3

Equações da reta no plano

Sumário

3.1 Introdução

Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, estabelecendo assim uma relação entre a Geometria e a Álgebra. Esta relação é, em muitos casos, pouco explorada no Ensino Médio e Fundamental, e o estudo da Geometria Analítica fica limitado a fórmulas e nomenclaturas.

Nesta unidade serão apresentadas, finalmente, as equações que representam uma reta do plano. Baseado nas propriedades geométricas da reta, serão deduzidos três tipos de equação: paramétrica (seção 3.2), cartesiana (seção 3.3) e afim (seção 3.4). Estes tipos de equação serão utilizados para trabalhar os conceitos de paralelismo e perpendicularismo entre retas (seção 3.5).

3.2 Equação paramétrica da reta

Começaremos nosso estudo algébrico sobre retas no plano com a equação paramétrica da reta. Neste tipo de equação as coordenadas dos pontos pertencentes a uma reta são dadas por expressões do primeiro grau em função de um parâmetro real. Ao variar o valor do parâmetro, encontramos distintos pontos da reta, ou seja, a cada ponto da reta está associado um único parâmetro. Para fins didáticos, dividiremos as equações paramétricas da reta em dois casos: reta que passa por dois pontos e reta que contém um ponto e é paralela a um vetor.

Reta r que passa pelos pontos A e B.

Seja r a reta que passa pelos pontos A e B e seja P um ponto do plano. Então, pela proposição 8 do capítulo anterior, o ponto P pertence à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$. Isto é, $P \in r$ se, e somente se, existe um número $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}}$$

Note que o número t é determinado de forma única pelo ponto P e é chamado **parâmetro** de P em r.

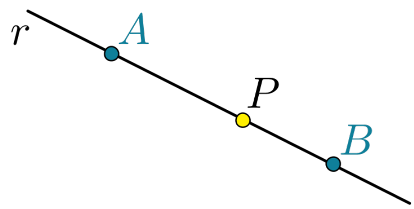

Figura 3.1: Ponto P pertencente a r.

Assim, para atingir o ponto P na reta r, devemos ir até o ponto A e nos deslocarmos ao longo da reta por $t\overrightarrow{AB}$. Escrevemos, então, a equação que determina o ponto P "pela variação do parâmetro t" da seguinte forma:

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{AB}\,, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Esta equação é chamada **equação paramétrica** da reta r.

Se $A = (a, b)$, $B = (a', b')$ e $P = (x, y)$ são as coordenadas dos pontos num sistema de coordenadas dado, então:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \quad &\iff \quad (x, y) = (a, b) + t(a' - a, b' - b) \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \end{cases} \text{ para algum } t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Dizemos que as equações

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}}$$

são as **equações paramétricas** da reta r.

Observação 1

Seja C um ponto da reta r tal que A está entre C e B e seja $\overrightarrow{AC}$ à semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AB}$.

Então,

$$\begin{aligned} AB &= \{(a + t(a' - a), b + t(b' - b))\,;\, t \in [0, 1]\,\}; \\ \overrightarrow{AB} &= \{(a + t(a' - a), b + t(b' - b))\,;\, t \in [0, +\infty)\,\}; \\ \overrightarrow{AC} &= \{(a + t(a' - a), b + t(b' - b))\,;\, t \in (-\infty, 0]\,\}. \end{aligned}$$

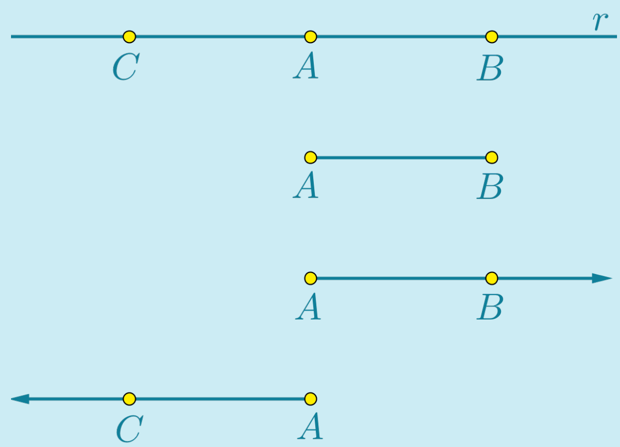

Figura 3.2: Semirretas com direções opostas.

Para verificar as afirmações, basta lembrar que um ponto R está entre pontos P e Q se, somente se, $d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q)$.

Veremos uma aplicação direta, do que foi explicado anteriormente, no exemplo a seguir.

Exemplo 1

Considere os pontos $A = (4,1)$ e $B = (-1,2)$.

(a) Determine a equação paramétrica da reta r que passa pelos pontos A e B.

(b) Encontre o ponto $P \in r$ associado ao parâmetro 2.

(c) Os pontos $Q = (1,3)$ e $R = \left(3, \dfrac{6}{5}\right)$ pertencem à reta r ? Caso afirmativo, o ponto pertence ao segmento AB ?

Solução.

(a) Como $\overrightarrow{AB} = (-5,1)$,

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in r &\iff (x,y) = (4,1) + t(-5,1), \quad t \in \mathbb{R} \\ &\iff (x,y) = (4-5t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas de r são: $r : \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 1 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$

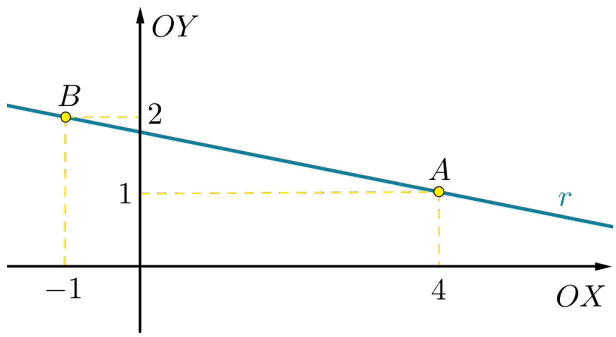

Figura 3.3: Exemplo 1

(b) Para encontrarmos o ponto P associado ao parâmetro $t = 2$, basta substituir o valor de t nas equações paramétricas de r encontradas no item anterior: $x = 4 - 5 \times 2 = -6$ e $y = 1 + 2 = 3$. Logo, $P = (-6, 3)$.

(c) O ponto $Q = (1, 3) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 1 = 4 - 5t \\ 3 = 1 + t \end{cases}.$$

Da segunda equação obtemos $t = 2$. Substituindo o valor de t na primeira equação obtemos $1 = 4 - 5 \times 2 \iff 1 = -6$, que é impossível. Logo, não existe um parâmetro que determine o ponto Q, ou seja, $Q \notin r$.

