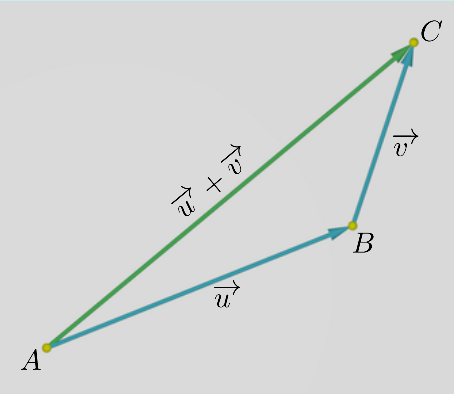


Figura 2.1: Adição $\vec{u}+\vec{v}$

Para Saber Mais

A adição de vetores é uma operação bem definida, isto é, a definição da soma do vetor $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BC}$ não depende da escolha do ponto A

Observação 2

Outra forma geométrica de visualizar a soma de dois vetores no plano é feita da seguinte maneira: sejam $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{CD}$ vetores no plano que não são parelelos, P um ponto escolhido no plano e Q e R tais que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PR}$. Se $\mathcal{P}$ é o paralelogramo $PQSR$, então o vetor soma $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ é $\overrightarrow{PS}$, onde PS é a diagonal de $\mathcal{P}$ com origem no vértice P.

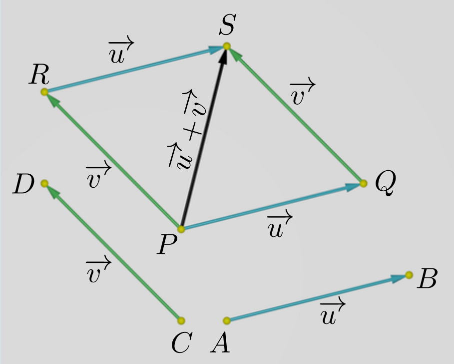


Figura 2.2: $\vec{u}+\vec{v}$ representado pela diagonal PS

Com efeito, sendo $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QS}$, temos

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}.$$

Adição de vetores em coordenadas. Na prática a operação de adição de vetores é realizada através da representação por meio de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais. Na seguinte proposição, vemos que a adição de vetores é efetuada somando as coordenadas correspondentes das parcelas.

Proposição 3

Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ vetores do plano expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais fixo OXY, então:
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Demonstração

Sejam $P = (u_1, u_2)$ e $Q = (v_1, v_2)$ tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ (Proposição 12, Capítulo 1). Seja $S = (w_1, w_2)$ o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PS}$.

Da Proposição 8 do Capítulo 1, obtemos:
$$(v_1 - 0, v_2 - 0) = (w_1 - u_1, w_2 - u_2),$$
logo,
$$S = (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (u_1 + u_2, v_1 + v_2).$$

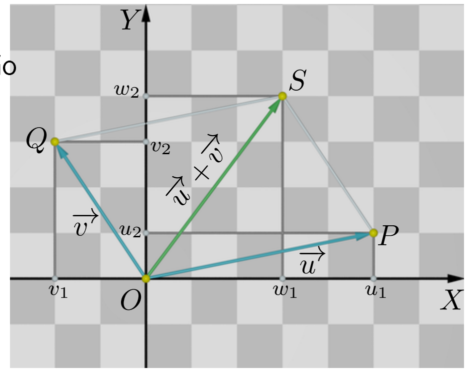


Figura 2.3: Adição de vetores em coordenadas

Outra operação que definiremos no conjunto de vetores do plano é a operação de **multiplicação de vetores por escalares**, que a cada vetor $\overrightarrow{v}$ e a cada número real $\lambda \in \mathbb{R}$ (também chamado *escalar*) associa o vetor $\lambda\overrightarrow{v}$, chamado **produto do escalar λ pelo vetor $\overrightarrow{v}$**.

Definição 4

O **produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$** é o vetor $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, representado pelo segmento orientado AC, tal que:

(a) A, B e C são colineares;

(b) $d(A, C) = |\lambda| d(A, B)$;

(c) $B = C$ se $\lambda = 0$;

(d) Os segmentos AC e AB têm igual sentido se $\lambda > 0$, e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

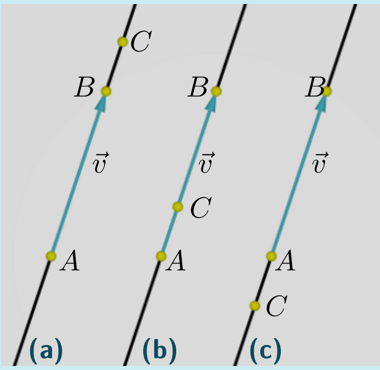


Figura 2.4: AC representando $\lambda\vec{v}$ para: **(a)** $\lambda > 1$; **(b)** $0 < \lambda < 1$; **(c)** $\lambda < 0$

Multiplicação de vetores por escalares em coordenadas. Na prática a operação de multiplicar um vetor por um escalar é efetuada usando coordenadas.

Vejamos que as coordenadas do vetor $\lambda\overrightarrow{v}$ são obtidas das coordenadas de $\overrightarrow{v}$ multiplicando pelo escalar λ.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Na seguinte proposição estabeleceremos as coordenadas do ponto C da Definição 4 em termos de λ e das coordenadas dos pontos A e B.

Proposição 5

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, $\lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, onde

$$C = (a_1 + \lambda(b_1 - a_1), a_2 + \lambda(b_2 - a_2)).$$

Consequentemente,

$$\lambda\,\overrightarrow{AB} = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2)).$$

Demonstração

Seja $C = (a_1 + \lambda(b_1 - a_1), a_2 + \lambda(b_2 - a_2))$.

É, claro que, se $\lambda = 0$, então $C = B$ (condição (c) da Definição 4).

A condição (b) da Definição 4 se verifica, pois:

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \sqrt{\lambda^2(b_1 - a_1)^2 + \lambda^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = |\lambda| d(A, B). \end{aligned}$$

Para verificar que os pontos A, B e C são colineares (condição (a) da Definição 4), no caso $\lambda \neq 0$, começamos observando que:

$$\begin{aligned} d(B, C) &= \sqrt{((a_1 + \lambda(b_1 - a_1)) - b_1)^2 + ((a_2 + \lambda(b_2 - a_2)) - b_2)^2} \\ &= \sqrt{(\lambda(b_1 - a_1) - (b_1 - a_1))^2 + (\lambda(b_2 - a_2) - (b_2 - a_2))^2} \\ &= \sqrt{(\lambda - 1)^2(b_1 - a_1)^2 + (\lambda - 1)^2(b_2 - a_2)^2)} \\ &= |\lambda - 1|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = |\lambda - 1| d(A, B). \end{aligned}$$

Analisamos os seguintes quatro casos:

Caso 1. $\lambda \in (0, 1)$. Temos $|\lambda - 1| = 1 - \lambda$ e:

$$d(A, C) + d(C, B) = \lambda\, d(A, B) + (1 - \lambda) d(A, B) = d(A, B).$$

Logo, A, B e C são colineares e C está entre A e B.

Caso 2. $\lambda = 1$. Nesse caso, $C = B$.

Caso 3. $\lambda > 1$. Temos $|\lambda - 1| = \lambda - 1$ e:

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, B) + (\lambda - 1) d(A, B) = \lambda d(A, B) = d(A, C).$$

Assim, A, B e C são colineares e B está entre A e C

Caso 4. $\lambda < 0$. Como $|\lambda| = -\lambda > 0$ e $|\lambda - 1| = (1 - \lambda)$, temos:

$$d(C, A) + d(A, B) = -\lambda d(A, B) + d(A, B) = (1 - \lambda) d(A, B) = d(C, B),$$

logo, C, A e B são colineares e A está entre C e B.

Pelo provado acima, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ coincidem quando $\lambda > 0$, e são opostas quando $\lambda < 0$. Portanto, AB e AC têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$ (condição (d) da Definição 4).

Corolário 6

O vetor $\lambda\overrightarrow{v}$ está bem definido. Isto é, se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então

$$\lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}.$$

Em particular, se $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\lambda\overrightarrow{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta).$$

Logo, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, temos $P = (\alpha, \beta)$ e $Q = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$ (Figura 2.5).

Com efeito, sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2)\\ &= (d_1 - c_1, d_2 - c_2)\\ &= \overrightarrow{CD},\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\lambda\overrightarrow{AB} &= (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2))\\ &= (\lambda(d_1 - c_1), \lambda(d_2 - c_2)) = \lambda\overrightarrow{CD}.\end{aligned}$$

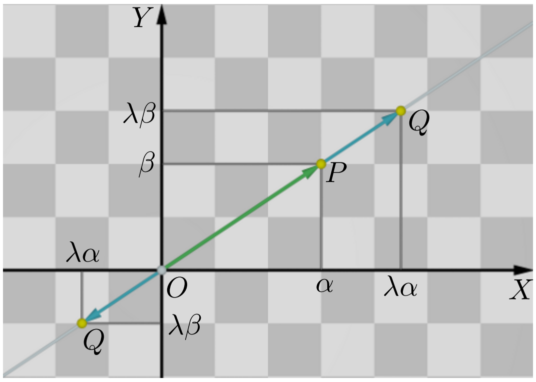


Figura 2.5: Produto $\lambda\vec{v}$ em coordenadas

Observação 7

- $\lambda\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
- $0\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- Não confunda: o número 0 (zero) com o vetor $\overrightarrow{0}$ (**vetor nulo**).
- Escrevemos $(-1)\,\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$ para designar o vetor **simétrico** de $\overrightarrow{v}$. Se $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, então

$$-\overrightarrow{v} = (-\alpha, -\beta).$$

- O vetor **diferença de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$** é o vetor $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

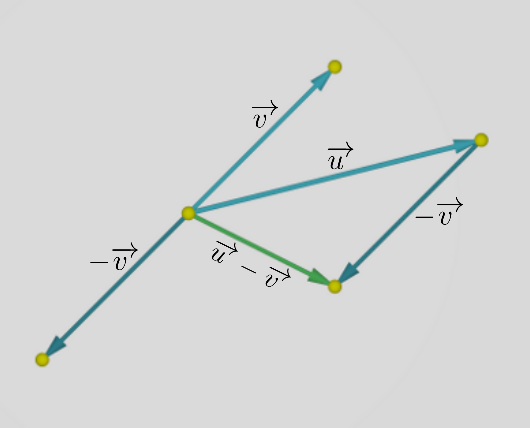


Figura 2.6: Diferença $\vec{u} - \vec{v}$

Proposição 8 Um ponto P pertence à reta r que passa pelos pontos A e B se, e somente se, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Demonstração Pela definição da multiplicação de $\lambda \in \mathbb{R}$ pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pertence à reta r.

Reciprocamente, seja P um ponto pertencente à reta r e seja $\mu = \dfrac{d(A,P)}{d(A,B)}$.

Se o sentido de percurso de A para P coincidir com o sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \mu$, pois o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu\, d(A,B)$.

Se o sentido de percurso, ao longo de r, de A para P, for oposto ao sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\mu$, pois o ponto P é o único ponto da semirreta de origem A oposta à semirreta de origem A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu\, d(A,B)$.

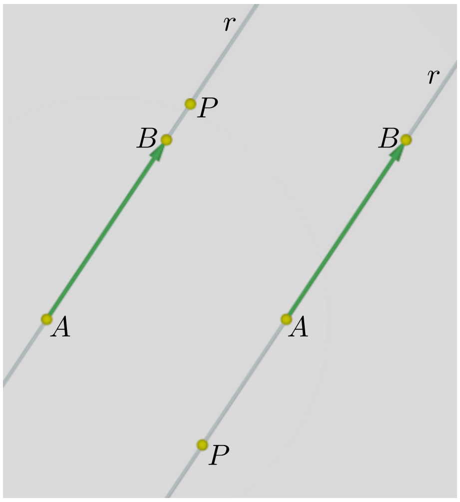


Figura 2.7: Sentido de percurso de A para B

Exemplo 1 Sejam $\overrightarrow{u} = (3,-1)$ e $\overrightarrow{v} = (1,2)$, determine

(a) $\overrightarrow{\alpha} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$; **(b)** $\overrightarrow{\beta} = -2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$; **(c)** $\overrightarrow{\gamma} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$.

Solução. Temos

(a) $\overrightarrow{\alpha} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = -(3,-1) - (1,2) = (-3,1) + (-1,-2) = (-4,-1)$;

(b) $\overrightarrow{\beta} = -2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = -2(3,-1) + (1,2) = (-6,2) + (1,2) = (-5,4)$;

(c) $\overrightarrow{\gamma} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(3,-1) + 3(1,2) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) + (3,6) = \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

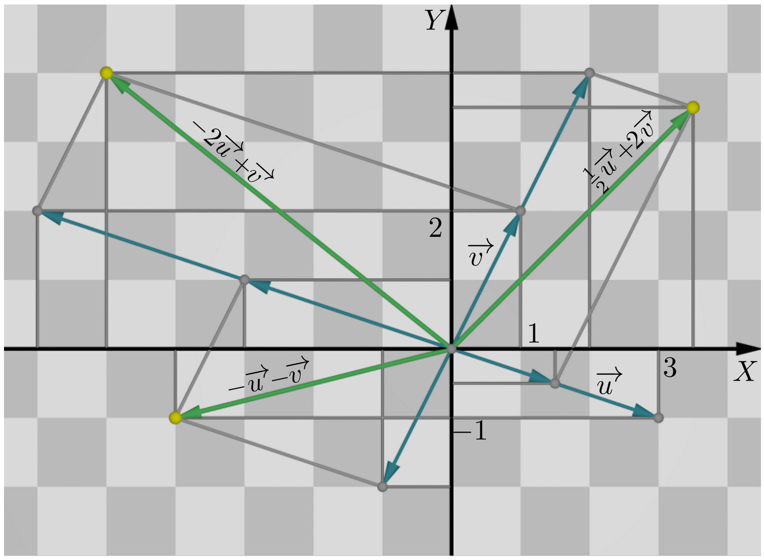


Figura 2.8: Exemplo 1

Exemplo 2

Sejam $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 2)$, $D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Verifique que os quatro pontos pertencem a uma reta r.

Solução. Basta determinar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} = \mu\,\overrightarrow{AB}$. Escrevendo essas identidades em coordenadas, temos:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \iff$$
$$(1-(-1), 2-0) = \lambda(0-(-1), 1-0)$$
$$\iff (2,2) = \lambda(1,1) \iff \lambda = 2.$$

$$\overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{AB} \iff$$
$$(-\tfrac{1}{2}-(-1), \tfrac{1}{2}-0) = \mu(0-(-1), 1-0)$$
$$\iff (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \mu(1,1) \iff \mu = \tfrac{1}{2}.$$

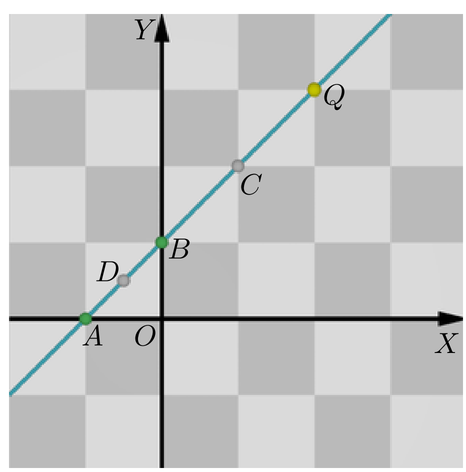


Figura 2.9: Reta r contendo A, B, C e D

Exemplo 3

Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ são pontos distintos arbitrários no plano. Usando vetores, determinar o **ponto médio** do segmento AB.

Solução. Devemos determinar o ponto $M = (x, y)$ que divide o segmento AB em dois segmentos de igual comprimento, isto é, $AM \equiv MB$, ou ainda, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Como $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$, temos $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

A identidade anterior se escreve:

$$
\begin{aligned}
(x-a_1, y-a_2) &= \frac{1}{2}(b_1-a_1, b_2-a_2)\\
\Longleftrightarrow\quad x-a_1 &= \frac{1}{2}(b_1-a_1) \quad \text{e}\\
y-a_2 &= \frac{1}{2}(b_2-a_2)\\
\Longleftrightarrow\quad x &= a_1+\frac{1}{2}(b_1-a_1) \quad \text{e}\\
y &= a_2+\frac{1}{2}(b_2-a_2)\\
\Longleftrightarrow\quad x &= \frac{1}{2}(a_1+b_1) \quad \text{e}\\
y &= \frac{1}{2}(a_2+b_2).
\end{aligned}
$$

Portanto, o ponto médio do segmento AB é $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

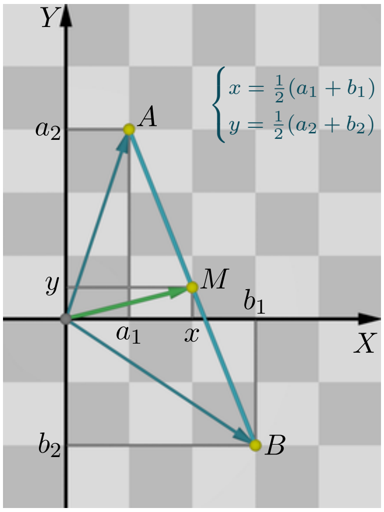


Figura 2.10: Ponto médio de AB

2.2 Propriedades das operações com vetores

A adição de vetores e a multiplicação de vetores por escalares satisfazem propriedades similares às propriedades aritméticas das operações numéricas. Isso permite converter problemas geométricos em problemas algébricos e vice-versa, segundo veremos mais adiante.

Propriedades da adição de vetores.

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no plano. Valem as seguintes propriedades.

- **Comutatividade:** $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.
- **Associatividade:** $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$.
- **Existência de elemento neutro aditivo:** o *vetor zero* $\overrightarrow{0}$ (ou *vetor nulo*) é tal que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$.
- **Existência de inversos aditivos:** para cada vetor $\overrightarrow{u}$ existe um único vetor, que designamos $-\overrightarrow{u}$, o *simétrico aditivo de* $\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$.

☞ Para Saber Mais - Verificação das propriedades da adição. - Clique para ler

Observação 9

(a) $\overrightarrow{0} = (0,0)$ são as coordenadas do vetor nulo.

(b) Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$, então $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC}$ e os segmentos BC e AD se cortam ao meio.

Propriedades da multiplicação de escalares por vetores.

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades.

- **Associatividade:** $\lambda(\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{v}$.
- **Existência de elemento neutro multiplicativo:** O número $1 \in \mathbb{R}$ é tal que $1\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- **Propriedades distributivas:** $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ e $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

A associatividade e as propriedades distributivas são verificadas usando coordenadas e as propriedades análogas que já conhecemos nos números reais. Além disso, $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Também, $\lambda = 1$ é o único escalar tal que $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Vejamos agora algumas aplicações geométricas interessantes das operações com vetores.

Exemplo 4

Verifique que os pontos médios dos lados de um quadrilátero no plano são os vértices de um paralelogramo.

Solução. Seja $ABCD$ um quadrilátero (Figura 2.11) e sejam X, Y, Z e W os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente.

Sabendo que $XYZW$ é um paralelogramo se, e só se, $XY \equiv WZ$, basta verificar que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{WZ}$.