Analogamente, o ponto $R = \left(3, \dfrac{6}{5}\right) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 3 = 4 - 5t \\ \dfrac{6}{5} = 1 + t \end{cases}.$$

Da segunda equação obtemos $t = 1/5$, que satisfaz também a primeira equação. Portanto, $R \in r$, e como $t \in [0, 1]$, $R \in AB$.

Definição 2

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{O}$ é paralelo a uma reta r quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$. Nesse caso, escrevemos $\overrightarrow{v} \parallel r$.

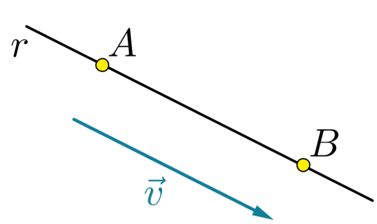

Figura 3.4: Vetor direção da reta r.

Um vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo a uma reta r é chamado **vetor direção** de r.

Note que se tomarmos dois pontos C e D pertencentes à reta r que passa pelos pontos A e B, então existem $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AC} = s\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} - s\overrightarrow{AB} = (t-s)\overrightarrow{AB}.$$

Assim, existe um $\lambda = t - s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB},$$

ou seja, dois vetores determinados por pontos pertencentes a uma mesma reta são sempre múltiplos ou paralelos.

OBSERVAÇÃO 3 É fácil verificar, que um vetor $\overrightarrow{v}$ é paralelo à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e A, B são dois pontos fixos quaisquer da reta r.

Reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} \neq 0$.

Se r é a reta que passa pelo ponto A e tem direção $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos:

$$\begin{aligned} P \in r \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \text{ é múltiplo de } \overrightarrow{v} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}, \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad P = A + t\overrightarrow{v}, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação paramétrica de r é:

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{v}; \quad t \in \mathbb{R}}$$

Escrevendo esta equação em coordenadas, temos que se $A = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, então as equações paramétricas de r, neste caso, são:

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}}$$

EXEMPLO 2 Determine a equação paramétrica da reta r que passa por $A = (2, -3)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 1)$.

Solução.

Temos que:

$P=(x,y)\in r \iff (x,y)=(2,-3)+t(-1,1)=(2-t,-3+t), \quad t\in\mathbb{R}.$

Portanto,

$$r:\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+t \end{cases} ; \; t\in\mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da reta r.

Exemplo 3

Determine o ponto de interseção da reta r_1 paralela ao vetor $\overrightarrow{v}=(1,1)$ que passa pelo ponto $A=(2,3)$ com a reta r_2 que passa pelos pontos $B=(-1,-2)$ e $C=(3,6)$.

Solução.

Um ponto $P=(x,y)\in r_1$ se, e somente se, $P=A+t\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$(x,y)=(2,3)+t(1,1)=(2+t,3+t)\ ,\ t\in\mathbb{R}.$$

E um ponto $P=(x,y)\in r_2$ se, e somente se, $P=B+s\overrightarrow{BC}$, isto é,

$$(x,y)=(-1,-2)+s(4,8)=(-1+4s,-2+8s)\ ,\ s\in\mathbb{R}.$$

Logo, um ponto $P=(x,y)\in r_1\cap r_2$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2+t=-1+4s \\ 3+t=-2+8s \end{cases} &\iff \begin{cases} t-4s=-3 \\ t-8s=-5 \end{cases} \\ &\iff 4s=2 \ \text{ e } \ t=-3+4s \\ &\iff s=\frac{1}{2} \ \text{ e } \ t=-1.\end{aligned}$$

Substituindo $t=-1$ em $(2+t,3+t)$, ou $s=1/2$ em $(-1+4s,-2+8s)$, obtemos que o ponto de interseção das retas é $P=(1,2)$.

Atenção: Para determinar o ponto de interseção de duas retas dadas por suas equações paramétricas, devemos usar parâmetros diferentes, pois o parâmetro de um ponto ao longo de uma reta pode não ser igual ao parâmetro do mesmo ponto ao longo da outra reta.

3.3 Equação cartesiana da reta

Nesta seção, vamos utilizar o produto interno para caracterizar algebricamente uma reta normal ou perpendicular a uma direção dada. Desta forma apresentaremos o segundo tipo de equação da reta: a equação cartesiana.

Definição 4 Um vetor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é **normal** ou **perpendicular** a uma reta r se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$.

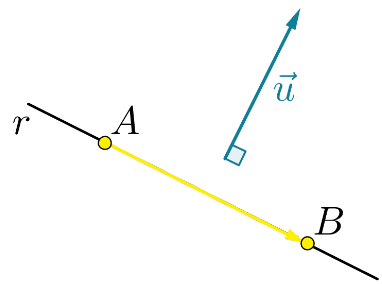

Figura 3.5: Vetor normal à reta r.

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$. Então,

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in r \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ax + by = ax_0 + by_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ax + by = c\,, \quad \text{onde} \quad c = ax_0 + by_0.
\end{aligned}$$

A equação dada por:

$$\boxed{r : ax + by = c}$$

é chamada **equação cartesiana** da reta r.

Diferente das equações paramétricas, neste caso, as coordenadas dos pontos pertencentes à reta se relacionam através de uma única equação. Nesta equação, observamos que os coeficientes a e b de x e y, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e que o valor de c é determinado quando se conhece um ponto de r, no caso, o ponto $A = (x_0, y_0)$. Observe também que a e b não podem ser ambos iguais à zero, pois $\overrightarrow{u} = (a, b)$ é um vetor não nulo.

Observação 5

Um vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ é normal à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{v} = (-b, a)$ é paralelo à r. A demonstração deste fato será deixada como exercício.

Exemplo 4

Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (-1, 4)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (2, 3)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{u} \perp r$, devemos ter $r : 2x + 3\,y = c$. O valor de c é calculado sabendo que $A = (-1, 4) \in r$, isto é, $c = 2 \times (-1) + 3 \times 4 = 10$. Portanto, a equação procurada é $r : 2x + 3y = 10$.

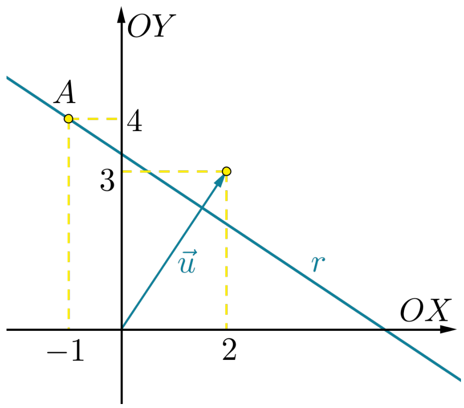

Figura 3.6: Exemplo 4

Exemplo 5

Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $B = (-1, 4)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, 3)$.