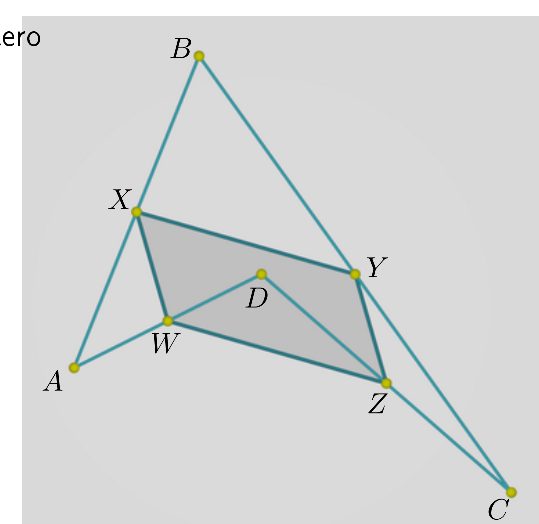


Figura 2.11: Exemplo 4

Pelo Exemplo 3:

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB};$$
$$\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{YC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC};$$
$$\overrightarrow{DZ} = \overrightarrow{ZC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}; \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AW} = \overrightarrow{WD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Analogamente

$$\overrightarrow{WZ} = \overrightarrow{WD} + \overrightarrow{DZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{WZ}.$$

Exemplo 5

O **baricentro** de um triângulo é o ponto onde as retas que contêm as medianas se intersectam. Lembre que uma mediana é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do seu lado oposto. Na Figura 2.12, os segmentos AX, BY e CZ são as medianas do triângulo ABC e G é seu baricentro.
Nesse exemplo damos outra caracterização do baricentro de um triângulo.

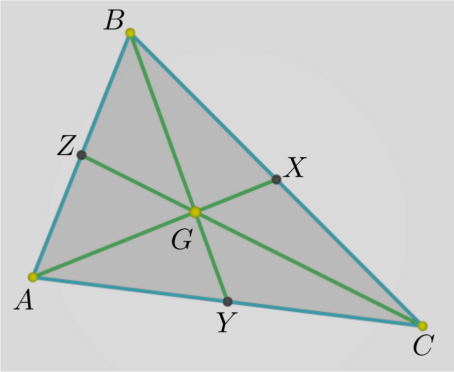


Figura 2.12: Baricentro do triângulo ABC.

(a) Seja P um ponto do plano. Então, o ponto G tal que:

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right) \tag{2.1}$$

não depende da escolha do ponto P mas apenas dos pontos A, B e C.

Solução. Seja P' outro ponto do plano e seja G' o ponto tal que

$$\overrightarrow{P'G'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{P'C}\right).$$

Usaremos as operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares para verificar que $G = G'$.

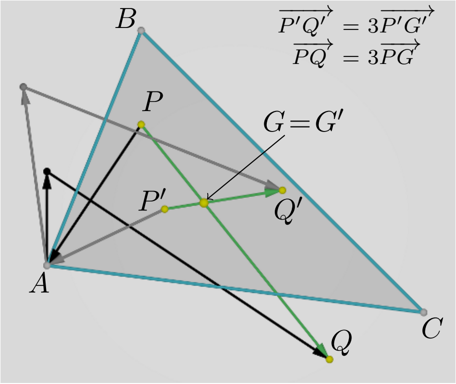


Figura 2.13: G depende apenas dos vértices

Como $\overrightarrow{P'A} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{P'B} =$

$\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{P'C} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PC}$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P'G'} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{P'C}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PC}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)\\
&= \overrightarrow{P'P} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)\\
&= \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{P'G},
\end{aligned}$$

isto é, $G = G'$.

(b) Em particular, fazendo $P = G$ vemos que o ponto G, caracterizado por

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}. \tag{2.2}$$

é o baricentro do triângulo ABC. Isto é, as medianas AX, BY e CZ do triângulo ABC se intersectam no ponto G dado por (2.2).

Solução. Basta mostrar que o ponto G, caracterizado pela identidade (2.2), pertence às retas que contêm as medianas do triângulo ABC.

Por exemplo, verifiquemos que G pertence à reta que contém a mediana AX.

Seja D o ponto tal que $GBDC$ é um paralelogramo, ou seja, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$ e as diagonais GD e BC se cortam ao meio no ponto X. Logo, $\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GX}$.

Pela identidade (2.2) concluímos que A, G e X são colineares, pois:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\\ &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}\\ &= \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GX}.\end{aligned}$$

Da mesma forma se verifica que B, G e Y são colineares e que C, G e Z são colineares. Portanto, G é o baricentro do triângulo ABC.

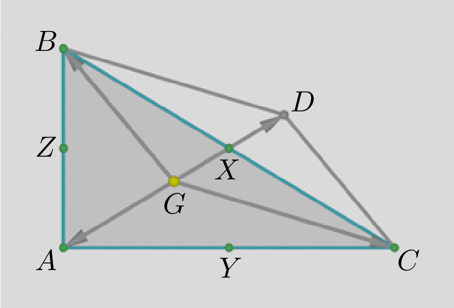


Figura 2.14: G, A e X são colineares

2.3 Combinação linear de vetores

Definição 10

(a) O vetor $\overrightarrow{v}$ é **múltiplo** do vetor $\overrightarrow{u}$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

(b) O vetor $\overrightarrow{v}$ é **combinação linear** dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ quando existem números reais λ_1, λ_2, ..., λ_n, tais que

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n}.$$

Algumas observações básicas a respeito da Definição 10:

Observação 11

1. O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer vetor $\overrightarrow{u}$, uma vez que $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$.
2. Um vetor não nulo não é múltiplo do vetor nulo, pois $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.
3. Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, então $\overrightarrow{u}$ é também múltiplo de $\overrightarrow{v}$. De fato, se $\lambda \in \mathbb{R}$ é tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, temos $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. Logo, $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.
4. O vetor $\overrightarrow{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ quando é *soma de múltiplos* desses vetores. Assim, o item **(b)** na Definição 10 generaliza o item **(a)**.
5. Se A, B e C são pontos distintos do plano, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ se, e somente se, A, B e C são colineares.

Exemplo 6

O vetor $\overrightarrow{u} = (1,0)$ não é múltiplo de $\overrightarrow{v} = (1,1)$ e é múltiplo do vetor $\overrightarrow{w} = (3,0)$.

Solução. Se $\overrightarrow{u}$ fosse múltiplo de $\overrightarrow{v}$, existiria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda v$, ou seja, $(1,0) = \lambda(1,1) = (\lambda,\lambda)$. Então, $\lambda = 1$ e $\lambda = 0$, absurdo. Portanto, $\overrightarrow{u}$ não é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Por outro lado, escrevendo $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{w}$, temos $(1,0) = \lambda(3,0)$ se, e só se, $1 = 3\lambda$, ou seja, $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{w}$.

A seguinte proposição fornece um critério para determinar quando um vetor é múltiplo de outro.

Proposição 12

Um dos vetores $\overrightarrow{u} = (a,b)$ e $\overrightarrow{v} = (a',b')$ é múltiplo do outro se, e só se,
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0\,.$$

Demonstração

$(\Longrightarrow)$ Se $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:
$$(a',b') = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \Longrightarrow a' = \lambda a \quad \text{e} \quad b' = \lambda b.$$
Logo, $ab' - ba' = a(\lambda b) - b(\lambda a) = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos que $ab' - ba' = 0$. Consideremos separadamente os casos $a \neq 0$ e $a = 0$.

Caso $a \neq 0$: $ab' - ba' = 0 \Longrightarrow b' = b\dfrac{a'}{a}$. Logo:
$$\frac{a'}{a}\overrightarrow{u} = \frac{a'}{a}(a,b) = \left(\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b\right) = (a',b') = \overrightarrow{v}.$$
Caso $a = 0$: $ba' = 0 \Longrightarrow b = 0$ ou $a' = 0$. Logo:
$$\begin{cases} b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (0,0) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{v}. \\ a' = 0 \text{ e } b \neq 0 \Longrightarrow (0,b') = \dfrac{b'}{b}(0,b) \Longrightarrow \overrightarrow{v} = \dfrac{b'}{b}\overrightarrow{u}. \end{cases}$$
Em qualquer caso, um dos vetores é múltiplo do outro.

Exemplo 7

Os vetores $\overrightarrow{u} = (1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (3,6)$ são múltiplos um do outro?

Solução. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$, um vetor é múltiplo do outro. Note que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$.

Proposição 13 Se nenhum dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro, então todo vetor do plano se escreve de uma única maneira como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Isto é, para cada vetor $\overrightarrow{w}$ existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinados de forma única por $\overrightarrow{w}$, tais que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Demonstração Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$. Dado o vetor $\overrightarrow{w} = (a'', b'')$, determinemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Em coordenadas, essa condição é

$$\begin{aligned}(a'', b'') &= \lambda(a, b) + \mu(a', b')\\ &= (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b').\end{aligned}$$

Ou seja, os números λ e μ devem ser solução do sistema:

$$\begin{cases}\lambda a + \mu a' = a''\\ \lambda b + \mu b' = b''.\end{cases}$$

A solução desse sistema é **única**, pois $ab' - ba' \neq 0$ (Proposição 12).