Solução.

Conhecer um ponto e um vetor paralelo à reta equivale a dar as equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Como $\overrightarrow{v} = (2, 3) \parallel r$ temos, pela observação 5, $\overrightarrow{u} = (3, -2) \perp r$. Portanto,

$$r : 3x - 2y = c.$$

Para determinar c, usamos o fato de que $B = (-1, 4) \in r$, isto é, $c = 3 \times (-1) - 2 \times 4 = -11$.

Logo, $r : 3x - 2y = -11$.

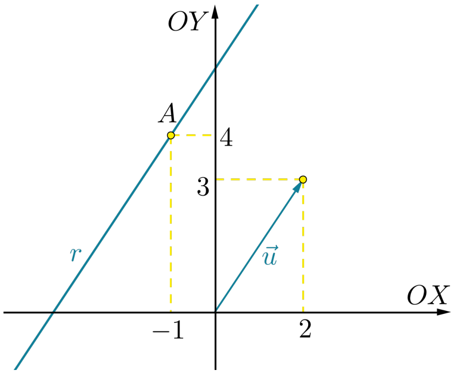

Figura 3.7: Exemplo 5

Exemplo 6

Determine a equação cartesiana da reta $r : \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 1 + 2s \end{cases} ; \ s \in \mathbb{R}$.

Solução.

Das equações paramétricas, obtemos o vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 2)$ paralelo à reta r e um ponto $A = (3, 1)$ pertencente a ela.

Como, pela observação 5, o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 1)$ é normal a r, a equação cartesiana de r é

$$2x + y = c.$$

Para calcular c, usamos que $A = (3, 1) \in r$, isto é, $c = 2 \times 3 + 1 = 7$.

Logo a equação cartesiana de r é $2x + y = 7$.

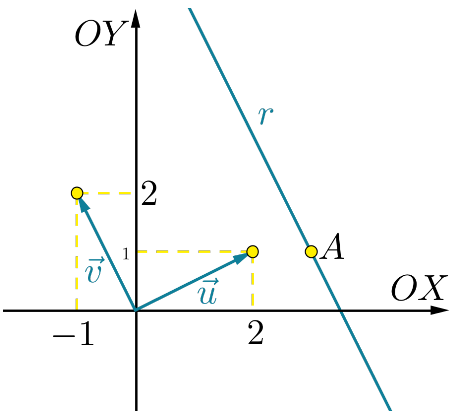

Figura 3.8: Exemplo 6.

Exemplo 7

Determine as equações paramétricas da reta $r : -3x + 2y = 4$.

Solução.

Para acharmos as equações paramétricas de r precisamos conhecer um vetor paralelo a r e um ponto de r.

Da equação cartesiana, temos $\overrightarrow{u} = (-3, 2) \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{v} = (2, 3) \parallel r$.

Para determinarmos um ponto de r, fazemos $x = 0$ na equação cartesiana de r e calculamos o valor correspondente de y:

$$x = 0 \Longrightarrow 2 \times y = 4 \Longrightarrow y = 2\,.$$

Portanto, o ponto $A = (0, 2)$ pertence a r. Assim, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}.$$

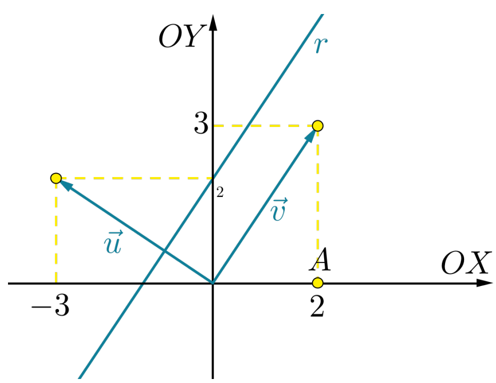

Figura 3.9: Exemplo 7.

3.4 Equação afim ou reduzida da reta

Nesta seção estudaremos o terceiro tipo de equação de reta no plano: a equação afim. Este tipo de equação é o mais trabalhado na Educação Básica.

Considere uma reta $r : ax + by = c$ dada por sua equação cartesiana, onde $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ é um vetor normal a r.

Vamos verificar que r pode ser reescrita das seguintes formas:

- Se $b = 0$, então um ponto $(x, y) \in r$ se, e somente se, $x = \dfrac{c}{a}$. Ou seja,

$$r = \{(d, y); y \in \mathbb{R}\},$$

onde $d = \dfrac{c}{a}$ (observe que $a \neq 0$).

Uma reta do tipo $r : x = d$ é dita vertical pois, neste caso, r é paralela ao eixo-OY ou coincidente com este eixo.

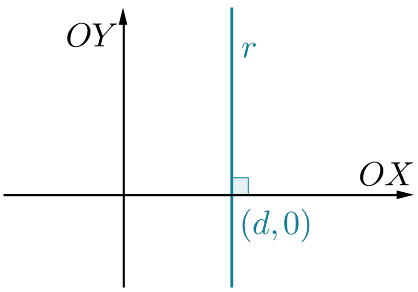

Figura 3.10: r é vertical e sua equação é $x = d$.

• Se $b \neq 0$, isto é, r é não vertical, então o ponto $(x, y) \in r$ se, e somente se,

$$by = -ax + c \iff y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Ou seja,

$$r = \{(x, mx + n); x \in \mathbb{R}\},$$

onde $m = -\frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{b}$.

Uma equação do tipo $y = mx + n$ é chamada equação afim ou reduzida da reta r.

Provamos assim que toda reta r não vertical se representa por uma equação do 1^o grau da forma $y = mx + n$, onde:

• n é a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo$-OY$. Se $n = 0$, então r passa pela origem.

• m é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta. De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = mx_0 + n$ e $y_1 = mx_1 + n$, então:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(mx_1 + n) - (mx_0 + n)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m\,.$$

• O número m chama-se **inclinação ou coeficiente angular da reta** $r : y = mx + n$.

Além disso,

◇ Se $m > 0$, a função $y = mx + n$ é **crescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n < y_2 = mx_2 + n$.

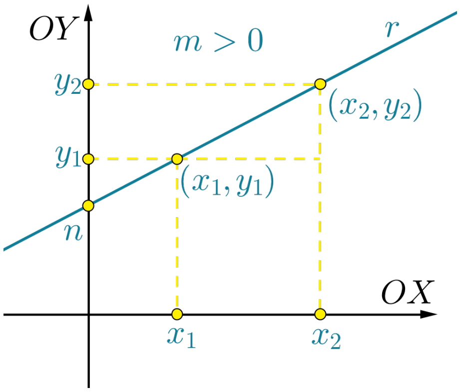

Figura 3.11: Para $m > 0$, $y = mx + n$ é crescente.

◇ Se $m < 0$, a função $y = mx + n$ é **decrescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n > y_2 = mx_2 + n$.

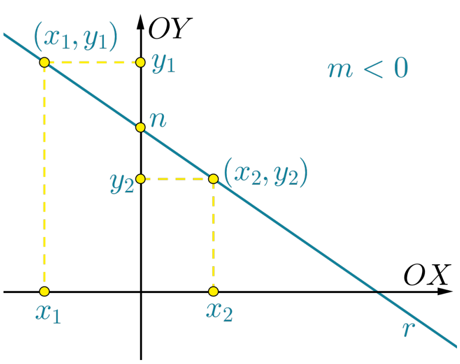

Figura 3.12: Para $m < 0$, $y = mx + n$ é decrescente.

◇ Se $m = 0$, a função $y = mx + n$ é **constante**, pois $y = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que $r : y = n$ é uma **reta horizontal**.

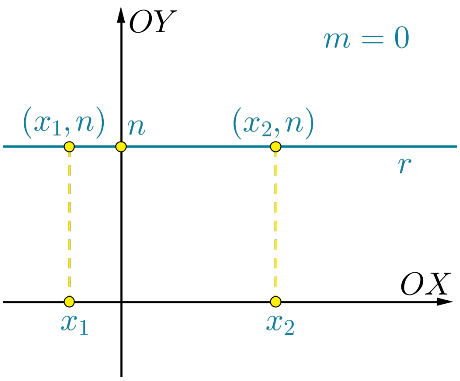

Figura 3.13: Para $m = 0$, $y = mx + n$ é constante.

• Seja θ o ângulo que a reta $r : y = mx + n$ faz com o semieixo$-OX$ positivo. Então,

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = m}$$

De fato, veja as figuras 3.14, 3.15 e 3.16:

$$m = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\theta.$$

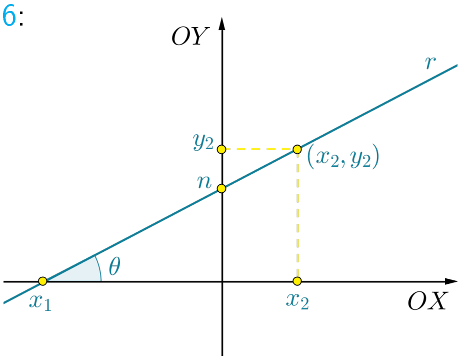

Figura 3.14: Caso $m > 0 \ : \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$m = \frac{0-y_1}{x_2-x_1} = -\operatorname{tg}(\pi - \theta) = \operatorname{tg}\theta.$$

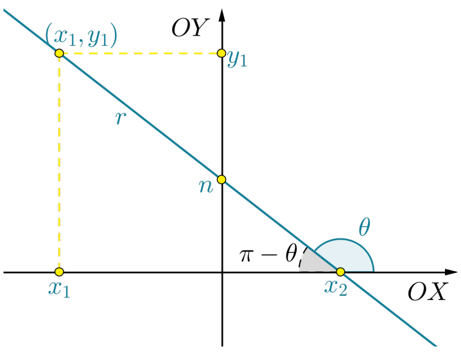

Figura 3.15: Caso $m < 0 \ : \ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$$m = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \Longrightarrow m = \operatorname{tg}\theta.$$

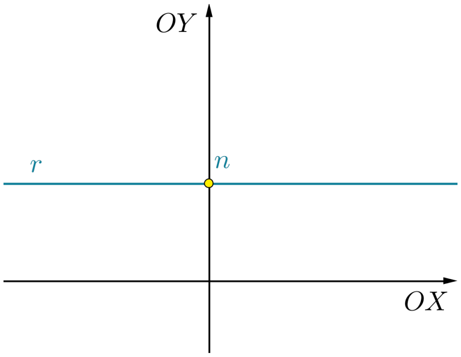

Figura 3.16: Caso $m = 0 \ : \ \theta = 0$.

EXEMPLO 8

Determine as equações afins das retas que contêm os lados do triângulo de vértices nos pontos $A = (1, 1)$, $B = (5, 1)$ e $C = (5, 3)$.

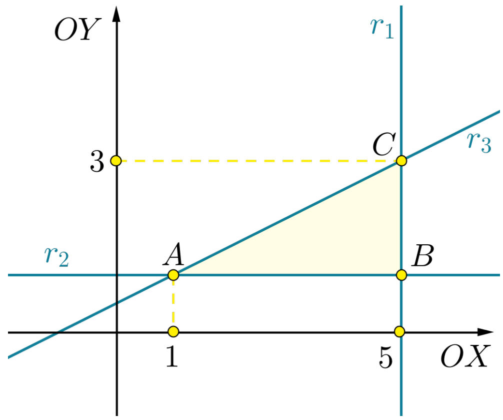

Figura 3.17: Triângulo de vértices A, B e C.

Solução.

• A reta r_1 que contém o lado BC é vertical, pois B e C têm a mesma abscissa 5. Assim, $r_1 : x = 5$.

• A reta r_2 que contém o lado AB é horizontal, pois A e B têm a mesma ordenada 1. Portanto $r_2 : y = 1$.

• A reta r_3 que contém o lado AC tem inclinação $m = \dfrac{3-1}{5-1} = \dfrac{1}{2}$. Assim, a equação de r_3 é da forma:

$$r_3 : y = \frac{1}{2}x + n.$$

Como $A = (1, 1) \in r_3$, obtemos, substituindo x por 1 e y por 1 na equação anterior, que:

$$1 = \frac{1}{2} \times 1 + n \implies n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$r_3 : y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},$$

é a equação afim da terceira reta.

3.5 Paralelismo e perpendicularismo entre retas

Duas retas r_1 e r_2 no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

(a) coincidentes: quando são iguais, isto é, $r_1 = r_2$;

(b) paralelas: quando não se intersectam, isto é,

$$\boxed{r_1 \cap r_2 = \varnothing.}$$

Neste caso, escrevemos $r_1 \parallel r_2$.

(c) concorrentes: quando se intersectam em um ponto, isto é,

$$\boxed{r_1 \cap r_2 = \{P\}.}$$

A partir das equações cartesianas de r_1 e r_2, determinemos quando ocorre cada uma destas situações.

Proposição 6 As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são paralelas ou coincidentes se, e somente se, existe $\lambda \neq 0$ tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$, isto é, se e somente se, seus vetores normais são múltiplos.