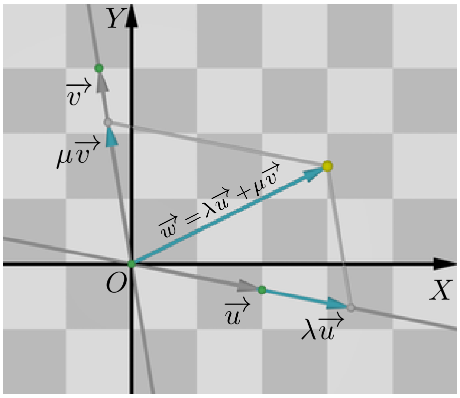


Figura 2.15: $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\lambda = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Para Saber Mais O plano é um espaço de dimensão 2 (bidimensional). Isso significa que são suficientes dois parâmetros (como λ e μ) para determinar todos os vetores (pontos) do plano uma vez conhecidos dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que não sejam múltiplos um do outro. Os parâmetros λ e μ podem ser pensados como *coordenadas* em relação aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Vetores como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que não são múltiplos um do outro são denominados, na terminologia da Álgebra Linear, *linearmente independentes*.

Exemplo 8 Verifique que qualquer vetor do plano se escreve como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u} = (2, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$. Escreva o vetor $\overrightarrow{w} = (1, 1)$ como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Solução. Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos um do outro, pois

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0.$$

Sendo assim, qualquer vetor do plano se escreve de forma única como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Determinemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Em coordenadas, essa equação se escreve na forma:

$$(1,1) = \lambda(2,-1) + \mu(-3,2) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1\,. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $\lambda = 5$ e $\mu = 3$. Portanto, $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$.

2.4 Produto interno, definição

Daremos primeiramente uma definição geométrica do **produto interno** entre dois vetores e posteriormente iremos obter a expressão do produto interno em termos das coordenadas dos fatores em relação a um sistema de eixos ortogonais. Para a abordagem geométrica precisamos de dois conceitos preliminares, a noção de **norma** de um vetor e a noção de **ângulo** entre dois vetores.

☞ Para Saber Mais - Josiah W. Gibbs - Clique para ler

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano.

Definição 14

A **norma** ou **comprimento** do vetor $\overrightarrow{v}$ é o número $\|\overrightarrow{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento representante de $\overrightarrow{v}$.

Observação 15

(a) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante.

Com efeito, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ então $AB \equiv CD$ e, portanto,

$$d(A,B) = d(C,D) = \|\overrightarrow{v}\|.$$

(b) Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

(c) Se $P=(x,y)$ é o ponto tal que $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OP}$, então:
$$\|\overrightarrow{v}\| = d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exemplo 9

Dados $A=(-1,2)$ e $B=(4,1)$, determinar a norma do vetor $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}$.

Solução. Temos
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(4-(-1))^2+(1-2)^2} = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Observação 16

(a) Temos $\|\overrightarrow{v}\|=0 \iff \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$. Além disso, $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0} \iff \|\overrightarrow{v}\|>0$.

(b) Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor e $\lambda\in\mathbb{R}$, então $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|$.

De fato, se $\overrightarrow{v}=(x,y)$, temos $\lambda\overrightarrow{v}=(\lambda x,\lambda y)$ e, portanto,
$$\|\lambda\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2+y^2} = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|.$$

(c) Um vetor é chamado **unitário** se sua norma é igual a 1.

(d) Se $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, o vetor $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ é um vetor unitário, chamado **normalizado** do vetor $\overrightarrow{v}$, com igual direção e sentido que v.

De fato, os vetores têm a mesma direção (são paralelos) pois um é múltiplo do outro. Pelo item **(b)**, temos:
$$\left\|\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\right\| = \left|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\right|\,\|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\,\|\overrightarrow{v}\| = 1,$$

e como $\dfrac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}>0$, os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ têm o mesmo sentido.

(e) Se $\overrightarrow{v}\neq 0$, o vetor $-\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ é também unitário e tem a mesma direção que $\overrightarrow{v}$, mas não o mesmo sentido.

Exemplo 10

Determinar o normalizado do vetor $\overrightarrow{u}=(3,-2)$.

Solução. Como $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$, o normalizado de $\overrightarrow{u}$ é o vetor:
$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,-2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right).$$

Exemplo 11

Determinar os vetores unitários paralelos ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, -2)$.

Solução. Temos $\overrightarrow{v} \neq 0$ e $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. Portanto os vetores unitários paralelos ao vetor $\overrightarrow{v}$ são:

$$\overrightarrow{v_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Antes de definirmos o produto interno precisamos também do conceito de **ângulo** entre dois vetores.

Definição 17

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos no plano. Definimos o **ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$** como sendo o menor ângulo entre os segmentos AB e AC representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente. Designamos $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ a medida do ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

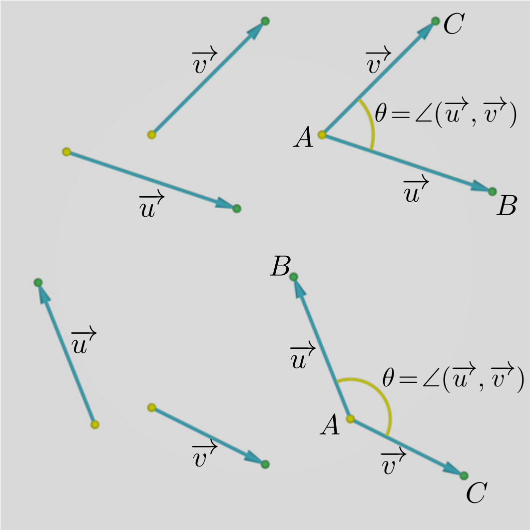


Figura 2.16: Ângulo entre dois vetores

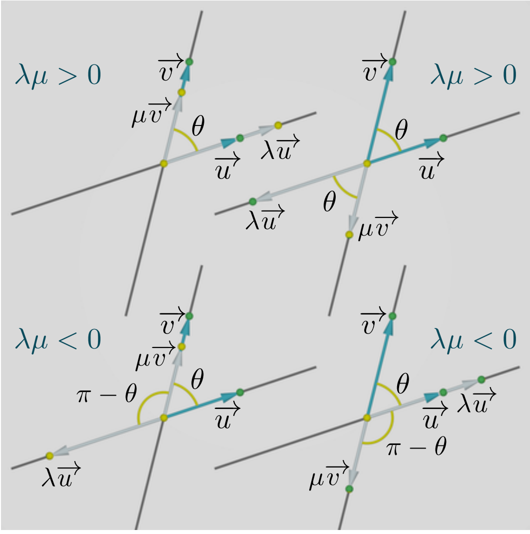


Figura 2.17: Observação 18 (c)

Observação 18

(a) Medimos os ângulos em **radianos** ou em **graus**, onde π *radianos* $= 180°$.

(b) Note que $0 \leq \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq \pi$, equivalentemente, $0° \leq \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq 180^o$.

(c) Tem-se:
$$\begin{cases} \angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \\ \angle(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \text{se } \lambda\mu > 0 \\ \angle(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}) = \pi - \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), & \text{se } \lambda\mu < 0. \end{cases}$$
(ver Figura 2.17).

Estamos já em condições de definir o produto interno de dois vetores:

Definição 19 O **produto interno** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, definido da seguinte maneira:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} 0\,, & \text{se } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = 0; \\ \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta\,, & \text{se } \overrightarrow{u} \neq 0\,,\ \overrightarrow{v} \neq 0 \text{ e } \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}). \end{cases}$$

Observação 20

(a) Da comutatividade da multipicação de números reais e da Observação 18, concluímos que o produto interno é comutativo, isto é:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle,$$

para todos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano.

(b) Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ temos, pela Observação 18:

$$\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right),$$

logo,

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right\rangle = \left\|\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right\| \left\|\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right\| \cos\theta = \cos\theta \Longrightarrow \theta = \arccos\left\langle \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right\rangle.$$

Nesse sentido, o produto interno mede, essencialmente, o ângulo entre dois vetores (ou segmentos) do plano.

(c) O produto interno de um vetor com si próprio é não negativo.

Com efeito, sendo $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{u}\|\cos 0 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0.$$

Na seguinte proposição calcularemos o produto interno entre dois vetores através de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Proposição 21 Sejam $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$ dois vetores no plano. Então,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a\alpha + b\beta. \tag{2.3}$$

Demonstração Se algum dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é nulo, temos $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e, também, $a\alpha + b\beta = 0$. Logo, a identidade (2.3) é satisfeita.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (a, b)$ e $Q = (\alpha, \beta)$.

Então (Figura 2.18),

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \\ &= (\alpha - a, \beta - b). \end{aligned}$$

Seja $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo $\triangle OPQ$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ -2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta. \end{aligned}$$

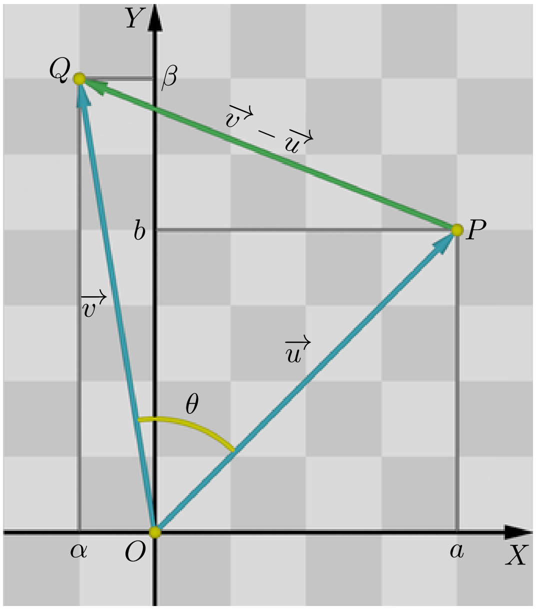


Figura 2.18: Diferença $\vec{v} - \vec{u}$

Daí:

$$\begin{aligned} 2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 \\ &= (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2) \\ &= a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha a + a^2 + \beta^2 - 2\beta b + b^2) \\ &= a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha a - a^2 - \beta^2 + 2\beta b - b^2 \\ &= 2\alpha a + 2\beta b = 2(a\alpha + b\beta). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta = a\alpha + b\beta.$$

A proposição anterior nos permite medir o ângulo entre dois vetores sabendo apenas suas coordenadas.