Demonstração Suponhamos que $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' \neq \lambda c$ e $\lambda \neq 0$.

Se $P = (x, y) \in r_1$, ou seja, $ax + by = c$, então

$$\lambda ax + \lambda by = \lambda c \Longleftrightarrow a'x + b'y = \lambda c \neq c'.$$

Provamos assim que se $P = (x, y) \in r_1$, então $P = (x, y) \notin r_2$, ou seja, que $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

Por outro lado, se $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c$ e $\lambda \neq 0$, então

$$ax + by = c \Longleftrightarrow \lambda ax + \lambda by = \lambda c \Longleftrightarrow a'x + b'y = c',$$

ou seja, as retas r_1 e r_2 são coincidentes.

Suponhamos agora que $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ ou $r_1 = r_2$, ou seja, que r_1 e r_2 são retas paralelas ou coincidentes.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$, o sistema possui uma única solução dada por:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad \text{e} \quad y = \frac{c'a - ca}{ab' - a'b}.$$

Logo, como as retas são paralelas ou coincidentes, devemos ter $ab' - a'b = 0$. Isto significa que os vetores (a, b) e (a', b') são múltiplos, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$. Como $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$, devemos ter $\lambda \neq 0$.

Corolário 7

As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são **coincidentes** se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$(a', b') = \lambda(a, b) \quad \text{e} \quad c' = \lambda c\,.$$

Demonstração

Pelo teorema acima, se as retas são coincidentes, existe $\lambda \neq 0$ tal que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.

Seja (x_0, y_0) um ponto da reta r. Como $r_1 = r_2$, as coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$ satisfazem também a equação de r_2. Logo,

$$c' = a'x_0 + b'y_0 = \lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda c\,,$$

isto é $c' = \lambda c$.

Reciprocamente, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\lambda a = a'$, $\lambda b = b'$ e $\lambda c = c'$, é claro que as equações de r_1 e r_2 representam a mesma reta, isto é, $r_1 = r_2$.

Como consequência do corolário anterior e da proposição 6, obtemos:

Corolário 8

As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são **paralelas** se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$(a', b') = \lambda(a, b) \quad \text{e} \quad c' \neq \lambda c\,.$$

Exemplo 9

Determine a equação cartesiana da reta r_2 paralela à reta $r_1 : x - 2y = 3$ que passa pelo ponto $A = (2, 2)$.

Solução.

Seja $r_2 : ax + by = c$ a equação cartesiana da reta r_2. Pela proposição 6, existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$(a, b) = \lambda(1, -2),$$

onde $(1, -2)$ é o vetor normal à reta r_1. Podemos tomar, sem perda de generalidade, $\lambda = 1$, ou seja, $(a, b) = (1, -2)$.

Como $r_2 : x - 2y = c$ e o ponto $A = (2, 2) \in r_2$, devemos ter $c = 2 - 2 \times 2 = -2$.

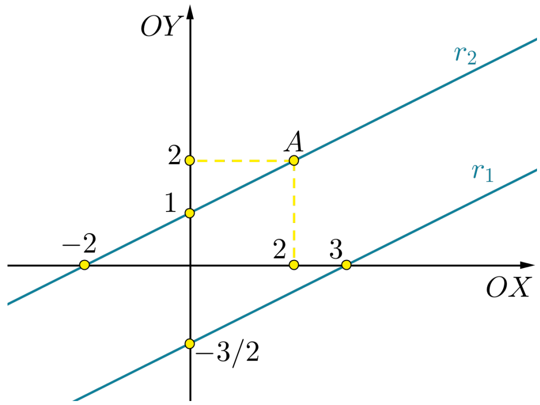

Figura 3.18: Exemplo 9.

Logo, $x - 2y = -2$ é a equação cartesiana da reta r_2.

Exemplo 10

Verifique se as retas

$$r_1 : x + 2y = -1, \quad r_2 : 2x + 4y = 2 \quad \text{e} \quad r_3 : 3x + 6y = -3\,,$$

são paralelas ou coincidentes.

Solução. Multiplicando a equação de r_1 por 2, obtemos $r_1 : 2x + 4y = -2$. Como $-2 \neq 2$, temos $r_1 \parallel r_2$.

Multiplicando a equação de r_1 por 3, obtemos a equação de r_3. Logo, $r_1 = r_3$.

Além disso, $r_2 \parallel r_3$.

Definição 9

O **ângulo $\angle(r_1, r_2)$ entre duas retas r_1 e r_2** se define da seguinte maneira:

- se r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas, então $\angle(r_1, r_2) = 0$,
- se as retas são concorrentes, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, então $\angle(r_1, r_2)$ é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas.

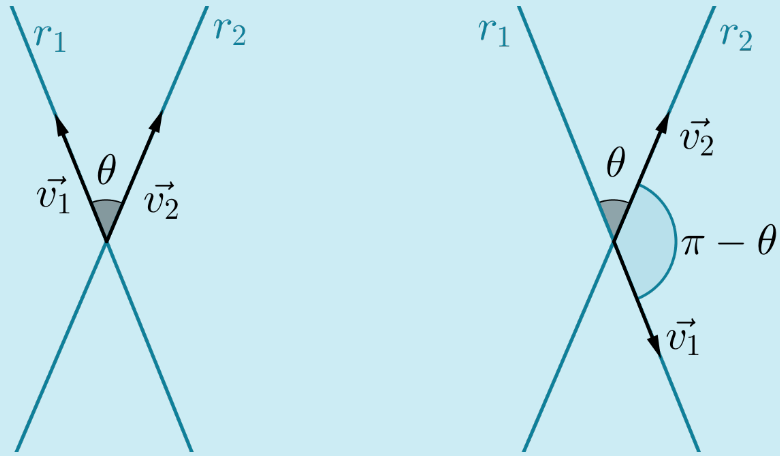

Figura 3.19: $\angle(r_1, r_2) = \theta$.

Em particular, $0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2$. A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores paralelos às retas concorrentes r_1 e r_2, respectivamente. Então, como $\angle(r_1, r_2) = \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ ou $\angle(r_1, r_2) = \pi - \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ (ver figura 3.19),

$$\boxed{\cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})| = \frac{|\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|}\,, \qquad 0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2}$$

Observe que a fórmula vale também quando r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes, isto é, quando $\angle(r_1, r_2) = 0$, pois:

$$\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_2} \Longrightarrow \frac{|\langle \lambda\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle|}{\|\lambda\overrightarrow{v_2}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|\lambda| \, |\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle|}{|\lambda| \, \|\overrightarrow{v_2}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\|} = 1 = \cos 0 = \cos\angle(r_1, r_2)\,.$$

Exemplo 11

Determine as equações cartesianas das retas r_1 e r_2 que passam pelo ponto $A = (1, 2)$ e fazem um ângulo de $\pi/4$ com a reta $r : -2x + y = 3$.