Além disso, usando coordenadas verificamos diversas propriedades do produto interno:

Proposição 22

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores arbitrários do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

(a) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0$.

(b) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;

(c) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$;

(d) $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;

(e) $\langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;

(f) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$;

(g) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$.

Exemplo 12

Determine $x \in \mathbb{R}$ para que o produto interno dos vetores $\overrightarrow{u} = (4, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (x, 1)$ seja igual a 5.

Solução. Temos: $5 = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 4 \cdot x - 3 \cdot 1 \iff 8 = 4x \iff x = 2$.

Observação 23

Tomando módulo em ambos os lados da identidade que define o produto interno e sabendo que $|\cos\theta| \leq 1$ para todo θ, obtemos a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|. \tag{2.4}$$

Além disso, observe que vale a igualdade se, e somente se, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos um do outro.

A desigualdade 2.4 é fundamental na prova da seguinte proposição.

Proposição 24

Para todos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano vale a **desigualdade triangular**:

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|, \tag{2.5}$$

valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é zero ou são múltiplos positivos um do outro.

Demonstração

Como as quantidades na desigualdade (2.5) são todas números reais não negativos, ela equivale à desigualdade:

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 \leq \left(\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|\right)^2.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da Proposição 22, temos:

$$\begin{aligned}
&\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 \\
&= \langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&\leq \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&= \left(\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|\right)^2.
\end{aligned}$$

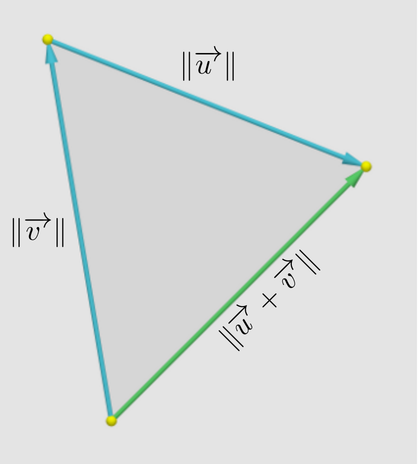


Figura 2.19: Desigualdade triangular

O caso em que ocorre a igualdade é o Exercício BLA.

Definição 25

O vetor $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** (ou **ortogonal**) ao vetor $\overrightarrow{v}$, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90°$.

Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **ortonormais** quando são unitários e ortogonais .

Note que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

A seguinte proposição é um critério para a perpendicularidade em termos do produto interno.

Proposição 26

Dois vetores são perpendiculares se, e só se, o seu produto interno é zero:

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

Demonstração

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e, também, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

Sejam $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, e $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, então:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = 90°.$$

A seguinte proposição caracteriza, em termos de coordenadas, todos os vetores perpendiculares a um vetor dado:

Proposição 27

Se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ é um vetor não nulo, então,

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{v} = \lambda(-b, a), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Se $v = \lambda(-b, a)$, então:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a(-\lambda b) + b(\lambda a) = 0$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

Reciprocamente, se $\overrightarrow{v} = (c, d)$ é um vetor tal que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, então $ac + bd = 0$, isto é,

$$ca - d(-b) = \begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, pela Proposição 12, (c, d) é múltiplo de $(-b, a)$, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{v} = (c, d) = \lambda(-b, a).$$

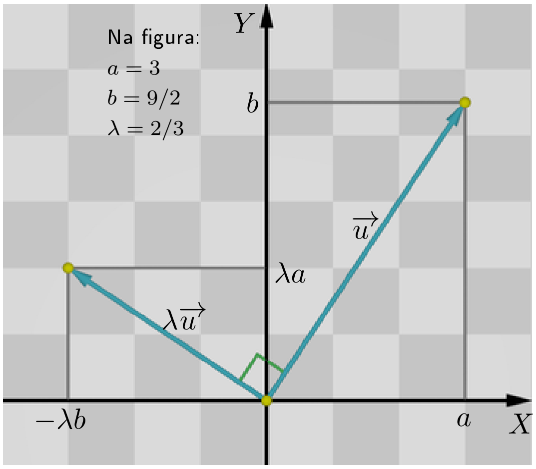


Figura 2.20: Perpendicularidade em coordenadas

Exemplo 13

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $\overrightarrow{u} = (a+1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 1)$ sejam perpendiculares.

Solução. Temos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} &\iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 &&\iff (a+1)\cdot(-3) + 2\cdot 1 = 0 \\ &\iff -3a - 3 + 2 = 0 &&\iff a = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Observação 28

Dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não nulos e perpendiculares nunca são múltiplos e, portanto, todo vetor do plano se escreve, de modo único, como combinação linear desses vetores.

De fato, seja $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$. Sendo $\overrightarrow{v}$ não nulo e perpendicular a $\overrightarrow{u}$, existe $\lambda \neq 0$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda(-b, a)$.

Como

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -\lambda b & \lambda a \end{vmatrix} = \lambda(a^2 + b^2) \neq 0,$$

temos, pela Proposição 12, que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos.

Para Saber Mais

Medir o ângulo entre dois vetores do plano é equivalente a determinar o seu cosseno, pois o ângulo, quando medido em radianos, é um número do intervalo $[0, \pi]$ e o cosseno restrito a esse intervalo é uma **função injetora**.

Exemplo 14

Calcule o cosseno do ângulo $\theta = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, sabendo que $A = (-2, 3)$, $B = (0, 1)$ e $C = (4, 2)$.

Solução. Sendo $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (6, -1)$, temos:

$$||\overrightarrow{AB}|| = 2\sqrt{2}, \quad ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{37},$$

e

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 2\cdot 6 - 2\cdot(-1) = 14.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle &= ||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}|| \cos\theta \\ 14 &= 2\sqrt{2}\sqrt{37}\cos\theta. \end{aligned}$$

Portanto, $\cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{74}}$.

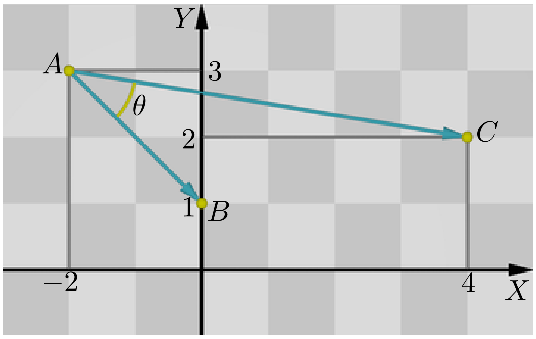


Figura 2.21: Exemplo 14

O produto interno está intimamente relacionado à noção de **projeção**:

Definição 29

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ vetores representados por segmentos orientados com a mesma origem. Seja B' o pé da perpendicular baixada do ponto B sobre a reta que contém os pontos A e C. A **projeção do vetor $\overrightarrow{u}$ na direção do vetor $\overrightarrow{v}$** é o vetor $\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB'}$

Como o ponto B' na Definição 29 pertence à reta que contém A e C, temos

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{v}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sendo o vetor

$$\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}$$

perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ (Figura 2.22), temos:

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v} \\ \iff\ & \langle \overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \\ \iff\ & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle - \lambda \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \\ \iff\ & \lambda = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}. \end{aligned}$$

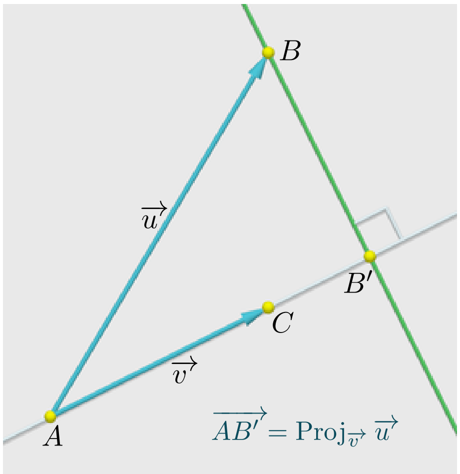


Figura 2.22: Projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$

Temos, portanto, a seguinte proposição que caracteriza a projeção em termos do produto interno.

Proposição 30

A projeção do vetor $\overrightarrow{u}$ na direção do vetor $\overrightarrow{v} \neq 0$ é dada por:

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{u} = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\,\overrightarrow{v}.$$

Em particular, se o vetor $\overrightarrow{v}$ é unitário, temos:

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{u} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle\,\overrightarrow{v}.$$

Exemplo 15

Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{u} = (3, 2)$ na direção do vetor $\overrightarrow{v} = (2, 2)$.

Solução. $\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{u} = \dfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\overrightarrow{v} = \dfrac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{2^2 + 2^2}(2, 2) = \dfrac{10}{8}(2, 2) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right).$

Um problema que pode ser abordado com a noção de projeção é o de determinar os vetores que fazem ângulo θ com um vetor dado.