Solução. Como o vetor $\overrightarrow{u} = (-2, 1)$ é perpendicular à reta r, o vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2)$, pela observação 5, é paralelo à reta r.

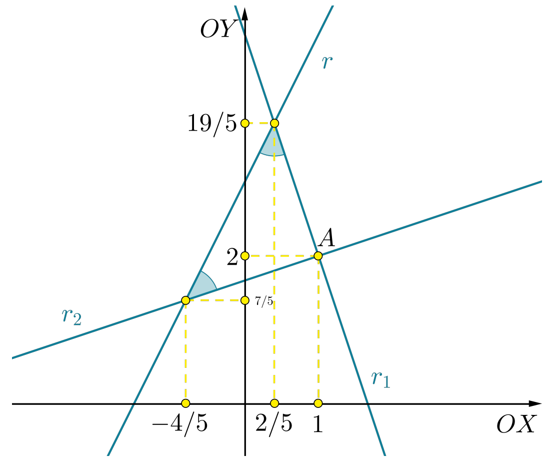

Figura 3.20: Exemplo 11.

Sejam $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ os vetores unitários que fazem um ângulo de $\pi/4$ com o vetor $\overrightarrow{v}$. Então, pela proposição 32 do capítulo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \cos\pi/4 \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} + \sin\pi/4 \cdot \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(1,2) + \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(-2,1) \\
&= \tfrac{\sqrt{10}}{10}(-1,3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_2} &= \cos(-\pi/4) \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} + \sin(-\pi/4) \cdot \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(1,2) - \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(-2,1) \\
&= \tfrac{\sqrt{10}}{10}(3,1).
\end{aligned}$$

Como a reta r_1 é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)$ e a reta r_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$, temos que $\overrightarrow{u_1} = (3,1)$ é um vetor normal à reta r_1 e $\overrightarrow{u_2} = (1,-3)$ é um vetor normal à reta r_2.

Assim,

$$r_1 : 3x + y = c_1 \quad \text{e} \quad r_2 : x - 3y = c_2,$$

onde $c_1 = 3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ e $c_2 = 1 \times 1 - 3 \times 2 = -5$ são as equações cartesianas das retas que passam pelo ponto A e fazem um ângulo de $\pi/4$ com a reta r.

• Duas retas são **perpendiculares** quando o ângulo entre elas é de 90^o (ou $\dfrac{\pi}{2}$ radianos). Nesse caso, escrevemos $r_1 \perp r_2$.

Proposição 10

As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são perpendiculares se, e somente se, seus vetores normais $\overrightarrow{w_1} = (a, b)$ e $\overrightarrow{w_2} = (a', b')$ são perpendiculares, ou seja,

$$\boxed{aa' + bb' = 0.}$$

Demonstração

De fato, as retas r_1 e r_2 são perpendiculares se, e somente se,

$$\angle(r_1, r_2) = \pi/2 \Longleftrightarrow \cos\angle(r_1, r_2) = 0 \Longleftrightarrow \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0,$$

onde $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são vetores paralelos às reta r_1 e r_2 respectivamente.

Como $\overrightarrow{w_1} = (a, b) \perp r_1$ e $\overrightarrow{w_2} = (a', b') \perp r_2$ temos, pela observação 5, que $\overrightarrow{v_1} = (-b, a) \parallel r_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (-b', a') \parallel r_2$. Logo, $r_1 \perp r_2$ se, e somente se,

$$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = (-b)(-b') + aa' = aa' + bb' = 0,$$

ou seja, $\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \rangle = aa' + bb' = 0$.

Exemplo 12

Determine a equação cartesiana da reta r_2 que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e é perpendicular à reta $r_1 : 2x - 3y = 4$.

Solução. Seja $r_2 : ax+by = c$ a equação cartesiana de uma reta perpendicular à reta $r_1 : 2x - 3y = 4$.

Pela proposição anterior, o vetor $\overrightarrow{u_2} = (a, b)$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u_1} = (2, -3)$ e, portanto, $\overrightarrow{u_2} = \lambda(3, 2)$ para algum $\lambda \neq 0$.

Podemos tomar, sem perda de generalidade, $\lambda = 1$, ou seja, $\overrightarrow{u_2} = (3, 2)$.

Então,

$$r_2 : 3x + 2y = c,$$

onde $c = 3 \times (-2) + 2 \times 1 = -4$, pois o ponto $A = (-2, 1)$ pertence a r_2. Obtemos assim que

$$3x + 2y = -4$$

é a equação cartesiana da reta r_2.

Vejamos agora como caracterizar o paralelismo e o perpendicularismo entre duas retas dadas na forma reduzida.

É fácil verificar que se r_1 é uma reta vertical, então: $r_2 \parallel r_1 \iff r_2$ é vertical.

A proposição abaixo nos diz quando duas retas não verticais na forma reduzida são paralelas.

Proposição 11 As retas $r_1 : y = mx + n$ e $r_2 : y = m'x + n'$ são paralelas se, e somente se, $m = m'$ e $n \neq n'$.

Demonstração De fato, como $r_1 : mx - y = -n$ e $r_2 : m'x - y = -n'$, temos que $\overrightarrow{v} = (m, -1)$ e $\overrightarrow{w} = (m', -1)$ são vetores normais às retas r_1 e r_2, respectivamente.

Logo, pelo corolário 8, r_1 e r_2 são paralelas se, e somente se, existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$(m', -1) = \lambda(m, -1) = (\lambda m, -\lambda) \quad \text{e} \quad -n' \neq -\lambda n.$$

Como $-1 = -\lambda$, devemos ter $\lambda = 1$. Então $r_1 \parallel r_2$ se, e somente se, $m = m'$ e $n \neq n'$.

Portanto, acabamos de mostrar que as retas $r_1 : y = mx + n$ e $r_2 : y = m'x + n'$ são paralelas se, e somente se, possuem o mesmo coeficiente angular m e cortam o eixo$-OY$ em pontos distintos.

Exemplo 13 Determine a equação da reta r_2 que passa pelo ponto $A = (-2, 3)$ e é paralela à reta

$$r_1 : y = 2x - 1.$$

Solução. Como r_2 é paralela à reta não vertical r_1, r_2 é também não vertical.

A equação de r_2 é da forma

$$r_2 : y = 2x + n,$$

pois r_1 e r_2 têm a mesma inclinação $m = 2$, pela proposição 11.