Observação 31

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores LI do plano (em particular são vetores não nulos). Sabemos que para cada vetor $\overrightarrow{u}$ existem únicos números reais λ e μ tais que:

$$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}.$$

Quando os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são **perpendiculares**, os números λ e μ são:

$$\lambda = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{v}\|^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle}{\|\overrightarrow{w}\|^2},$$

e quando $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são **ortonormais**, os números λ e μ são:

$$\lambda = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \quad \text{e} \quad \mu = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle.$$

Isto é, $\overrightarrow{u}$ é a soma de suas projeções nas direções de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$:

$$\overrightarrow{u} = \operatorname{Proj}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{u} + \operatorname{Proj}_{\overrightarrow{w}} \overrightarrow{u}.$$

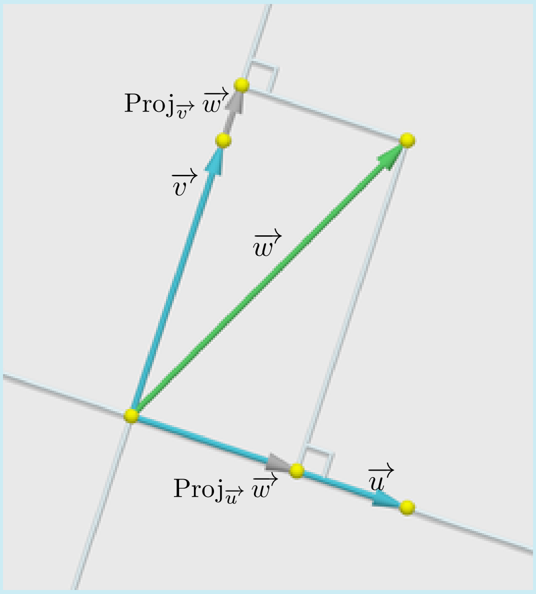


Figura 2.23: Projeções do vetor $\vec{w}$

Com efeito, sendo $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$, temos:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle + \mu\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\,\|\overrightarrow{v}\|^2.$$

Para Saber Mais

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = (a, b)$ em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY são $a = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_1} \rangle$, $b = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_2} \rangle$ e $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$, onde $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ são os vetores da **base canônica do $\mathbb{R}^2$**.

Proposição 32

Os vetores unitários $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ que fazem ângulo $\theta \in (0, \pi)$ com um vetor unitário $\overrightarrow{v}$ do plano são dados por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1} &= \cos\theta\,\overrightarrow{v} + \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u_2} &= \cos\theta\,\overrightarrow{v} - \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{w}, \end{aligned}$$

onde $\overrightarrow{w}$ é um vetor unitário ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

Demonstração

Seja $\overrightarrow{w}$ um vetor unitário ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

Seja $\overrightarrow{u_1}$ um vetor unitário tal que $\angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) = \theta$. Então $\angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ e, pela Observação 31, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u_1} &= \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{v} + \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{w} \\ &= \|\overrightarrow{u_1}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta \, \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{u_1}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \overrightarrow{w} \\ &= \cos\theta \, \overrightarrow{v} + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \overrightarrow{w} \\ &= \cos\theta \, \overrightarrow{v} + \operatorname{sen}\theta \, \overrightarrow{w}.\end{aligned}$$

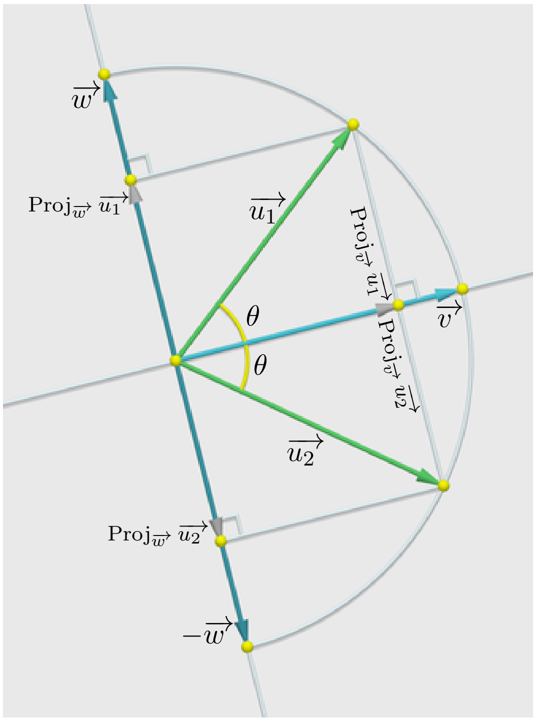


Figura 2.24: Vetores fazendo ângulo θ com $\vec{v}$

O vetor $\overrightarrow{u_2} = \cos\theta \, \overrightarrow{v} - \operatorname{sen}\theta \, \overrightarrow{w}$ se obtem substituíndo $\overrightarrow{w}$ pelo vetor $-\overrightarrow{w}$, que é o outro vetor unitário e ortogonal a $\overrightarrow{v}$, no cálculo acima (Figura 2.24).

Corolário 33

Sejam $\overrightarrow{v}$ um vetor não nulo e $\theta \in (0, \pi)$. Seja $\overrightarrow{w}$ um vetor ortogonal a $\overrightarrow{v}$. Então, os vetores unitários que fazem ângulo θ com $\overrightarrow{v}$ são:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u_1} &= \cos\theta \, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} + \operatorname{sen}\theta \, \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|} \\ \overrightarrow{u_2} &= \cos\theta \, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} - \operatorname{sen}\theta \, \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}.\end{aligned}$$

Observação 34

(a) Em termos de coordenadas, sabemos que se $\overrightarrow{v} = (a,b)$, então os vetores $\overrightarrow{w} = (-b,a)$ e $-\overrightarrow{w} = (b,-a)$ são ortogonais a $\overrightarrow{v}$ e tem igual comprimento que $\overrightarrow{v}$. Em particular, se $\overrightarrow{v}$ é unitário, também o serão os vetores $\overrightarrow{w}$ e $-\overrightarrow{w}$. Nesse caso, os vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ da Proposição 32 são:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u_1} &= \cos\theta\,(a,b) + \operatorname{sen}\theta\,(-b,a)\\ &= (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta, a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta); \qquad (2.6)\\ \overrightarrow{u_2} &= \cos\theta\,(a,b) - \operatorname{sen}\theta\,(-b,a)\\ &= (a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta, -a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta). \qquad (2.7)\end{aligned}$$

(b) Tomando $\overrightarrow{w}$ de igual comprimento que $\overrightarrow{v}$ no Corolário 33, obtemos, multiplicando por $\lambda = \|\overrightarrow{v}\|$ as expressões de $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$, vetores $\overrightarrow{u_1'} = \lambda\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2'} = \lambda\overrightarrow{u_2}$ de igual comprimento que $\overrightarrow{v}$ e que fazem ângulo θ com $\overrightarrow{v}$.

Para Saber Mais

Na linguagem matricial da Álgebra Linear, as expressões (2.6) e (2.7) são:

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta)\\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}.$$

Isto é, os vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ se obtêm do vetor $\overrightarrow{v}$ por rotações de θ e $-\theta$, respectivamente. Além disso, como indicado na Observação 34 (b), se $\overrightarrow{v}$ não é unitário, os vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$, obtidos nessas expressões, têm o mesmo comprimento que o vetor $\overrightarrow{v}$.

Exemplo 16

Determine os vetores unitários cujo ângulo $\theta \in (0,\pi)$ com $\overrightarrow{u} = (1,2)$ é tal que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Solução. Como $\theta \in (0,\pi)$ e $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, obtemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Logo, pelo Corolário 33, se $\overrightarrow{w} = (-2,1)$, os vetores

$$\overrightarrow{u_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{u} + \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{w} = \frac{2}{\sqrt{5}}(1,2) + \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) = \left(0, \frac{5}{\sqrt{5}}\right) = \left(0, \sqrt{5}\right),$$

$$\overrightarrow{u_2} = \cos\theta\,\overrightarrow{u} - \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{w} = \frac{2}{\sqrt{5}}(1,2) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right),$$

fazem ângulo θ com $\overrightarrow{v}$ e têm o mesmo comprimento que $\overrightarrow{v}$. Os vetores procurados são obtidos normalizando $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|} &= \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0,\sqrt{5}\right) = (0,1)\,,\\
\frac{\overrightarrow{u_2}}{\|\overrightarrow{u_2}\|} &= \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right).
\end{aligned}$$

2.5 Área de paralelogramos e triângulos

Consideremos o paralelogramo $\mathcal{P}$ da Figura 2.25. A área de $\mathcal{P}$ se obtém multiplicando a medida da base $|AC$ pela altura $|EB|$. Se $\theta = \widehat{CAB}$ então, $|EB| = |AB|\operatorname{sen}\theta$ e, portanto,

$$\text{Área } \mathcal{P} = |AB|\,|AC|\,\operatorname{sen}\theta.$$

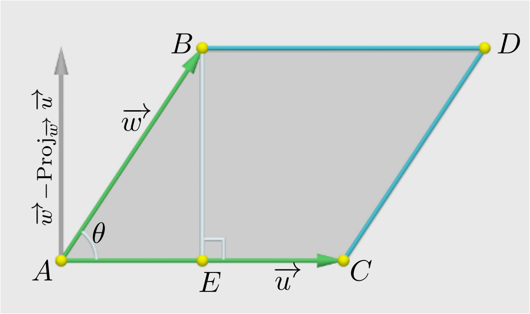


Figura 2.25: Cálculo da área do paralelogramo $ABDC$

Usando a linguagem vetorial e o produto interno, vamos obter uma expressão muito simples para o cálculo da área do paralelogramo $\mathcal{P}$.