Além disso, como $A = (-2, 3) \in r_2$, as coordenadas $x = -2$ e $y = 3$ desse ponto devem satisfazer a equação de r_2. Isto é, $3 = 2 \times (-2) + n$. Portanto, $n = 7$ e $r_2 : y = 2x + 7$ é a equação procurada.

Sejam r_1 e r_2 retas perpendiculares. Se r_1 é horizontal, $r_1 : y = b$, então r_2 é vertical, $r_2 : x = c$, e vice-versa.

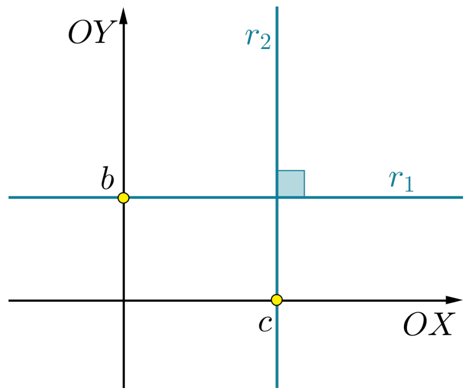

Figura 3.21: Retas horizontais e verticais são perpendiculares.

A proposição abaixo nos diz quando duas retas não verticais e não horizontais são perpendiculares.

Proposição 12

Sejam $r_1 : y = mx + n$ e $r_2 : y = m'x + n'$ duas retas tais que $m \neq 0$ e $m' \neq 0$. Então, $r_1 \perp r_2$ se, e somente se, $mm' = -1$.

Demonstração

Como $r_1 : mx - y = -n$ e $r_2 : m'x - y = -n'$ temos, pela proposição 10, que $r_1 \perp r_2$ se, e somente se, seus vetores normais $\overrightarrow{v} = (m, -1)$ e $\overrightarrow{w} = (m, -1)$ são ortogonais.

Logo,

$$r_1 \perp r_2 \iff \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = mm' + 1 = 0 \iff mm' = -1.$$

Exemplo 14

Determine a equação da reta r_2 que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta r_1, onde:

(a) $r_1 : y = 3\,, \quad A = (2, 5)\,;$ **(b)** $r_1 : y = 2x - 5\,, \quad A = (2, -1)\,.$

Solução. **(a)** Como r_1 é horizontal, r_2 deve ser vertical e a sua equação da forma $r_2 : x = n$.

Sendo que $A = (2, 5) \in r_2$, devemos ter $2 = n$ e, portanto, $r_2 : x = 2$.

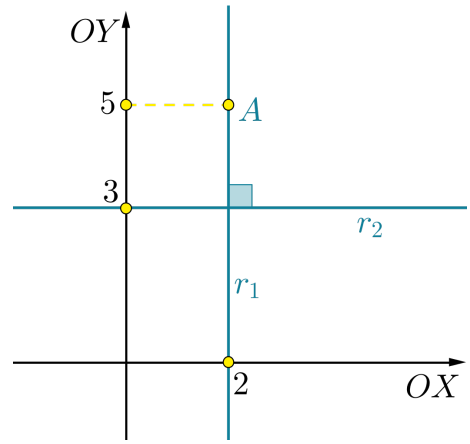

Figura 3.22: Reta r_1 vertical, $r_2 \perp r_1$.

(b) Como r_1 é não vertical e não horizontal, a equação de r_2 deve ser da forma $r_2 : y = mx + n$, onde $2m = -1$ pela proposição 12. Isto é, $m = -\frac{1}{2}$ e, portanto, $r_2 : y = -\frac{1}{2}x + n$.

Para determinar o valor de n usamos que $A = (2, -1) \in r_2$. Ou seja, as coordenadas de A devem satisfazer a equação de r_2:

$$-1 = -\frac{1}{2} \times 2 + n \Longrightarrow n = 0\,.$$

Assim, $r_2 : y = -\frac{1}{2}x$ é a equação procurada.

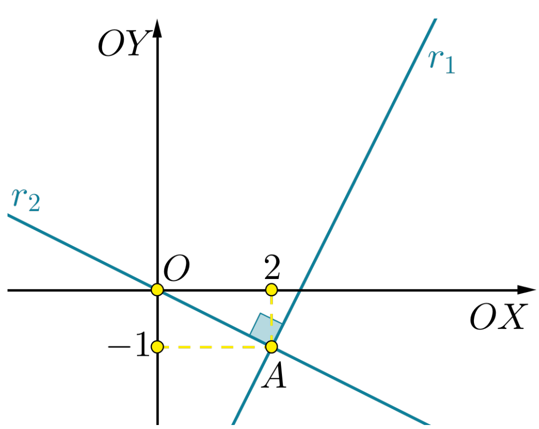

Figura 3.23: Reta $r_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2\,,\quad r_2 \perp r_1$.

Exemplo 15

Determine as equações cartesianas das retas perpendiculares à reta r que passa pelos pontos $A = (1, 1)$ e $B = (2, 4)$.

Solução. A reta r tem inclinação $m = \frac{4-1}{2-1} = 3$. As retas perpendiculares a r devem, portanto, ter inclinação $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$. Logo, a equação afim de uma reta perpendicular a r é

$$r'_d : y = -\frac{1}{3}x + d\,.$$

Variando $d \in \mathbb{R}$, obtemos a equação de qualquer reta perpendicular à reta r.

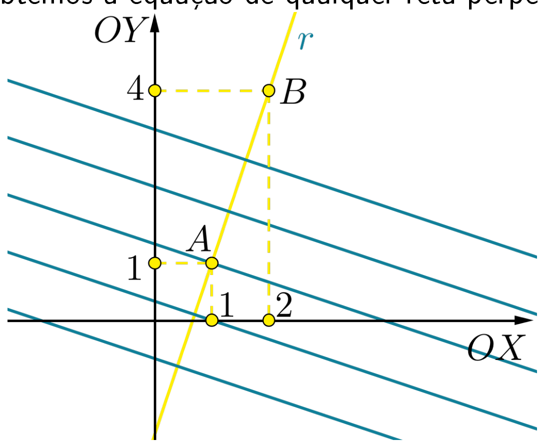

Figura 3.24: Reta passando pelos pontos A e B e algumas retas da família $r'_d : y = -\frac{1}{3}x + d$.

Escrevemos o valor d como subíndice em r'_d para indicar que a reta em questão depende do valor d. Ou seja, mudar o valor de d significa considerar outra reta também perpendicular a r.

A equação da reta r'_d se escreve na forma cartesiana como:

$$r'_d : \frac{1}{3}x + y = d \qquad \text{, ou seja,} \qquad r'_d : x + 3y = -3d\,.$$

Nesta equação d é um número real qualquer, assim como $-3d$. Portanto, fazendo $c = -3d$, a família de retas perpendiculares à reta r pode ser reescrita na forma:

$$r'_c : x + 3y = c\,,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário.