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$, temos $\theta = \angle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}$ e,

$$\text{Área } \mathcal{P} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\,\operatorname{sen}\theta.$$

Sendo que $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$, temos:

$$\begin{aligned}
(\text{Área } \mathcal{P})^2 &= \left(\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\operatorname{sen}\theta\right)^2\\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2\operatorname{sen}^2\theta\\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2(1-\cos^2\theta)\\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2\cos^2\theta\\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \left(\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos\theta\right)^2\\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Área } \mathcal{P} = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle^2}$$

Observe, também, que:

$$\begin{aligned}(\text{Área } \mathcal{P})^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle^2 = \begin{vmatrix} \|\overrightarrow{u}\|^2 & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle & \|\overrightarrow{w}\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\rangle & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Temos então outra expressão para a área do paralelogramo $\mathcal{P}$:

$$\text{Área } \mathcal{P} = \begin{vmatrix} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\rangle & \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\rangle \end{vmatrix}^{1/2}.$$

Se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{w} = (\alpha', \beta')$ em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY, temos

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \|\overrightarrow{w}\|^2 = (\alpha')^2 + (\beta')^2 \text{ e } \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta',$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\text{Área } \mathcal{P})^2 &= (\alpha^2+\beta^2)((\alpha')^2+(\beta')^2) - (\alpha\alpha'+\beta\beta')^2 \\ &= \alpha^2(\alpha')^2 + \alpha^2(\beta')^2 + \beta^2(\alpha')^2 + \beta^2(\beta')^2 \\ &\quad -\alpha^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - \beta^2(\beta')^2 \\ &= \alpha^2(\beta')^2 + \beta^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' \\ &= (\alpha\beta')^2 - 2(\alpha\beta')(\beta\alpha') + (\beta\alpha')^2 \\ &= (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 = \left[\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}\right]^2\end{aligned}$$

Portanto, a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ cujos lados adjacentes são representantes dos vetores $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{w} = (\alpha', \beta')$ é igual ao módulo do determinante da matriz cujas filas são as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$, respectivamente:

$$\text{Área } \mathcal{P} = \left|\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}\right|.$$

É claro que, a área de $\mathcal{P}$ também é igual ao módulo do determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$:

$$\text{Área } \mathcal{P} = \left|\det\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}\right|.$$

Exemplo 17

Determine a área do paralelogramo $ABDC$, onde $A=(1,2)$, $B=(3,1)$, $C=(4,1)$ e $D=(-2,3)$.

Solução. Como $\overrightarrow{AB}=(2,-1)$ e $\overrightarrow{AC}=(3,-1)$, temos:

$$\text{Área}\,(ABDC)=\left|\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right|=|-2+3|=1\,.$$

Área de um triângulo

Usando o cálculo da área do paralelogramo, calculemos agora a área do triângulo $\triangle ABC$ de vértices A, B e C.

Como o paralelogramo $ABDC$ de lados adjacentes AB e AC é composto dos triângulos congruentes

$$\triangle ABC \quad \text{e} \quad \triangle DCB,$$

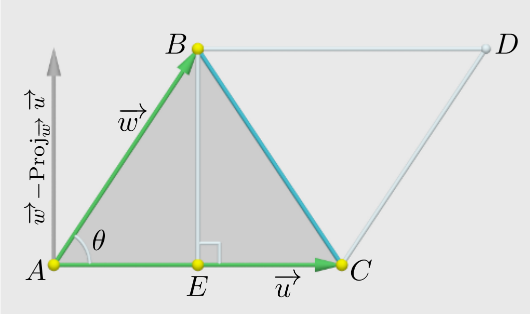


Figura 2.26: Triângulo $\triangle ABC$

temos:

$$\text{Área}\,(ABDC)=2\,\text{Área}\,(\triangle ABC)=\left|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}\right|,$$

onde $\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}$ representa a matriz cujas filas são as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente. Portanto,

$$\text{Área}\,(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}\right|.$$

Exemplo 18

Calcule a área do triângulo de vértices $A=(4,2)$, $B=(6,1)$ e $C=(3,2)$.

Solução. Temos que $\overrightarrow{AB}=(2,-1)$ e $\overrightarrow{AC}=(-1,0)$. Logo,

$$\text{Área}\,(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-1|=\frac{1}{2}\,,$$

é a área procurada.

Exemplo 19

Determine os valores de n para que a área do triângulo $\triangle ABC$ de vértices $A=(1,2)$, $B=(3,n+2)$ e $C=(n-1,1)$ seja igual a $\frac{1}{2}$.

Solução. Temos $\overrightarrow{AB}=(2,n)$ e $\overrightarrow{AC}=(n-2,-1)$. Logo,

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & n \\ n-2 & -1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|-2-n(n-2)| \\ &= \frac{1}{2}\,|-2-n^2+2n| = \frac{1}{2}\,|n^2-2n+2|\,.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2} &\iff |n^2-2n+2| = 1 \\ &\iff n^2-2n+2 = \pm 1.\end{aligned}$$

• Tomando o sinal positivo, obtemos:

$$n^2-2n+2=1 \iff n^2-2n+1=0 \iff (n-1)^2=0\,.$$

Logo $n=1$ é uma solução.

• Tomando o sinal negativo, obtemos a equação $n^2-2n+3=0$ que, por ter discriminante $\Delta=(-2)^2-4(1)(3)<0$, não possui raízes reais.

Portanto, $n=1$ é a única solução ao problema proposto.

Exercícios

1. Use o GeoGebra para localizar os pontos $A=(-2,2)$, $B=(1,1)$, $C=(1,3)$, $D=(3,4)$, $E=(3,2)$, $F=(6,1)$, $G=(3,1)$, $H=(1,0)$ e efetue os seguintes cálculos em coordenadas, visualizando graficamente:

   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

   (b) $2(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EC})+3\overrightarrow{EF}$;

   (c) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}$;

   (d) $\overrightarrow{CF}-(3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

2. Mostre que a adição de vetores está bem definida.

3. Mostre que:

   (a) a multplicação por escalares satisfaz as propriedades de associatividade e distributividade;

   (b) $\lambda\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ se, e somente se, $\lambda=0$ ou $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$;

   (c) $\lambda=1$ é o único escalar tal que $\lambda\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$.

4. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de lados AB, BC, CD e DA. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e CD, respectivamente.

(a) Mostre que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

(a) Mostre que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

A propriedade vale para quadriláteros não convexos? Visualize numa construção usando o GeoGebra.

5. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$, são pontos quaisquer no plano, verifique que:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{0}.$$

6. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vértices de um polígono regular de n lados no plano centrado no ponto P. Mostre que:

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \ldots + \overrightarrow{PA_{n-1}} + \overrightarrow{PA_n} = \overrightarrow{0}.$$

7. Sejam $A = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, $B = (4, 2)$ e $C = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

(a) Determine o baricentro G do triângulo ABC.

(b) Determine os pontos médios X, Y e Z dos lados BC, AC e AB, respectivamente.

(c) Mostre que $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{0}$. Essa propriedade vale em qualquer triângulo?

8. Sejam $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 0)$. Determine os pontos que dividem o segmento AB em 5 segmentos de igual comprimento. Determine, também, o ponto X que divide o segmento em média e extrema razão (veja o Exercício 4 do Cápitulo 1).

9. Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ são pontos distintos no plano. Mostre que os pontos P_1, P_2, $\ldots$, P_{n-1}, dados por:

$$\overrightarrow{AP_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{AB},\ n = 1, 2, \ldots, n-1,$$

dividem o segmento AB em n segmentos de igual comprimento.

10. Sejam $A = (1, 2)$ e $\overrightarrow{BC} = (3, 4)$, determine os vértices B e C do triângulo ABC sabendo que a origem é seu baricentro.

11. Seja ABC um triângulo, G seu baricentro e AX, BY e CZ suas medianas. Mostre que:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AX}, \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BY} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CZ}.$$

12. Sejam A, B e C pontos distintos e não colineares no plano. Seja G o baricentro do triângulo ABC e sejam A', B' e C' os pontos simétricos a G com respeito aos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Mostre que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, possuem o mesmo baricentro e as medianas correspondentes são colineares. Realize uma construção usando o GeoGebra para visualizar o problema.

13. Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos não colineares no plano. Consideremos a região poligonal $\mathcal{P}$ delimitada pelos n segmentos adjacentes $A_1A_2\,,\ A_2A_3\,,\ \ldots\ ,\ A_{n-1}A_n, A_nA_1$. O **centro de massa** (ou **centro de gravidade** ou **ponto de equilíbrio**) de $\mathcal{P}$ é o ponto G caracterizado pela identidade:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}\right).$$

Note que, quando $n = 3$, G é o baricentro do triângulo $A_1A_2A_3$.

Verifique as seguintes propriedades:

(a) G não depende da escolha do ponto O.

(b) G é caracterizado, também, pela identidade:

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$

(c) Quando $n = 3$, e $\mathcal{P}$ é um triângulo, o centro de gravidade G fica no interior de $\mathcal{P}$. Entretanto, se $n \geq 4$ pode ocorrer que G fique no exterior de $\mathcal{P}$. Elabore alguns exemplos usando o GeoGebra.

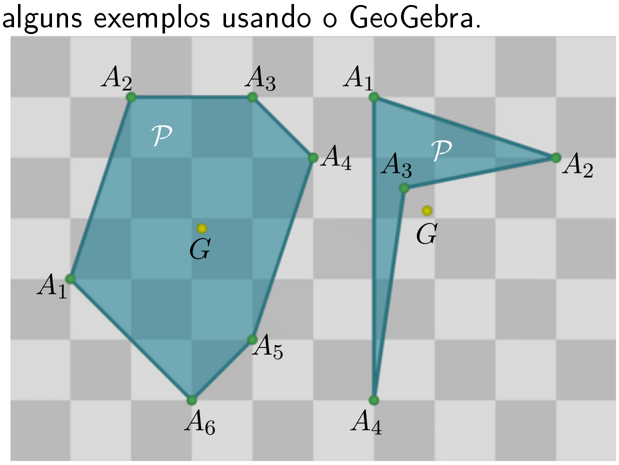


Figura 2.27: G pode ficar dentro ou fora da região poligonal $\mathcal{P}$

14. Sejam A, B e O pontos do plano. Mostre que um ponto P pertence ao segmento AB se, e somente se, existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\,.$$

Verifique, também, que essa equação independe da escolha do ponto O e mostre que o ponto médio do segmento AB se obtém tomando $t = \frac{1}{2}$.