Exercícios

1. Verifique se os pontos $P = (3, 2)$, $Q = (1, 3)$ e $R = (6, 4)$ são colineares.

2. Considere os pontos $A = (2, 4), B = (4, 5)$ e $C = (5, 2)$.

   (a) Encontre a equação cartesiana da reta r que passa pelos pontos A e C.

   (b) Encontre a equação cartesiana da reta s que passa por B e é perpendicular à reta r.

(c) Encontre a altura h do triângulo ABC em relação à base AC.

3. Considere os pontos $A = (0, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (0, -2)$ e $D = (3, 3)$. Verifique que os segmentos AB e CD se interceptam e determine o ponto de interseção.

4. Sejam r a reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (3, 4)$ e l a reta que passa pelos pontos $C = (6, 0)$ e $D = (1, -3)$. Verifique que as retas r e l são concorrentes e determine o ponto P de interseção. O ponto P pertence ao segmento AB, à semirreta $\overrightarrow{AB}$ ou à semirreta oposta a $\overrightarrow{AB}$? O ponto P pertence ao segmento CD, à semirreta $\overrightarrow{CD}$ ou à semirreta oposta à $\overrightarrow{CD}$?

5. Encontre as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P = (1, 3)$ e é paralela à reta $s : 2x + 4y = -4$. Faça um esboço das retas r e s.

6. Encontre o ponto P de ordenada -4 sobre a reta s perpendicular à reta $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, que passa por $(-2, 5)$.

7. Mostre que as retas $y = ax - 4 - 2a$ passam pelo mesmo ponto, para todo $a \in \mathbb{R}$, e encontre este ponto.

8. Calcule a equação afim da reta:

(a) r_1 paralela à reta $s_1 : 4x - 3y = 1$ que passa pelo ponto $(6, 2)$;

(b) r_2 perpendicular à reta $s_2 : y = 2x - 1$ que passa pelo ponto $(4, 0)$;

(c) r_3 perpendicular à reta $s_3 : x = 5$ que passa pelo ponto $(2, 4)$.

9. Determine a equação paramétrica da reta r paralela à reta $s : y = 3x - 2$ que passa pelo médio do segmento AB, onde $A = (3, -4)$ e $B = (9, 8)$.

10. Dadas as equações paramétricas das retas abaixo, diga quais delas representam a mesma reta:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad r_2 : \begin{cases} x = -6t + 3 \\ y = 12t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R};$$

$$r_3 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

11. Mostre que as retas $r : x+2y = 16$, $s : y = 2x-2$, $t : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+8 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $p : y = -\dfrac{x}{2} + 12$ formam um quadrado.

12. Considere o paralelogramo de vértices $A = (1,1)$, $B = (4,3)$, $C = (5,4)$ e D. Encontre a equação da reta r que passa por D e é paralela à diagonal de $ABCD$ que não passa por D.

13. Discuta a posição relativa das retas:

$$r : 4mx - my = 3,$$
$$s : 12x - 3my = m,$$

em função de $m \in \mathbb{R}$.

14. Esboce a família de retas descritas pela equação $5y = \lambda x + 5$, onde $0 \leq \lambda \leq 5$.

15. Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ as retas $(\lambda-1)x + 6y = -1$ e $4x + (\lambda+1)y = 1$ são paralelas ?

16. Encontre todas as retas que são perpendiculares à reta $s : 3x + 4y = 1$.

17. Determine, em função de um único parâmetro, dando seu domínio de variação, uma equação que descreva a família de todas as retas que têm a seguinte propriedade: o triângulo formado pelas retas e pelos eixos coordenados tem área 2 e está situado no primeiro quadrante.

18. Sejam m e n dois números reais não nulos e $P = (x, y)$ um ponto.

(a) Mostre que quando P descreve uma reta r, então os pontos $Q = \left(\dfrac{x}{m}, \dfrac{y}{n}\right)$ também descreve uma reta s.

(b) Se a equação de s é $\alpha x + \beta y = \gamma$, encontre a equação de r.

19. Sejam $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ duas retas concorrentes em um ponto P. Mostre que a reta $r'' : a''x + b''y = c''$ passa pelo ponto P se, e somente se, existem números s e t tais que $a'' = sa + ta'$, $b'' = sb + tb'$ e $c'' = sc + tc'$.

20. Sejam $P = (-1, 3)$ e $Q = (2, 2)$.

(a) Determine a equação afim da reta r que passa por P e Q.

(b) Determine as coordenadas dos pontos que estão sobre a reta r e cuja distância ao ponto Q é o dobro da distância ao ponto P.

(c) Determine as coordenadas dos pontos que estão sobre a reta r e cuja distância ao ponto Q é λ vezes a distância ao ponto P, onde $\lambda > 0$.

21. Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo $ABDC$ cujas diagonais estão sobre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $A = (1, 1)$ e que $AB \subset r$, onde r é uma reta paralela ao vetor $(2, 1)$, determine os vértices B, C e D de $\mathcal{P}$.

22. Considere o retângulo $ABDC$, o ponto $E \in AB$ e o ponto $F \in BD$ tais que $|AB| = 4, |AC| = 3, |AE| = 2$ e $|FD| = 1$. Escolhendo um sistema de eixos ortogonais adequado, determine o cosseno do ângulo formado pelas retas r e l, e calcule a distância do vértice C ao ponto P, onde r é a reta que contém o segmento AF, l é a reta que contém o segmento CE e $\{P\} = CE \cap AF$.

23. Seja ABC um triângulo qualquer. Mostre, usando um sistema de eixos ortogonais adequado, que as alturas AD, BE e CF relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente, se interceptam num ponto, chamado **ortocentro** do triângulo.

24. Mostre que a equação cartesiana da reta r que corta o eixo-horizontal no ponto de abscissa a e o eixo-vertical no ponto de ordenada b, com a e b diferentes de zero, é dada por $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

25. Uma reta r que passa pelo ponto $P = (2, 4/3)$ forma com os semieixos coordenados positivos um triângulo de perímetro 12. Determine sua equação.

Dica: Utilize o exercício anterior.

26. Mostre que dados três pontos A, B e C não colineares existe um, e apenas um círculo que passa por esses pontos, ou seja, um círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Com isso, fica provado que as mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam num ponto, chamado **circuncentro**, que é o centro do círculo circunscrito ao triângulo.

27. Sejam os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 0)$ e $C = (-5, -2)$. Determine a equação cartesiana do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

◇