15. Verifique que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos um do outro e escreva o vetor $\overrightarrow{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

(a) $\overrightarrow{u} = (1,1)\,,\ \overrightarrow{v} = (1,2)$ e $\overrightarrow{w} = (5,6)$;

(b) $\overrightarrow{u} = (2,0)\,,\ \overrightarrow{v} = (2,2)$ e $\overrightarrow{w} = (0,1)$;

(c) $\overrightarrow{u} = (-2,1)\,,\ \overrightarrow{v} = (1,2)$ e $\overrightarrow{w} = (2,2)$;

(d) $\overrightarrow{u} = (-1,1)\,,\ \overrightarrow{v} = (1,1)$ e $\overrightarrow{w} = (0,2)$;

(e) $\overrightarrow{u} = (1,1)\,,\ \overrightarrow{v} = (1,-1)$ e $\overrightarrow{w} = (2,3)$;

16. Determine o ponto A no eixo OX de modo que os vetores $\overrightarrow{u} = (1,3)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ sejam múltiplos um do outro, onde:

(a) $B = (2,-2)$; **(b)** $B = (0,2)$; **(c)** $B = (-3,2)$.

17. Usando coordenadas, prove a Proposição 22.

18. Prove que:

(a) os vetores $\|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{v}$ e $\|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{u}$ tem a mesma norma.

(b) se $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$, então $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ são perpendiculares.

19. Usando vetores, normas e produto interno, prove que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é o dobro da soma dos quadrados dos comprimentos dos lados. Isto é, vale a **lei do paralelogramo:**

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|^2.$$

Obtenha o teorema de Pitágoras aplicando a lei do paralelogramo num quadrado.

20. Mostre que a desigualdade triangular (Proposição 24) é uma identidade se, e somente se um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é nulo ou são múltiplos positivos um do outro.

O que acontece na desigualdade triangular se um dos vetores é múltiplo negativo do outro?

21. Prove que $\|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\| \geq |\,\|\overrightarrow{u}\| - \|\overrightarrow{v}\|\,|$, para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano (use a desigualdade triangular).

22. **(a)** Determine os vértices dos quatro quadrados que têm vértice comum na origem $A = (0, 0)$, sabendo que $B = (2, 3)$ é vértice de um dos quadrados.

(a) Determine os vértices dos quatro quadrados que têm vértice comum no ponto $A = (1, 2)$, sabendo que $B = (2, 3)$ é vértice de um dos quadrados.

23. Sejam $\overrightarrow{u} = (1, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (6, -2)$.

(a) Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{u}$ na direçao dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

(b) Determine o vetor unitário que bissecta o ângulo $\angle(\overrightarrow{u}\overrightarrow{w})$.

(c) Determine os vetores unitários que trisectam o ângulo $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

24. Determine o(s) ponto(s) B de abscissa 2 para que o triângulo de vértices O, B e $C = (a, 1)$ tenha área 3.

25. Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ vetores representados pelos lados adjacentes do paralelogramo $ABDC$ da Figura 2.25. Mostre que o quadrado da altura relativa ao lado AC é

$$\|\overrightarrow{w} - \operatorname{Proj}_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{w}\|^2 - \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}.$$

Usando essa expressão, verifique que:

$$\text{Área}\,(ABDC) = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle^2}.$$

26. Sejam $A = (1, 1)$, $B = (0, 3)$ e $C = (2, 4)$. Determine o vetor de altura $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC} - \operatorname{Proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$ em relação ao lado AB do triângulo $\triangle ABC$ e calcule sua área.

◇

2.6 Textos Complementares

Para Saber Mais

Verificação das propriedades da adição. As propriedades da adição são verificadas através de argumentos geométricos ou fazendo uso da representação dos vetores em coordenadas e das propriedades conhecidas da adição e multiplicação de números reais.

Em particular, a comutatividade segue do fato que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ são representados pela diagonal de um paralelogramo cujos lados paralelos são representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente (Figura 2.28 (a)).

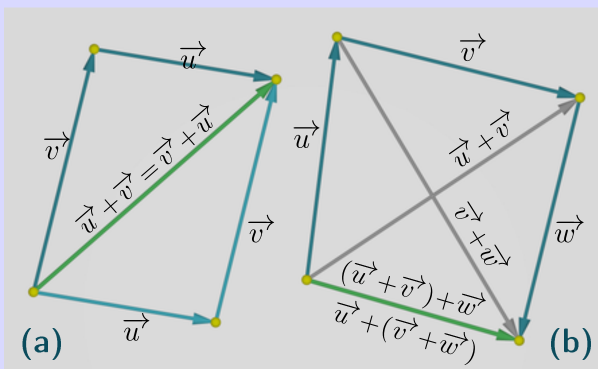


Figura 2.28: **(a)** Comutatividade da adição **(b)** Associatividade da adição

O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é representado por $\overrightarrow{AA}$ qualquer que seja o ponto A do plano e o simétrico $-\overrightarrow{v}$ de um vetor $\overrightarrow{v}$ é representado pelo mesmo segmento que $\overrightarrow{v}$ porém, com a orientação oposta.

Para Saber Mais

Josiah W. Gibbs

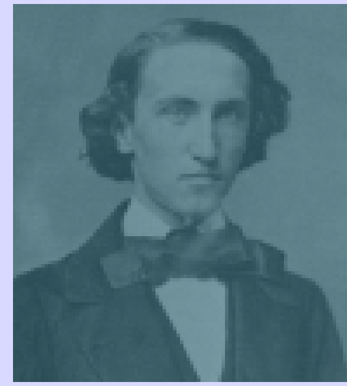
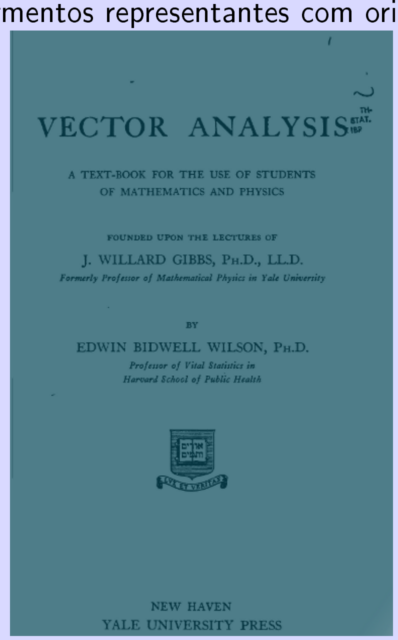


Figura 2.29: Josiah W. Gibbs

Nessa seção definiremos uma nova operação entre vetores denominada **produto interno** ou **produto ponto** e que associa a cada par de vetores um escalar, outro nome também utilizado para essa operação é **produto escalar**, fazendo ênfase na natureza escalar do resultado da operação. Embora tenha sido implicitamente considerado anteriormente por **Joseph Louis Lagrange** (1736 – 1813) e por **William R. Hamilton** (1805 – 1865), o conceito surge formalmente na literatura no livro *Vector Analysis* (1901) de Edwin B. Wilson baseado nos seminários ministrados por **Josiah Willard Gibbs** (1839 – 1903), onde aparece com o nome de *produto direto*. Conforme veremos adiante, o produto interno entre dois vetores se traduz, essencialmente, na medida do ângulo entre respectivos segmentos representantes com origem comum.



VECTOR ANALYSIS

A TEXT-BOOK FOR THE USE OF STUDENTS
OF MATHEMATICS AND PHYSICS

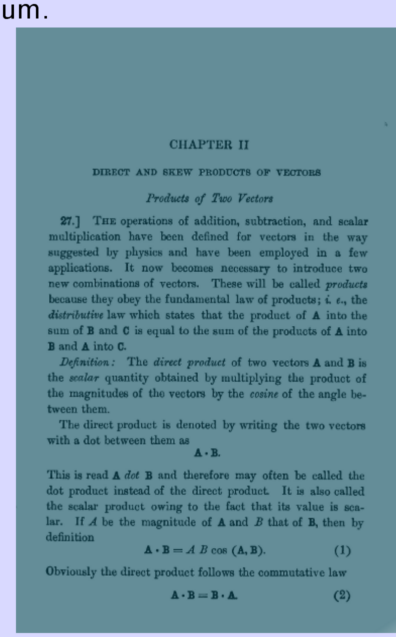
FOUNDED UPON THE LECTURES OF
J. WILLARD GIBBS, PH.D., LL.D.
Formerly Professor of Mathematical Physics in Yale University

BY
EDWIN BIDWELL WILSON, PH.D.
Professor of Vital Statistics in
Harvard School of Public Health

LUX ET VERITAS

NEW HAVEN
YALE UNIVERSITY PRESS

Figura 2.30: Vector Analysis (rosto)



CHAPTER II

DIRECT AND SKEW PRODUCTS OF VECTORS

Products of Two Vectors

27.] THE operations of addition, subtraction, and scalar multiplication have been defined for vectors in the way suggested by physics and have been employed in a few applications. It now becomes necessary to introduce two new combinations of vectors. These will be called *products* because they obey the fundamental law of products; *i. e.*, the *distributive* law which states that the product of **A** into the sum of **B** and **C** is equal to the sum of the products of **A** into **B** and **A** into **C**.

Definition: The *direct product* of two vectors **A** and **B** is the *scalar* quantity obtained by multiplying the product of the magnitudes of the vectors by the *cosine* of the angle between them.

The direct product is denoted by writing the two vectors with a dot between them as

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

This is read **A** *dot* **B** and therefore may often be called the dot product instead of the direct product. It is also called the scalar product owing to the fact that its value is scalar. If A be the magnitude of **A** and B that of **B**, then by definition

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\,B\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}). \qquad (1)$$

Obviously the direct product follows the commutative law

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}. \qquad (2)$$

Figura 2.31: Vector Analysis, página 54